МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Издается с 2023 года
Выходит 4 раза в год

Том 1
Выпуск 2

Математика и теоретические компьютерные науки

Казань
2023

Журнал «Математика и теоретические компьютерные науки» основан в 2022 году Научно-образовательным математическим центром Приволжского федерального округа (НОМЦ ПФО). Его учредителем является ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет». Журнал зарегистрирован в Министерстве РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций 06 февраля 2023 г. (Эл № ФС77-84704) и ориентирован на электронную публикацию научных статей по всем основным направлениям математики и теоретических компьютерных наук:

- вещественный, комплексный и функциональный анализ;
- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление;
- математическая физика;
- геометрия и топология;
- теория вероятностей и математическая статистика;
- математическая логика, алгебра и теория чисел;
- вычислительная математика;
- теория вычислимости и сложности вычислений;
- дискретная математика и математическая кибернетика;
- теоретическая информатика;
- математические методы в искусственном интеллекте.

Также принимаются к печати обзоры, научно-популярные статьи, статьи о математической жизни. Все статьи проходят процедуру рецензирования. Все опубликованные статьи находятся в открытом доступе.

Журнал финансируется НОМЦ ПФО (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии в соответствии с абзацем вторым пункта 1 статьи 78.1 Бюджетного кодекса Российской Федерации № 075-02-2023-944 от «16» февраля 2023 г.).

СОДЕРЖАНИЕ

Бикчентаев А.М. К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана. II 3

Мусин И.Х. Преобразования Фурье быстро убывающих функций в $\mathbb{R}^n$ 12

Сабитов И.Х. Изометрические реализации плоскости Лобачевского в $R^n, n \geq 4$ 22

Файзрахманов М.Х. Обобщенно вычислимые нумерации и неподвижные точки 35

НАУЧНЫЕ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Газизов Р.Р. О максимальной и минимальной площадях ожерелья 50

Шишмаров Н.А. Симметрии Гекке, ассоциированные с регулярными по Артину–Шельтеру алгебрами типов E и H 62

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Некролог. Анатолий Николаевич Шерстнев 86

III Конференция Математических центров России 89

VII Всемирный Конгресс математиков тюркского мира 90

Объявления о конференциях с поддержкой НОМЦ ПФО 91

Том 1, Выпуск 2
Стр. 3–11 (2023)

УДК 517.983, 517.986
MSC 46L10, 46L51

К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана. II

А.М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Пусть $S(\mathcal{M},\tau)$ – *-алгебра всех τ-измеримых операторов и $X, Y \in S(\mathcal{M},\tau)$. Тогда (i) если $|Y| \leq |X|$, то $\ker(X) \subset \ker(Y)$; (ii) если X обратим слева с $X_l^{-1} \in \mathcal{M}$, то $\operatorname{ran}(X^*) = \mathcal{H}$. Получено следующее обобщение теоремы Путнама (1951), см. также задачу 188 в книге Халмош П. Гильбертово пространство в задачах, Мир, М., 1970: положительный самокоммутатор $A^*A - AA^*$ $(A \in S(\mathcal{M},\tau))$ не может иметь обратного в $\mathcal{M}$. Пусть I – единица алгебры $\mathcal{M}$ и $\tau(I) = +\infty$, $A, B \in S(\mathcal{M},\tau)$ и $A = A^3$. Тогда коммутатор $[A, B]$ не может иметь вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор $K \in S(\mathcal{M},\tau)$ τ-компактен.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, обратимость, коммутатор.

Введение

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Пусть $S(\mathcal{M},\tau)$ – *-алгебра всех τ-измеримых операторов. Данная работа продолжает исследования свойств τ-измеримых операторов, начатые в [1]. Перечислим полученные результаты. Пусть операторы $X, Y \in S(\mathcal{M},\tau)$. Тогда

(i) если $|Y| \leq |X|$, то $\ker(X) \subset \ker(Y)$;

(ii) если X обратим слева с $X_l^{-1} \in \mathcal{M}$, то $\operatorname{ran}(X^*) = \mathcal{H}$ (теорема 2).

В теореме 4 получено следующее обобщение теоремы Путнама [2] (см. также [3, задача 188]): положительный самокоммутатор $A^*A - AA^*$ $(A \in S(\mathcal{M},\tau))$ не может иметь обратного в $\mathcal{M}$. Доказательство теоремы 4 является новым и для *-алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau = \operatorname{tr}$. Пусть I – единица алгебры $\mathcal{M}$ и $\tau(I) = +\infty$, $A, B \in S(\mathcal{M},\tau)$ и $A = A^3$. Тогда коммутатор $[A, B]$ не может иметь вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор $K \in S(\mathcal{M},\tau)$ является

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

Поступила: 08.09.2022. Принята: 11.05.2023. Опубликована: 30.06.2023.

τ-компактным (теорема 5). Наконец, приведено новое прямое доказательство следствия 3.10 из [1].

1. Обозначения и определения

Пусть $\mathcal{M}^{\rm pr}$ – решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathcal{M}$, $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\rm pr}$, $\mathcal{M}^+$ – конус положительных элементов из $\mathcal{M}$ и $\|\cdot\|$ – C^*-норма на $\mathcal{M}$. Отображение $\varphi : \mathcal{M}^+ \to [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След φ называется (см. [4, гл. V, §2])

- *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$;
- *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ $(X_i, X \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$;
- *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : \ Y \in \mathcal{M}^+, \ Y \leq X, \ \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathcal{M}^+$.

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Далее всюду τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\rm pr}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов является *-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр, операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [5, гл. IX]. Для семейства $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^{\rm h}$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathcal{M}, \tau)^{\rm h}$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M}, \tau)^+$, будем обозначать через $\leq$. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ – полярное разложение X, то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$. Через $\mu(t; X)$ обозначим *функцию сингулярных значений* оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, т.е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(\cdot; X)\colon (0, \infty) \to [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu(t; X) = \inf\{\|XP\| : \ P \in \mathcal{M}^{\rm pr} \ \text{и} \ \tau(P^\perp) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Лемма 1 ([6]). *Пусть $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда*

(i) $\mu(t; X) = \mu(t; |X|) = \mu(t; X^*)$ *для всех $t > 0$;*

(ii) $\mu(t; \lambda X) = |\lambda|\mu(t; X)$ *для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $t > 0$;*

(iii) *если $|X| \leq |Y|$, то $\mu(t; X) \leq \mu(t; Y)$ для всех $t > 0$;*

(iv) $\mu(t; |X|^\alpha) = \mu(t; X)^\alpha$ *для всех $\alpha > 0$ и $t > 0$;*

(v) $X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \sup\limits_{t>0} \mu(t; X) < +\infty$*; и при этом* $\lim\limits_{t\to+0} \mu(t; X) = \sup\limits_{t>0} \mu(t; X) = \|X\|$.

Пусть $S_0(\mathcal{M}, \tau) = \{A \in S(\mathcal{M}, \tau) : \ \lim\limits_{t\to+\infty} \mu(t; A) = 0\}$ – *-идеал τ-компактных операторов в $S(\mathcal{M}, \tau)$. Оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ называется *гипонормальным*, если $A^*A \geq AA^*$;

когипонормальным, если A^* гипонормален. Оператор $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ называется *коммутатором*, если $X = [A, B] = AB - BA$ для некоторых $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$. *Самокоммутатор* оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ есть оператор $[A^*, A] = A^*A - AA^*$.

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – *-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$ и $\tau = \mathrm{tr}$ – канонический след, то $S(\mathcal{M}, \tau)$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $S_0(\mathcal{M}, \tau)$ совпадает с *-идеалом компактных (=вполне непрерывных) операторов в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и

$$\mu(t; X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X)\chi_{[n-1,n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность s-чисел оператора X; χ_A – индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$.

Если $\mathcal{M}$ абелева (т. е. коммутативна), то $\mathcal{M} \simeq L^{\infty}(\Omega, \Sigma, \nu)$ и $\tau(f) = \displaystyle\int_{\Omega} f \mathrm{d}\nu$, где (Ω, Σ, ν) – локализуемое пространство с мерой, *-алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω, Σ, ν), которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. Функция $\mu(t; f)$ совпадает с невозрастающей перестановкой функции $|f|$; свойства перестановок см. в [7].

2. Основные результаты

Теорема 2. *Пусть операторы* $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$. *Тогда*

(i) *если* $|Y| \leq |X|$, *то* $\ker(X) \subset \ker(Y)$;

(ii) *если* X *обратим слева с* $X_l^{-1} \in \mathcal{M}$, *то* $\mathrm{ran}(X^*) = \mathcal{H}$.

Доказательство. (i) Поскольку $\ker(Z) = \ker(|Z|)$ для всех $Z \in S(\mathcal{M}, \tau)$, можем считать, что $0 \leq Y \leq X$. Тогда найдется оператор $A \in \mathcal{M}$ с $\|A\| \leq 1$ такой, что $Y^{1/2} = AX^{1/2}$ [8, предложение на с. 261]. Следовательно,

$$\ker(X^{1/2}) \subset \ker(Y^{1/2}). \tag{1}$$

Заметим, что $X = X^{1/2} \cdot X^{1/2}$ и

$$\ker(X^{1/2}) \subset \ker(X),$$

$\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{D}(X^{1/2})$. Если $\xi \in \mathcal{D}(X)$ и $X\xi = 0$, то $\langle X\xi, \xi\rangle = \|X^{1/2}\xi\|^2 = 0$ и

$$\ker(X^{1/2}) \subset \ker(X).$$

Поэтому $\ker(X^{1/2}) = \ker(X)$ и утверждение следует из (1).

(ii) Покажем, что для любого вектора $\xi \in \mathcal{H}$ найдется вектор $\eta \in \mathcal{H}$ такой, что $X^*\eta = \xi$. Для произвольного вектора $\zeta \in \mathcal{D}(X)$ найдется вектор $h \in \mathrm{ran}(X)$ такой, что

$X\zeta = h$ и $\zeta = X_l^{-1}h$. Линейный функционал $\varphi(h) = \langle \xi, \zeta \rangle = \langle \xi, X_l^{-1}h \rangle$ является ограниченным на $\mathrm{ran}(X)$, поскольку

$$|\varphi(h)| \le \|\xi\| \, \|X_l^{-1}h\| \le \|X_l^{-1}\| \, \|\xi\| \, \|h\|.$$

Проверим, что линеал $\mathrm{ran}(X)$ замкнут в $\mathcal{H}$. Пусть последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(X)$ такая, что $\{X\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является $\|\cdot\|$-последовательностью Коши в $\mathrm{ran}(X)$. Тогда $X\psi_n \to f \in \mathcal{H}$ при $n \to \infty$. Так как $X_l^{-1}(X\psi_n) = \psi_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является $\|\cdot\|$-последовательностью Коши. Существует вектор $\psi \in \mathcal{H}$ такой, что $\psi_n \to \psi$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\psi_n \to \psi$ и $X\psi_n \to f$ при $n \to \infty$. Поскольку график $\Gamma(X) = \{(g, Xg) : \ g \in \mathcal{D}(X)\}$ является $\|\cdot\|$-замкнутым в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, имеем $f \in \mathcal{D}(X)$ и $f = X\psi$. По теореме Рисса о представлении линейных функционалов найдется единственный вектор $\eta \in \mathcal{H}$ такой, что $\varphi(h) = \langle \eta, h \rangle$, т. е. $\langle \xi, \zeta \rangle = \langle \eta, X\zeta \rangle$ для всех $\zeta \in \mathcal{D}(X)$. Таким образом, $\eta \in \mathcal{D}(X^*)$ и $X^*\eta = \xi$. Этим завершается доказательство теоремы. $\square$

Следствие 3. *Если оператор $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ гипонормален, то $\ker(X) \subseteq \ker(X^*)$.*

Доказательство. Пусть $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$, числа $0 < \alpha < \beta$ и вектор $\xi \in \mathcal{H}$. Из соотношений

$$\begin{aligned} A^{\alpha}\xi = 0 \quad &\Rightarrow \quad A^{\beta}\xi = A^{\beta-\alpha}(A^{\alpha}\xi) = 0; \\ A\xi = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = < A\xi, \xi > = < A^{1/2}\xi, A^{1/2}\xi > = \|A^{1/2}\xi\|^2 \end{aligned}$$

следует $\ker(A^q) = \ker(A)$ для всех $q > 0$. Поэтому

$$\ker(X) = \ker(|X|) = \ker(|X|^2) \subseteq \ker(|X^*|^2) = \ker(|X^*|) = \ker(X^*).$$

$\square$

Если когипонормальный оператор $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ имеет левый обратный в *-алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$, то X обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$ [9, следствие 11]. Более того, если $X_l^{-1} \in \mathcal{M}$, то X обратим в $\mathcal{M}$, т. е. существует оператор $X^{-1} \in \mathcal{M}$, см. доказательство теоремы 2 в [9].

Следующее утверждение обобщает классическую теорему Путнама для ограниченного гипонормального оператора [2] (см. также [3, задача 188]) на случай τ-измеримого неограниченного гипонормального оператора.

Теорема 4. *Положительный самокоммутатор $A^*A - AA^*$ $(A \in S(\mathcal{M}, \tau))$ не может иметь обратного в $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Если $\tau(I) < +\infty$, то каждый гипонормальный (или когипонормальный) оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ является нормальным, т. е. $A^*A - AA^* = 0$, см. [10, следствие 2.6]. Осталось рассмотреть случай $\tau(I) = +\infty$. Пусть, напротив, $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ обладает обратным в $\mathcal{M}$. Тогда $A^*A - AA^* \ge \varepsilon I$ для некоторого числа $\varepsilon > 0$. Для каждого числа

$t > 0$ имеем

$$\mu(t; AA^*) = \mu(t; |A^*|^2) = \mu(t; |A^*|)^2 = \mu(t; |A|)^2 = \mu(t; |A|^2) = \mu(t; A^*A)$$
$$\geq \mu(t; AA^* + \varepsilon I) \geq \mu(t; AA^*)$$

в силу пп. (iv) и (iii) леммы 1. Следовательно,

$$\mu(t; AA^* + \varepsilon I) = \mu(t; AA^*) \ \text{ для всех } \ t > 0.$$

С другой стороны, поскольку $AA^* \neq 0$ и $\varepsilon I \geq \lim\limits_{t \to +\infty} \mu(t; \varepsilon I) \cdot I = \varepsilon I$, в силу [11, предложение 2.2] найдется такое число $s > 0$, что

$$\mu(s; AA^*) < \mu(s; AA^* + \varepsilon I).$$

Получили противоречие. □

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\tau = \mathrm{tr}$, пространство $\mathcal{H}$ сепарабельно и $\dim \mathcal{H} = +\infty$, то оператор $X \in \mathcal{M}$ является коммутатором $\Leftrightarrow$ X не представляется в виде суммы $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор $K \in \mathcal{M}$ вполне непрерывен [12, теорема 3], [3, следствие из задачи 182].

Теорема 5. *Пусть $\tau(I) = +\infty$, операторы $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $A = A^3$. Тогда коммутатор $[A, B]$ не может иметь вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор $K \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$.*

Доказательство. Предположим, что

$$AB - BA = \lambda I + K \tag{2}$$

с некоторыми $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $K \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда $A, B \notin S_0(\mathcal{M}, \tau)$. Умножив обе части равенства (2) справа на оператор A, получим

$$ABA = \lambda A + BA^2 + KA. \tag{3}$$

Умножив обе части равенства (2) слева на оператор A, имеем

$$ABA = -\lambda A + A^2 B - AK. \tag{4}$$

Вычитая почленно (4) из (3), получим

$$2\lambda A = A^2 B - BA^2 - KA - AK. \tag{5}$$

Пусть $A = P - Q$ – представление трипотента A [13, предложение 1] с $P = P^2$, $Q = Q^2$ из $S(\mathcal{M}, \tau)$ и $PQ = QP = 0$. Тогда $A^2 = P + Q$ является идемпотентом и (5) перепишется в виде

$$2\lambda(P - Q) = (P + Q)B - B(P + Q) - K(P - Q) - (P - Q)K. \tag{6}$$

Умножив обе части равенства (6) слева и справа на идемпотент P, получим $2\lambda P = -2PKP \in S_0(\mathcal{M},\tau)$, т.е. $P \in S_0(\mathcal{M},\tau)$. Умножив обе части равенства (6) слева и справа на идемпотент Q, имеем $-2\lambda Q = 2QKQ \in S_0(\mathcal{M},\tau)$, т.е. $Q \in S_0(\mathcal{M},\tau)$. Следовательно, $A = P - Q \in S_0(\mathcal{M},\tau)$. Получили противоречие. □

Напомним следствие 3.10 из [1]: “Пусть оператор $A \in S(\mathcal{M},\tau)$ и $A = A^2$. Если A гипонормален или когипонормален, то A нормален, тем самым $A \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$”. Приведем здесь прямое доказательство этого утверждения. Заметим, что если $A \in S(\mathcal{M},\tau)$, то $A = A^2$ тогда и только тогда, когда $A = |A^*|\,|A|$, см. [1, теорема 3.3]. Для гипонормального оператора A имеем

$$\begin{aligned}|A|^2 = A^*A = |A|\,|A^*| \cdot |A^*|\,|A| = |A| \cdot AA^* \cdot |A| \le |A| \cdot A^*A \cdot |A|\\ = |A| \cdot |A|^2 \cdot |A| = |A|^4\end{aligned}$$

и $|A|^2 \le |A|^4$. Поэтому $|A| \le |A|^2$ и для всех чисел $t > 0$

$$\mu(t;A) = \mu(t;|A|) \le \mu(t;|A|^2) = \mu(t;|A|)^2 = \mu(t;A)^2$$

в силу пп. (i) и (iv) леммы 1. Следовательно, $\mu(t;A) \in \{0\}\bigcup[1,+\infty)$ для всех $t > 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}|A^*|^2 = AA^* = |A^*|\,|A| \cdot |A|\,|A^*| = |A^*| \cdot A^*A \cdot |A^*| \ge |A^*| \cdot AA^* \cdot |A^*|\\ = |A^*| \cdot |A^*|^2 \cdot |A^*| = |A^*|^4\end{aligned}$$

и $|A^*|^2 \ge |A^*|^4$. Поэтому $|A^*| \ge |A^*|^2$ и для всех чисел $t > 0$

$$\mu(t;A) = \mu(t;A^*) = \mu(t;|A^*|) \ge \mu(t;|A^*|^2) = \mu(t;|A^*|)^2 = \mu(t;A^*)^2 = \mu(t;A)^2$$

в силу пп. (i) и (iv) леммы 1. Следовательно, $\mu(t;A) \in [0,1]$ для всех $t > 0$.

Таким образом, $\mu(t;A) \in \{0,1\}$ для всех $t > 0$ и в силу п. (v) леммы 1 получаем $\|A\| \le 1$. Следовательно, либо $A = 0$, либо $\|A\| = 1$. Поэтому $A \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$.

Для когипонормального оператора $A = A^2$ заметим, что оператор $A^* = (A^*)^2$ гипонормален.

Список литературы

[1] А. М. Бикчентаев, *К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **98** (3), 337–348 (2015).
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10638

[2] C. R. Putnam, *On commutators of bounded matrices*, Amer. J. Math. **73** (1), 127–131 (1951).
DOI: https://doi.org/10.2307/2033033

[3] П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, М., 1970.

[4] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 124. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-6188-9

[5] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* II. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-10451-4

[6] T. Fack, H. Kosaki, *Generalized s-numbers of τ-measurable operators*, Pacific J. Math. **123** (2), 269–300 (1986).
URL: https://projecteuclid.org/journals/pacific-journal-of-mathematics/volume-123/issue-2/Generalized-s-numbers-of-tau-measurable-operators/pjm/1102701004.full

[7] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.

[8] F. J. Yeadon, *Convergence of measurable operators*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **74** (2), 257–268 (1973).
DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004100048052

[9] А. М. Бикчентаев, *Существенно обратимые измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана, и коммутаторы*, Сиб. матем. журн. **63** (2), 272–282 (2022).
DOI: https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.203

[10] А. М. Бикчентаев, *О нормальных τ-измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **96** (3), 350–360 (2014).
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10311

[11] V. I. Chilin, A. V. Krygin, Ph. A. Sukochev, *Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators*, Integral Equat. Operator Theory **15** (2), 186–226 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01204237

[12] A. Brown, C. Pearcy, *Structure of commutators of operators*, Ann. Math. **82** (1), 112–127 (1965).
DOI: https://doi.org/10.2307/1970564

[13] A. M. Bikchentaev, R. S. Yakushev, *Representation of tripotents and representations via tripotents*, Linear Algebra Appl. **435** (9), 2156–2165 (2011).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.003

Айрат Мидхатович Бикчентаев
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Volume 1, Issue 2
pp. 3–11 (2023)

UDC 517.983, 517.986
MSC 46L10, 46L51

Concerning the theory of τ-measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra. II

A.M. Bikchentaev

Abstract. Let a von Neumann algebra $\mathcal{M}$ of operators act on a Hilbert space $\mathcal{H}$, let τ be a faithful normal semifinite trace on $\mathcal{M}$. Let $S(\mathcal{M},\tau)$ be the *-algebra of all τ-measurable operators. Assume that $X, Y \in S(\mathcal{M},\tau)$. We have (i) if $|Y| \leq |X|$ then $\ker(X) \subset \ker(Y)$; (ii) if X is left invertible with $X_l^{-1} \in \mathcal{M}$ then $\mathrm{ran}(X^*) = \mathcal{H}$. The following generalizes of the Putnam theorem (1951), see also Problem 188 in the book (Halmos P. R. A Hilbert space problem book. D. van Nostrand company, inc., London, 1967): A positive selfcommutator $A^*A - AA^*$ $(A \in S(\mathcal{M},\tau))$ cannot have the inverse in $\mathcal{M}$. Let I be the unit of the algebra $\mathcal{M}$ and $\tau(I) = +\infty$, let $A, B \in S(\mathcal{M},\tau)$ and $A = A^3$. Then the commutator $[A,B]$ cannot have a form $\lambda I + K$, where $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ and an operator $K \in S(\mathcal{M},\tau)$ is τ-compact.

Keywords: Hilbert space, linear operator, von Neumann algebra, normal trace, measurable operator, invertibility, commutator.

References

[1] A. M. Bikchentaev, *Concerning the theory of τ-measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra*, Math. Notes **98** (3), 382–391 (2015).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434615090035

[2] C. R. Putnam, *On commutators of bounded matrices*, Amer. J. Math. **73** (1), 127–131 (1951).
DOI: https://doi.org/10.2307/2033033

[3] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Princeton, N.J., 1967.

[4] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 124. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-6188-9

[5] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* II. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-10451-4

Acknowledgements. The work is performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2023-944).

Received: 08 September 2022. Accepted: 11 May 2023. Published: 30 June 2023.

[6] T. Fack, H. Kosaki, *Generalized s-numbers of τ-measurable operators*, Pacific J. Math. **123** (2), 269–300 (1986).
URL: https://projecteuclid.org/journals/pacific-journal-of-mathematics/volume-123/issue-2/Generalized-s-numbers-of-tau-measurable-operators/pjm/1102701004.full

[7] S. G. Krein, Ju. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Translations of Mathematical Monographs **54**, AMS, Providence R.I., 1982.

[8] F. J. Yeadon, *Convergence of measurable operators*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **74** (2), 257–268 (1973).
DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004100048052

[9] A. M. Bikchentaev, *Essentially invertible measurable invertible operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra and commutators*, Siberian Math. J. **63** (2), 224–232 (2022).
DOI: https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.203

[10] A. M. Bikchentaev, *On normal τ-measurable operators affiliated with semifinite von Neumann algebras*, Math. Notes, **96** (3), 332–341 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434614090053

[11] V. I. Chilin, A. V. Krygin, Ph. A. Sukochev, *Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators*, Integral Equat. Operator Theory **15** (2), 186–226 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01204237

[12] A. Brown, C. Pearcy, *Structure of commutators of operators*, Ann. Math. **82** (1), 112–127 (1965).
DOI: https://doi.org/10.2307/1970564

[13] A. M. Bikchentaev, R. S. Yakushev, *Representation of tripotents and representations via tripotents*, Linear Algebra Appl. **435** (9), 2156–2165 (2011).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.003

Airat Midkhatovich Bikchentaev
Kazan Federal University,
Volga Region Mathematical Center,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Том 1, Выпуск 2 УДК 517.555, 517.982
Стр. 12–21 (2023) MSC 42B10

Преобразования Фурье быстро убывающих функций в $\mathbb{R}^n$

И.Х. Мусин

Аннотация. По определенному семейству $\mathcal{H}$ раздельно радиальных выпуклых функций в $\mathbb{R}^n$ введены два новых пространства быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$. Одно из них – пространство $G(\mathcal{H})$ – является подпространством введенного И.М. Гельфандом и Г.Е. Шиловым пространства $S_{\alpha,A}$, где $\alpha = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n, A = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Функции второго – пространства $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ – допускают продолжение до целых функций в $\mathbb{C}^n$. Получено описание пространства таких продолжений. При дополнительных ограничениях на $\mathcal{H}$ с помощью преобразования Фурье установлен изоморфизм между пространствами $G(\mathcal{H})$ и $\mathcal{E}(\mathcal{H})$.

Ключевые слова: быстро убывающие функции, преобразование Фурье.

Введение

Пусть $\mathcal{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ – семейство выпуклых функций $h_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с $h_\nu(0) = 0$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$ выполнены условия:

i_1) $h_\nu(x) = h_\nu(|x_1|, \dots, |x_n|),\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

i_2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$;

i_3) для любого $M > 0$ существует число $A_{\nu,M} > 0$ такое, что

$$h_\nu(x) \le \sum_{1\le j\le n: x_j\ne 0} x_j \ln \frac{x_j}{M} + A_{\nu,M},\ x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n;$$

i_4) найдется число $b_\nu > 0$, что $h_\nu(x + y) \le h_{\nu+1}(x) + b_\nu,\ x \in [0, \infty)^n, y \in [0, 1]^n$;

i_5) сходится ряд $\sum\limits_{|\alpha|\ge 0} e^{h_\nu(\alpha) - h_{\nu+1}(\alpha)}$.

Нетрудно показать, что каждая функция h_ν неотрицательна в $\mathbb{R}^n$, а ее сужение на $[0, \infty)^n$ не убывает по каждой переменной.

Для любых $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ определим нормированное пространство

$$G_m(h_\nu) = \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{m,h_\nu} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n, \beta\in\mathbb{Z}_+^n, \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n : |\alpha|\le m}} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{\beta! e^{-h_\nu(\beta)}} < \infty \right\}.$$

Поступила: 15.09.2022. Принята: 11.05.2023. Опубликована: 30.06.2023.

Отметим, что пространство $G_{m+1}(h_\nu)$ непрерывно вложено в $G_m(h_\nu)$, а пространство $\bigcap\limits_{m=0}^{\infty} G_m(h_{\nu+1})$ непрерывно вложено в $\bigcap\limits_{m=0}^{\infty} G_m(h_\nu)$ (благодаря условию i_4)). Положим $G(\mathcal{H}) = \bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=0}^{\infty} G_m(h_\nu)$. Таким образом, пространство $G(\mathcal{H})$ состоит из функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которых при любых $\nu \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ найдется число $C_{\nu,\alpha} > 0$ такое, что

$$|x^\beta (D^\alpha f)(x)| \le C_{\nu,\alpha} \beta! e^{-h_\nu(\beta)},\ x \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Из этого неравенства с учетом условия i_2) следует, что для каждой функции $f \in G(\mathcal{H})$ при любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\varepsilon > 0$ можно найти число $c_{\varepsilon,\alpha}(f) > 0$ такое, что

$$|x^\beta (D^\alpha f)(x)| \le c_{\varepsilon,\alpha}(f) \varepsilon^{|\beta|} \beta!,\ x \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Эта оценка означает, что $G(\mathcal{H})$ – подкласс введенного в [1, §9] класса функций $S_{\alpha,A}$, где $\alpha = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n, A = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Наделим $G(\mathcal{H})$ топологией, определяемой семейством норм $\| \cdot \|_{m,h_\nu}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$).

Основная цель работы – найти условия на семейство $\mathcal{H}$, позволяющие получить удобное для применений в теории дифференциальных уравнений в частных производных и теории псевдодифференциальных операторов описание пространства преобразований Фурье функций из $G(\mathcal{H})$.

Введем обозначения. Для $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ пусть $\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, $\|u\|$ – евклидова норма u.

Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ пусть

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,\ \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},\ z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n},\ D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ обозначение $\alpha \le \beta$ означает, что $\alpha_j \le \beta_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$). В этом случае $C_\beta^\alpha := \prod\limits_{j=1}^{n} C_{\beta_j}^{\alpha_j}$.

Для $t \ge 0$ $t^+ = \max(t, 1)$, $\ln^+ t = 0$ при $t \in [0, 1)$ и $\ln^+ t = \ln t$ при $t \in [1, \infty)$.

s_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+^n := [0, \infty)^n$.

Через $H(\mathbb{C}^n)$ обозначаем пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$.

Преобразование Юнга–Фенхеля функции $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ есть функция $g^* : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, определенная по правилу $g^*(x) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle - g(y))$.

Определим преобразование Фурье функции f из класса Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\langle x, \xi\rangle}\, d\xi,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\mathcal{F}$ – линейное преобразование, действующее по правилу: $f \in G(\mathcal{H}) \to \hat{f}$.

По $\nu \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ введем пространство

$$\mathcal{E}_m(h_\nu) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \rho_{m,\nu}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{(1+\|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)|}{\alpha! e^{-h_\nu(\alpha)}} < \infty \right\}.$$

Положим $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} \mathcal{E}_m(h_\nu)$. Наделим $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ счетно-нормированной топологией, определяемой семейством норм $\rho_{m,\nu}$ $(m \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N})$.

Отметим, что, благодаря условию i_2), для любой функции $f \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ по произвольно взятому $\varepsilon > 0$ можно найти число $c_\varepsilon(f) > 0$ такое, что

$$|(D^\alpha f)(x)| \le c_\varepsilon(f) \varepsilon^{|\alpha|} \alpha!, \ x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Поэтому f допускает (единственное) продолжение до целой функции в $\mathbb{C}^n$. Через F_f обозначим указанное продолжение, а через $\mathcal{A}$ – отображение $f \in \mathcal{E}(\mathcal{H}) \to F_f$.

Для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ определим функцию φ_ν в $\mathbb{R}^n$, положив

$$\varphi_\nu(x) = h_\nu^*(\ln^+ |x_1|, \dots, \ln^+ |x_n|), \ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Она принимает конечные значения, непрерывна в $\mathbb{R}^n$, ее сужение на $[0,\infty)^n$ не убывает по каждой переменной. В силу условия i_3) на $\mathcal{H}$ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\varphi_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$. Кроме того, благодаря условию i_5), $\lim\limits_{|\alpha| \to +\infty} (h_{\nu+1}(\alpha) - h_\nu(\alpha)) = +\infty$. Отсюда, пользуясь раздельной радиальностью функций h_ν, тем, что сужение на $[0,\infty)^n$ функций h_ν не убывает по каждой переменной, и условием i_4), получим $\lim\limits_{x \to \infty} (h_{\nu+2}(x) - h_\nu(x)) = +\infty$. Последнее в сочетании с условием i_2) влечет, что $\lim\limits_{x \to \infty} (h_\nu^*(x) - h_{\nu+2}^*(x)) = +\infty$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to \infty} (\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+2}(x)) = +\infty$. Далее, для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ и каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ введем пространство

$$E_m(\varphi_\nu) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : p_{\nu,m}(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|(1+\|z\|)^m}{e^{\varphi_\nu(Im\, z)}} < \infty \right\}.$$

Пусть $\Phi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ и $E(\Phi) = \bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} E_m(\varphi_\nu)$. Наделим $E(\Phi)$ счетно-нормированной топологией, определяемой семейством норм $p_{\nu,m}$ $(m \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N})$.

Основные результаты данной работы представлены в виде двух теорем, доказанных в разделах 2 и 3. При этом в теореме 2 вводится еще одно условие на семейство $\mathcal{H}$, а именно:

i_6) для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует число $d_\nu > 0$ такое, что

$$h_{\nu+1}(x) - h_\nu(x) \ge 2 \sum_{j=1}^n \ln(1 + x_j) - d_\nu, \ x = (x_1, \dots, x_n) \in [0,\infty)^n.$$

Очевидно, выполнение условия i_6) гарантирует выполнение условия i_5).

Теорема 1. *Отображение $\mathcal{A}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ и $E(\Phi)$.*

Теорема 2. *Пусть семейство $\mathcal{H}$ удовлетворяет условию i_6). Тогда отображение $\mathcal{AF}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $G(\mathcal{H})$ и $E(\Phi)$.*

1. Вспомогательная лемма

Лемма 3. *Для любого $\nu \in \mathbb{N}$*

$$h_\nu^*(x) \geq h_{\nu+1}^*(x) + \sum_{j=1}^{n} x_j - b_\nu,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n,$$

где b_ν то же, что и в условии i_4).

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}_+^n$. Обозначим вектор $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ через a. Тогда

$$\begin{aligned} h_\nu^*(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle - h_\nu(y)) = \sup_{y \in \mathbb{R}_+^n} (\langle x, y\rangle - h_\nu(y)) \\ &\geq \sup_{y \geq a} (\langle x, y\rangle - h_\nu(y)) = \sup_{y \in \mathbb{R}_+^n} (\langle x, y + a\rangle - h_\nu(y + a)). \end{aligned}$$

Далее, пользуясь условием i_4) на $\mathcal{H}$, имеем

$$\begin{aligned} h_\nu^*(x) &\geq \langle x, a\rangle + \sup_{y \in \mathbb{R}_+^n} (\langle x, y\rangle - h_{\nu+1}(y)) - b_\nu \\ &= \langle x, a\rangle + \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle - h_{\nu+1}(y)) - b_\nu = h_{\nu+1}^*(x) + \sum_{j=1}^{n} x_j - b_\nu. \end{aligned}$$

□

Следствие 4. *Для любых $\nu \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*

$$\varphi_{\nu+1}(x) + \sum_{j=1}^{n} \ln(1 + |x_j|) \leq \varphi_\nu(x) + r_\nu,$$

где $r_\nu = b_\nu + n \ln 2$.

Следствие 5. *Для любых $\nu \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\varphi_{\nu+1}(x) + \ln(1 + \|x\|) \leq \varphi_\nu(x) + r_\nu,$$

где r_ν то же, что и в следствии 4.

2. Доказательство теоремы 1

Вначале покажем, что линейное отображение $\mathcal{A}$ действует из $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ в $E(\Phi)$. Пусть $f \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$. Тогда для любых $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$

$$(1+\|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| \le \rho_{m,\nu}(f)\alpha! e^{-h_\nu(\alpha)}, \ x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Пользуясь этим неравенством и разложением F_f в ряд Тейлора в точке $x \in \mathbb{R}^n$, имеем для любого $z = x + iy$ $(y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}(1+\|z\|)^m |F_f(z)| &\le \sum_{|\alpha|\ge 0} \frac{1}{\alpha!}(1+\|x\|)^m (1+\|y\|)^m \prod_{j=1}^n (|y_j|^+)^{\alpha_j} |(D^\alpha f)(x)| \\ &\le \rho_{m,\nu+m+1}(f)(1+\|y\|)^m \sum_{|\alpha|\ge 0} e^{-h_{\nu+m+1}(\alpha)} \prod_{j=1}^n (|y_j|^+)^{\alpha_j}.\end{aligned}$$

Обозначив сумму ряда $\sum\limits_{|\alpha|\ge 0} e^{h_{\nu+m}(\alpha)-h_{\nu+m+1}(\alpha)}$ через $B_{\nu,m}$, продолжим оценку:

$$\begin{aligned}(1+\|z\|)^m |F_f(z)| &\le B_{\nu,m}\rho_{m,\nu+m+1}(f)(1+\|y\|)^m \sup_{|\alpha|\ge 0} \frac{\prod\limits_{j=1}^n (|y_j|^+)^{\alpha_j}}{e^{h_{\nu+m}(\alpha)}} \\ &\le B_{\nu,m}\rho_{m,\nu+m+1}(f)(1+\|y\|)^m e^{\sup\limits_{t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}_+^n}(t_1 \ln^+|y_1| + \dots + t_n \ln^+|y_n| - h_{\nu+m}(t))} \\ &= B_{\nu,m}\rho_{m,\nu+m+1}(f)(1+\|y\|)^m e^{\sup\limits_{t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n}(t_1 \ln^+|y_1| + \dots + t_n \ln^+|y_n| - h_{\nu+m}(t))}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(1+\|z\|)^m |F_f(z)| &\le B_{\nu,m}\rho_{m,\nu+m+1}(f)(1+\|y\|)^m e^{h^*_{\nu+m}(\ln^+|y_1|,\dots,\ln^+|y_n|)} \\ &= B_{\nu,m}\rho_{m,\nu+m+1}(f)(1+\|y\|)^m e^{\varphi_{\nu+m}(\operatorname{Im} z)}.\end{aligned}$$

Из этого неравенства, воспользовавшись следствием 5, получим

$$(1+\|z\|)^m |F_f(z)| \le K_{\nu,m}\rho_{m,\nu+m+1}(f) e^{\varphi_\nu(\operatorname{Im} z)},$$

где $K_{\nu,m}$ – некоторое положительное число. Отсюда

$$p_{\nu,m}(F_f) \le K_{\nu,m}\rho_{m,\nu+m+1}(f), \ f \in \mathcal{E}(\mathcal{H}). \tag{1}$$

Таким образом, ввиду произвольности $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ получаем $F_f \in E(\Phi)$.

Отметим, что в силу неравенства (1) линейное отображение $\mathcal{A}$ непрерывно. Кроме того, ясно, что, $\mathcal{A}$ есть взаимно однозначное отображение из $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ в $E(\Phi)$.

Покажем, что $\mathcal{A}$ сюръективно. Пусть $F \in E(\Phi)$. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in$

$\mathbb{Z}_+^n$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ произвольны. Для $R = (R_1, \ldots, R_n)$, где $R_1, \ldots, R_n$ – положительные числа, пусть $L_R(x) = \{\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : |\zeta_j - x_j| = R_j, j = 1, \ldots, n\}$. Тогда

$$(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha F)(x)| \le \frac{\alpha!}{(2\pi)^n} \int\limits_{L_R(x)} \frac{(1 + \|x - \zeta\|)^m (1 + \|\zeta\|)^m |F(\zeta)|\, |d\zeta|}{|\zeta_1 - x_1|^{\alpha_1 + 1} \cdots |\zeta_n - x_n|^{\alpha_n + 1}}$$
$$\le \frac{\alpha! p_{\nu+m,m}(F)(1 + \|R\|)^m e^{\varphi_{\nu+m}(R)}}{R^\alpha}.$$

Здесь при получении заключительной оценки воспользовались тем, что сужение функции $\varphi_{\nu+m}$ на $[0, \infty)^n$ не убывает по каждой переменной. Из нее с помощью следствия 5 получим, что при некотором $M_{\nu,m} > 0$

$$(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha F)(x)| \le M_{\nu,m} \alpha! p_{\nu+m,m}(F) \frac{e^{\varphi_\nu(R)}}{R^\alpha}.$$

Так как положительные числа $R_1, \ldots, R_n$ были произвольными, то

$$(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha F)(x)| \le M_{\nu,m} \alpha! p_{\nu+m,m}(F) \inf_{R \in (0,\infty)^n} \frac{e^{\varphi_\nu(R)}}{R^\alpha}$$
$$= M_{\nu,m} \alpha! p_{\nu+m,m}(F) \exp\left(- \sup_{r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n} \left(\langle \alpha, r \rangle - \varphi_\nu\left(e^{r_1}, \ldots, e^{r_n}\right)\right)\right)$$
$$\le M_{\nu,m} \alpha! p_{\nu+m,m}(F) \exp\left(- \sup_{r \in \mathbb{R}_+^n} \left(\langle \alpha, r \rangle - \varphi_\nu\left(e^{r_1}, \ldots, e^{r_n}\right)\right)\right)$$
$$= M_{\nu,m} \alpha! p_{\nu+m,m}(F) e^{- \sup\limits_{r \in \mathbb{R}_+^n} (\langle \alpha, r \rangle - h_\nu^*(r))} = M_{\nu,m} \alpha! p_{\nu+m,m}(F) e^{- \sup\limits_{r \in \mathbb{R}^n} (\langle \alpha, r \rangle - h_\nu^*(r))}.$$

Отсюда, пользуясь формулой обращения преобразования Юнга–Фенхеля [2], получим

$$(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha F)(x)| \le M_{\nu,m} p_{\nu+m,m}(F) \alpha! \exp(-h_\nu(\alpha)).$$

Это означает, что

$$\rho_{m,\nu}(F_{|\mathbb{R}^n}) \le M_{\nu,m} p_{\nu+m,m}(F). \tag{2}$$

Следовательно, $F_{|\mathbb{R}^n} \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$. Очевидно, $\mathcal{A}(F_{|\mathbb{R}^n}) = F$, а неравенство (2) гарантирует непрерывность отображения $\mathcal{A}^{-1}$. Таким образом, отображение $\mathcal{A}$ устанавливает изоморфизм между $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ и $E(\Phi)$. □

3. Доказательство теоремы 2

Покажем вначале, что отображение $\mathcal{F}$ действует из $G(\mathcal{H})$ в $\mathcal{E}(\mathcal{H})$. Пусть $g \in G(\mathcal{H})$. Тогда для любых $m \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{N}$ и всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \le m$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x^\beta (D^\alpha g)(x)| \le \|g\|_{m, h_{\nu+1}} \beta! e^{-h_{\nu+1}(\beta)}. \tag{3}$$

Покажем, что $\hat{g} \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$. Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ произвольны. Положим $\kappa_s := \min(\alpha_s, \beta_s)$ для $s = 1, \ldots, n$ и $\kappa := (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$. Тогда

$$(i\xi)^\beta (D^\alpha \hat{g})(\xi) = \frac{(-1)^{|\beta|}}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n : j \le \kappa} C_\beta^j (D^{\beta - j} g)(x) (D^j (ix)^\alpha) e^{i\langle x, \xi \rangle}\, dx.$$

Следовательно,

$$|\xi^\beta (D^\alpha \hat{g})(\xi)| \le \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n : j \le \kappa} C_\beta^j \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(D^{\beta - j} g)(x)||D^j(x^\alpha)|\, dx.$$

В работе [3] доказано, что если $u \in S(\mathbb{R}^n)$, то при любых $\alpha, j \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |D^j(x^\alpha)||u(x)|\, dx \le \sqrt{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha||(D^j u)(x)|\, dx.$$

Пользуясь этим неравенством, имеем

$$|\xi^\beta (D^\alpha \hat{g})(\xi)| \le \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n : j \le \kappa} C_\beta^j \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta g)(x)|\, dx.$$

Далее, действуя, как и в [3, с. 371], и пользуясь по ходу неравенством (3) и тем, что функция h_ν не убывает по каждой переменной на $[0, \infty)^n$, получим

$$|\xi^\beta (D^\alpha \hat{g})(\xi)| \le \frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{\pi})^n} 2^{|\beta|} \|g\|_{|\beta|, h_{\nu+1}} (\alpha + \omega)! e^{-h_{\nu+1}(\alpha)},$$

где $\omega = (2, \ldots, 2) \in \mathbb{R}^n$. Отсюда, благодаря условию $i_6)$ на $\mathcal{H}$, имеем

$$|\xi^\beta (D^\alpha \hat{g})(\xi)| \le C_1 \|g\|_{|\beta|, h_{\nu+1}} 2^{|\beta|} \alpha! e^{-h_\nu(\alpha)},$$

где $C_1 = \dfrac{(\sqrt{2})^{n+1} e^{d_\nu}}{(\sqrt{\pi})^n}$. Но тогда для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ можно найти постоянную $C_2 > 0$ такую, что

$$(1 + \|\xi\|)^k |(D^\alpha \hat{g})(\xi)| \le C_2 \|g\|_{k, h_{\nu+1}} \alpha! e^{-h_\nu(\alpha)}, \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Следовательно, $\rho_{k,\nu}(f) \le C_2 \|g\|_{k, h_\nu}, \ g \in G(\mathcal{H})$. Это неравенство означает, что линейное отображение $\mathcal{F}$ действует из $G(\mathcal{H})$ в $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ и что $\mathcal{F}$ непрерывно. Очевидно, $\mathcal{F}$ действует из $G(\mathcal{H})$ в $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ взаимно однозначно. Отсюда и по теореме 1 следует, что линейное отображение $\mathcal{A}\mathcal{F}$ действует из $G(\mathcal{H})$ в $E(\Phi)$, является взаимно однозначным и непрерывным.

Покажем теперь, что отображение $\mathcal{A}\mathcal{F} : G(\mathcal{H}) \to E(\Phi)$ сюръективно. Пусть $F \in E(\Phi)$. Положим $f = \mathcal{A}^{-1}(F)$. Отметим, что $f = F_{|\mathbb{R}^n}$. Определим функцию g в $\mathbb{R}^n$ по правилу:

$g(x) = \hat{f}(-x),\ x \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, для любого $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$g(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(\zeta) e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\ d\xi,\ \zeta = \xi + i\eta.$$

Для любых α, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $x, \eta \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$x^\beta (D^\alpha g)(x) = \frac{x^\beta}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(\zeta)(-i\zeta)^\alpha e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\ d\xi,\ \zeta = \xi + i\eta.$$

Из этого равенства вытекает

$$\begin{aligned} |x^\beta (D^\alpha g)(x)| &\le \frac{|x^\beta|}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} |F(\zeta)| \|\zeta\|^{|\alpha|} e^{\langle x,\eta\rangle}\ d\xi \\ &\le \frac{|x^\beta|}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} |F(\zeta)| (1 + \|\zeta\|)^{n+|\alpha|+1} e^{\langle x,\eta\rangle}\ \frac{d\xi}{(1 + \|\xi\|)^{n+1}}\ . \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|x^\beta (D^\alpha g)(x)| \le \mu_n p_{\nu,n+|\alpha|+1}(F) e^{\varphi_\nu(\eta)} e^{\langle x,\eta\rangle} |x^\beta|, \tag{4}$$

где $\mu_n = \dfrac{s_n}{(\sqrt{2\pi})^n} = \dfrac{n}{(\sqrt{2})^n \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$. Полагая $\eta = 0$ в (4) для $|\beta| = 0$, имеем

$$|(D^\alpha g)(x)| \le \mu_n e^{\varphi_\nu(0)} p_{\nu,n+|\alpha|+1}(F). \tag{5}$$

Далее рассмотрим случай, когда $|\beta| > 0$. Для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ определим точку $\theta(x) \in \mathbb{R}^n$ с координатами θ_j по правилу: $\theta_j = \dfrac{x_j}{|x_j|}$, если $x_j \ne 0$, и $\theta_j = 0$, если $x_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Пусть $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, причем $t_1 > 0, \ldots, t_n > 0$. Положим $\eta = -(\theta_1 t_1, \ldots, \theta_n t_n)$. Тогда из (4) получим

$$\begin{aligned} |x^\beta (D^\alpha g)(x)| &\le \mu_n p_{\nu,n+|\alpha|+1}(F) \frac{e^{\varphi_\nu(t)} |x^\beta|}{\prod\limits_{j=1}^n e^{t_j |x_j|}} \le \mu_n p_{\nu,n+|\alpha|+1}(F) e^{\varphi_\nu(t)} \prod_{j=1}^n \sup_{r_j > 0} \frac{r_j^{\beta_j}}{e^{t_j r_j}} \\ &= \mu_n p_{\nu,n+|\alpha|+1}(F) \exp\left(\varphi_\nu(t) + \sum_{j=1}^n \sup_{r_j > 0} (-t_j r_j + \beta_j \ln r_j)\right) \\ &= \mu_n p_{\nu,n+|\alpha|+1}(F) \exp\left(\varphi_\nu(t) + \sum_{j=1}^n (\beta_j \ln^+ \beta_j - \beta_j) - \sum_{j=1}^n \beta_j \ln t_j\right). \end{aligned}$$

Значит,

$$|x^\beta (D^\alpha g)(x)| \le \mu_n p_{\nu,n+|\alpha|+1}(F) \prod_{j=1}^n \beta_j!\, e^{\inf\limits_{t=(t_1,\ldots,t_n) \in [1,\infty)^n} (\varphi_\nu(t) - \sum\limits_{j=1}^n \beta_j \ln t_j)}.$$

Элементарные преобразования и выпуклость h_ν (пользуемся формулой обращения преобразования Юнга–Фенхеля [2]) приводят к оценке

$$|x^\beta (D^\alpha g)(x)| \le \mu_n p_{\nu,n+|\alpha|+1}(F)\beta! e^{-h_\nu(\beta)}. \tag{6}$$

Из неравенств (5) и (6) для $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|x^\beta (D^\alpha g)(x)| \le \mu_n p_{\nu,n+|\alpha|+1}(F)\beta! e^{-h_\nu(\beta)}.$$

Следовательно, для любого $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\max_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \beta\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{|x^\beta (D^\alpha g)(x)|}{\beta! e^{-h_\nu(\beta)}} \le \mu_n p_{\nu,n+m+1}(F), \ F \in E(\Phi).$$

Это означает, что для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ имеем $\|g\|_{m,h_\nu} \le \mu_n p_{\nu,n+m+1}(F)$. Таким образом, $g \in G(\mathcal{H})$ и для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ имеем $\|\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A}^{-1}(F)\|_{m,h_\nu} \le \mu_n p_{\nu,n+m+1}(F), \ F \in E(\Phi)$. Отсюда следует, что линейное отображение $\mathcal{AF}$ сюръективно, линейное отображение $(\mathcal{AF})^{-1}$ действует из $E(\Phi)$ в $G(\mathcal{H})$ и является непрерывным. Таким образом, отображение $\mathcal{AF}$ осуществляет изоморфизм между $G(\mathcal{H})$ и $E(\Phi)$. □

В заключение благодарю рецензента за ценные замечания.

Список литературы

[1] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные функции. Т. 2. Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, М., 1958.

[2] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.

[3] М.А. Соловьев, *Пространственно-подобная асимптотика вакуумных средних в нелокальной теории поля*, ТМФ **52** (3), 363–374 (1982).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tmf2559

Ильдар Хамитович Мусин
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимского федерального исследовательского центра
Российской академии наук,
ул.Чернышевского, д. 112, г. Уфа, 450008, Россия,
e-mail: musin_ildar@mail.ru

Volume 1, Issue 2
pp. 12–21 (2023)

UDC 517.555, 517.982
MSC 42B10

Fourier transforms of rapidly decreasing functions on $\mathbb{R}^n$

I.Kh. Musin

Abstract. With help of a certain family $\mathcal{H}$ of separately radial convex functions in $\mathbb{R}^n$ two new spaces of rapidly decreasing infinitely differentiable functions in $\mathbb{R}^n$ are introduced in the article. One of them, namely, the space $G(\mathcal{H})$, is a subspace of Gelfand-Shilov type space $S_{\alpha,A}$, where $\alpha = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $A = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Functions of the second space $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ admit an extension to entire functions in $\mathbb{C}^n$. A description of the space of such extensions is obtained. Under some mild additional restrictions on $\mathcal{H}$ an isomorphism between the spaces $G(\mathcal{H})$ and $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ is established via the Fourier transform.

Keywords: Rapidly decreasing functions, Fourier transform.

References

[1] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions, V. 2: Spaces of Fundamental and Generalized Functions*, AMS, Providence, R.I., 2016.

[2] R.T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, 1970.

[3] M.A. Solov'ev, *Spacelike asymptotic behavior of vacuum expectation values in nonlocal field theory*, Theoret. and Math. Phys. **52** (3), 854–862 (1982).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01038079

Il'dar Khamitovich Musin
Institute of Mathematics with Computing Centre,
Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the
Russian Academy of Sciences,
112 Chernyshevsky str., Ufa 450008, Russia,
e-mail: musin_ildar@mail.ru

Received: 15 September 2022. Accepted: 11 May 2023. Published: 30 June 2023.

Том 1, Выпуск 2
Стр. 22–34 (2023)

УДК 514.764
MSC 53-03, 53C20

Изометрические реализации плоскости Лобачевского в $R^n, n \geq 4$

И.Х. Сабитов

Аннотация. В статье, написанной на основе одноименного доклада автора на сателлит-конференции “Лобачевские чтения” (Казань, июль 2022), дается краткий обзор работ по истории и результатам исследований, посвященных представлениям полной плоскости Лобачевского в виде двумерной поверхности в многомерных евклидовых пространствах. Пока наилучшим результатом в смысле достижения минимальности размерности объемлющего пространства является теорема, утверждающая, что плоскость Лобачевского может быть погружена в R^4 в виде кусочно-аналитической поверхности с общей гладкостью класса $C^{0,1}$.

Ключевые слова: метрика и плоскость Лобачевского, существование и несуществование изометрического погружения плоскости Лобачевского в виде поверхности евклидового пространства некоторой размерности.

Введение. История вопроса и результаты

Свою геометрию Лобачевский называл «воображаемой», имея в виду *логическую* возможность рассмотрения геометрических объектов, взаимо-расположения и взаимоотношения которых связаны системой аксиом, на одну отличающейся от системы аксиом Евклида. Но он сам понимал, что нужно думать о возможности реального существования в природе или в моделях множества таких объектов, которые удовлетворяли бы его аксиомам. Его эксперименты с точными вычислениями сумм углов в треугольниках не увенчались успехом ввиду неизбежных ошибок измерений, и поэтому в его жизни этот вопрос остался нерешенным. Но в 1868 году возможность существования планиметрии, в которой сумма углов в геодезическом треугольнике была бы меньше π, была установлена Е. Бельтрами [1] на примере геометрии псевдосферы. Этот пример, однако, относился не ко всей плоскости Лобачевского, а только к некоторой ее области.

Следующий принципиально важный результат был получен в 1901 г. Д. Гильбертом [2], доказавшим, что плоскость Лобачевского в целом не может быть реализована в R^3 как некоторая регулярная поверхность. У самого Д. Гильберта этот результат получен в предположении аналитичности искомой поверхности, затем он был перенесен другими геометрами и на случай неаналитических поверхностей. Окончательное обобщение этого

Поступила: 25.11.2022. Принята: 11.05.2023. Опубликована: 30.06.2023.

результата принадлежит Н.В. Ефимову, который в 1964 г. доказал [3], что в классе C^2-гладкости в R^3 не существует полной поверхности не только с постоянной, но вообще с отделенной от нуля отрицательной кривизной (но уже в классе гладкости $C^{1,1}$ такие поверхности существуют, см. Э.Р. Розендорн (1966, [4]). Заметим, что в C^1-классе плоскость Лобачевского реализуема по теореме Нэша–Кейпера в R^3 как гладкая поверхность, но эта поверхность не имеет кривизну в обычном смысле и говорить о совпадении на ней внешней и внутренней геометрии не приходится.

Но параллельно с вопросом о существовании плоскости Лобачевского в том или ином виде в R^3 ставился и вопрос о реализации геометрии Лобачевского на поверхностях в пространствах бо́льшей размерности. По-видимому, первый результат в этом направлении принадлежит Л. Бибербаху [5], который привел явный пример такой поверхности в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Эта поверхность замечательна тем, что на ней все движения на плоскости Лобачевского реализуются движениями поверхности в самом пространстве. Но в конечных размерностях таких поверхностей не может быть, это доказано в той же работе Л. Бибербаха со ссылкой на Е. Шмидта. В частности С.Б. Кадомцев (1978, [6]) доказал, что ни в какой конечной размерности плоскость Лобачевского не может быть реализована в виде поверхности вращения с полюсом, а также в виде поверхности, допускающей параллельный перенос по себе (как, например, это можно делать на бесконечном цилиндре). Точные и более подробные ссылки на все эти результаты можно найти в работе Э.Р. Розендорна (1989, [7]).

Это значит, что изометрическое вложение или даже погружение плоскости Лобачевского в R^n, $n > 3$, надо искать в виде поверхностей сложного внешнего строения, без большой симметрии. Этим объясняется, что успешные примеры изометрических погружений плоскости Лобачевского в R^n, $n > 3$, основаны на искусном искусственном подборе элементов искомых конструкций и до сих пор ни в одной размерности нет явных примеров реализации плоскости Лобачевского в аналитическом классе гладкости. Явные конкретные продвижения по размерности и по гладкости такие – известная наименьшая размерность для вложений – это в R^6, класс гладкости C^∞ (Д. Блануша, 1955, [8]), для погружений – это в R^5, класс гладкости тоже C^∞ (Э.Р. Розендорн, 1960, [9]); с меньшей гладкостью, но в R^4 – в классе кусочно-аналитических поверхностей, а в целом класса $C^{0,1}$ – это в (1989, [10]). А в классе аналитической гладкости известно только утверждение (но без явного построения реализации) о существовании вложения плоскости Лобачевского в R^8 (М.Л. Громов, 1986, [11]).

Параллельно с изучением существования или несуществования реализации геометрии Лобачевского в целом (во всех размерностях) велись и исследования таких же вопросов относительно отдельных областей плоскости Лобачевского. Например, в 1975 г. Н.В. Ефимов доказал непогружаемость в R^3 полуплоскости Лобачевского, а Э.Г. Позняк и его ученики установили погружаемость в R^3 многих областей гиперболической плоскости, в том числе и с выходом к абсолюту. Например, это возможно для всех многоугольников с конечным числом вершин на абсолюте. Мы не ставим себе целью предложить обзор всей этой большой тематики и поэтому ограничимся представлением в конце статьи списка основных капитальных источников в отечественной литературе.

1. Различные представления метрики плоскости Лобачевского

Методы поиска поверхности с данной метрикой сильно зависят от выбранного вида представления метрики. Известно общее представление метрик постоянной кривизны любой размерности их заданием в конформных координатах в шаре соответствующей размерности. Общее их название – *каноническая* форма метрики пространств постоянной кривизны. В двумерном случае такие координаты называются еще изотермическими и в случае кривизны $K=-1$ метрика Лобачевского в канонических координатах (ξ,η) имеет вид

$$ds^2=\Lambda^2(\xi,\eta)\left(d\xi^2+d\eta^2\right)=\frac{4}{(1-\rho^2)^2}d\zeta d\bar{\zeta}, \tag{1}$$

где

$$\zeta=\xi+i\eta, \quad \rho^2=\xi^2+\eta^2, \quad (\xi,\eta)\in D:\xi^2+\eta^2<1.$$

Посмотрим, могут ли быть другие варианты для коэффициента Λ? Переходы от одних изотермических координат (ξ,η) к другим изотермическим координатам (u,v) даются голоморфными отображениями $w=w(\zeta),\zeta=\xi+i\eta,w=u+iv$, и, если при этом вид области изменения координат ζ и w один и тот же, а в нашем случае – это единичный круг, то переход будет дробно-линейным отображением, переводящим круг в круг с сохранением границы как единичной окружности. Тогда с учетом вида такого отображения $\zeta=e^{i\theta}\dfrac{w-a}{1-\bar{a}w}$ имеем $\Lambda^2(w)=\Lambda^2(\zeta(w))|\zeta'(w)|^2=\dfrac{4}{(1-r^2)^2}$, $r^2=u^2+v^2$, т. е. вид зависимости коэффициента Λ от координат не изменится.

Если же переходим к другим представлениям метрики плоскости Лобачевского, например, на верхней полуплоскости, тогда переход к соответствующей изотермической форме

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}, \ y>0,$$

дается дробно-линейным отображением вида

$$z=\frac{\bar{a}\zeta-e^{i\alpha}}{\zeta-ae^{i\alpha}}, \ \text{где } z=x+iy \text{ и } |a|<1.$$

Отсюда уже с использованием замены координат $x=u,y=e^{-t}$ можно перейти к полугеодезическим координатам (t,u) с представлением метрики Лобачевского в виде

$$ds^2=dt^2+e^{2t}du^2. \tag{2}$$

В таких же координатах есть и другие ее представления в виде

$$ds^2 = dt^2 + G^2(t)du^2, \text{ где } G(t) = \operatorname{ch} t \text{ или } G(t) = \operatorname{sh} t. \tag{3}$$

Как видим из (1), метрика плоскости Лобачевского является метрикой вращения (т. е. метрикой с локальной круговой симметрией), а такие метрики локально могут иметь в изотермических координатах несколько форм, так называемых *стандартных* представлений вида $ds^2 = \lambda^2(r)(du^2 + dv^2)$, где $r^2 = u^2 + v^2$. Действительно, в случае постоянной кривизны $K = -1$ метрика, кроме канонического представления вида (1), имеет еще три представления, получаемые при переходе от координаты $\zeta = \xi + i\eta$ к другой координате $w = u + iv$ некоторым не обязательно однолистно голоморфным отображением $w{=}w(\zeta)$ или $\zeta{=}\zeta(w)$. Выпишем соответствующие отображения и коэффициенты Λ:

первый вариант

$$\zeta = Aw^a \text{ с } a > 1, \quad \Lambda(r) = \frac{k_1 r^{a-1}}{1 - A^2 r^{2a}}, \text{ где } r^2 = u^2 + v^2,\ k_1 = 2aA;$$

второй вариант

$$w = c\exp(-\frac{1}{a_2\zeta + a_1}), \quad \Lambda(r) = \frac{1}{r(A + \ln\frac{1}{r})}, \quad A = \ln c - \frac{1}{a_1};$$

третий вариант

$$w = c\left(\frac{\zeta + A}{\zeta + \bar{A}}\right)^{1/b}, \quad A = \frac{a_1 + ib}{a_2}, \quad b = \sqrt{16a_2^2 - a_1^2}$$

$$\Lambda(r) = \frac{b\sqrt{C^2 + D^2}}{r}(C\sin(b\ln r) + D\cos(b\ln r)),$$

$$C - iD = (a_1 + ib)\exp(ib\ln c).$$

Первая форма коэффициента Λ соответствует неполной метрике, а вторая и третья описывают случаи полных двумерных метрик постоянной отрицательной кривизны. Их компактные части реализуются как известные поверхности вращения, но в целом они не реализуются даже как универсальные накрытия этих поверхностей. Подробности их описания как метрик областей плоскости Лобачевского обсуждаются в работе автора [12].

2. Вопросы изометрической реализации плоскости Лобачевского и ее областей

После того, как Бельтрами установил, что в R^3 есть поверхности, метрика которых по крайней мере локально совпадает с метрикой Лобачевского, естественно возник вопрос, какие еще области плоскости Лобачевского могут быть изометрически погружены в пространство R^3 как его поверхности. Первая такая известная нам работа принадлежит, по-видимому, Ф. Шуру [13], которая процитирована также в работах [7] и [11]. Ф. Шур доказал, что орикруг плоскости Лобачевского можно изометрически погрузить в R^3 в виде аналитической поверхности (на самом деле он доказал это в многомерном варианте как $L^n \to R^{2n-1}$, но мы приводим этот результат, как и многие другие, только в минимальной размерности). Поскольку идея его доказательства оказалась очень плодотворной, приведем его здесь.

Воспользуемся представлением метрики плоскости Лобачевского формулой (2) в полугеодезических координатах. В метрике Лобачевского в координатах по Пуанкаре в верхней полуплоскости орицикл задается уравнением $y = \mathrm{const} > 0$, а орикруг – неравенством $y \geq \mathrm{const}$. Переход к полугеодезическим координатам (u, t) имеет отрицательный якобиан, поэтому в полугеодезических координатах точки орикруга имеют координату $t \leq 0$. Ищем погружение метрики в R^3 уравнениями

$$x = \varepsilon e^t \sin\frac{u}{\varepsilon}, \quad y = \varepsilon e^t \cos\frac{u}{\varepsilon}, \quad z = z(t),$$

где функция $z(t)$ должна удовлетворять уравнению $z'(t) = \pm\sqrt{1 - \varepsilon^2 e^{2t}}$. Очевидно, при $t \leq 0$ для всех достаточно малых ε под корнем будет положительное выражение, поэтому нужная функция $z(t)$ найдется в квадратурах. Тем самым, аналитическое погружение орикруга в R^3 найдено в явном виде.

В доказательстве Шура в техническом плане содержится общая идея поиска решения задачи погружения метрик отрицательной кривизны среди сильно колеблющихся поверхностей. Именно такая идея поиска нужной поверхности и привела впоследствии Э.Г. Позняка к решению задачи изометрической реализации в R^3 метрик отрицательной кривизны. Нам неизвестно, знали ли Э.Г. Позняк и его ученики эту работу Ф. Шура, но ни в одной из их обзорных статей, включая и под совместным авторством с Е.В. Шикиным, упоминания о работе Ф. Шура нет. По-видимому, к этой идее Эдуард Генрихович пришел самостоятельно. Но вполне может быть даже, что и до Ф. Шура были работы с использованием этой идеи, и не только в задачах с отрицательной кривизной. В любом случае эта тема заслуживает интереса специалистов по истории математики.

К серии работ «с положительным» результатом относится уже упомянутая выше работа Л. Бибербаха о реализации геометрии плоскости Лобачевского в бесконечномерном гильбертовом пространстве R^∞. Строится такая реализация следующим образом. В R^∞ рассматривается поверхность S с компонентами $x_{2m-1} = \mathrm{Re}\, F_m(z)$ и $x_{2m} = \mathrm{Im}\, F_m(z)$, где функции $F_m(z) = m^{-1/2} z^m, m = 1, 2, \ldots$. Утверждается, что метрика $ds^2 = \sum_k dx_k^2$ этой поверхности оказывается совпадающей с разложением в ряд функции $\Lambda^2(\rho) = (1 - \rho^2)^{-2}$, которая соответствует метрике Лобачевского с кривизной -4. Умножением на 4 получим метрику с кривизной -1.

В той же работе Л. Бибербаха доказывается, что все внутренние движения плоскости Лобачевского (т. е. дробно-линейные преобразования круга на себя) можно реализовать движениями поверхности S, а также приводится доказательство того, что такое свойство не может быть присущим регулярным погружениям плоскости Лобачевского ни в какое конечномерное пространство. Отсюда можно сделать вывод, что искомые регулярные погружения плоскости Лобачевского в конечномерные пространства будут, скорее всего, весьма сложными по форме.

Продолжим «положительные» результаты о погружениях плоскости Лобачевского. В 50-х годах прошлого века Д. Блануша предложил новый подход к поиску погружений плоскости Лобачевского в конечномерные пространства с компонентами в виде кусочно-регулярных и ступенчатых (т. е. кусочно-постоянных) функций. Метрику Лобачевского берем в полугеодезических координатах (u, v) в виде $ds^2 = du^2 + B^2(u)dv^2$. Введем две пары функций – $\varphi_j(u) \geq 0$, $j = 1, 2$, класса C^∞ и две ступенчатые функции $\psi_j(u) > 0$. Функции φ_j подчинены условию $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$ и каждая из них имеет нуль бесконечно порядка в точках разрыва функций $\psi_j(u)$. Кроме того, вводится еще одна вспомогательная функция $f(u) > 0$ гладкости C^∞, зависящая от коэффициента $B(u)$ погружаемой метрики (при выборе $B(u) = \mathrm{ch}(u)$ можно выбрать $f(u)$ как $\mathrm{sh}(u)$). Из введенных функций составляются новые функции

$$g_j(u) = \frac{\varphi_j(u)}{\psi_j(u)} f(u), \quad j = 1, 2,$$

и функция $g(u) = (g_1'(u))^2 + (g_2'(u))^2 > 0$.

При выбранных $f(u)$ и $\varphi_j(u)$ ступенчатые функции $\psi_j > 0$ подбираем такими большими, чтобы всюду выполнялось условие

$$g(u) < 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Теперь строим погружение метрики $ds^2 = du^2 + B^2(u)dv^2$ в R^6 следующим образом. Положим

$$\begin{gathered} x_1(u, v) + ix_2(u, v) = g_1(u)e^{iv\psi_1(u)}, \\ x_3(u, v) + ix_4(u, v) = g_2(u)e^{iv\psi_2(u)}, \\ x_5 = \int_0^u \sqrt{1 - g(\tau)}d\tau, \ x_6 = u. \end{gathered}$$

Заметьте, по-прежнему работает идея Шура, только вместо малого параметра в знаменателе работает большая кусочно-постоянная функция.

За счет некоторого усложнения конструкции можно добиться уменьшения размерности объемлющего пространства и получить погружение плоскости Лобачевского в R^5 (Э.Р. Розендорн, 1960, [9]).

Следующий шаг по уменьшению размерности объемлющего пространства сделан почти через 30 лет в 1989 г. [10]. В принципе нового подхода нет, есть только техническая модификация приближения к искомому погружению и вместо гладкой поверхности ищется кусочно-аналитическая поверхность. За представление метрики Лобачевского берем ее каноническую форму

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(1 - r^2)^2}, \quad w = u + iv = re^{i\varphi} \in D : u^2 + v^2 < 1, \tag{4}$$

что соответствует выбору значения кривизны $K = -4$.

Погружение в R^4 ищется в виде обобщенной поверхности вращения с координатами

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &= F(r)e^{iP\varphi}, \quad 0 \le r < \varepsilon, \\ x_3 + ix_4 &= G(r)e^{iQ\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \end{aligned}$$

где P и Q – целочисленные кусочно-постоянные функции. Предполагая сначала, что поверхность имеет полюс в точке $(u, v) = (0, 0)$, и представляя $F(r)$ и $G(r)$ в виде $F(r) = f(r)e^{i\alpha(r)}$, $G(r) = g(r)e^{i\beta(r)}$, мы изучаем возможное локальное поведение этих функций в зависимости от предполагаемой их гладкости и доказываем такую теорему.

Теорема 1. (а) *Существует число a, $0 < a \le 1/\sqrt{3}$ такое, что круг $D_\rho : u^2 + v^2 \le \rho$ ни при каком $\rho > a$ не допускает изометрического погружения в R^4 в виде C^2-гладкой поверхности вращения с полюсом.*

(б) *Любой круг D_ρ с $\rho < 1$ допускает изометрическое вложение в R^4 в виде $C^{1,1}$-гладкой поверхности вращения с полюсом.*

(в) *Метрика (4) локально погружается в R^4 в виде аналитической поверхности вращения с полюсом.*

Что касается погружения в R^4 всего круга $D : u^2 + v^2 < 1$, то здесь мы доказываем такую теорему.

Теорема 2. *Метрика* (4) *допускает кусочно-аналитическое изометрическое погружение в R^4 в виде в целом $C^{0,1}$-гладкой обобщенной поверхности вращения с полюсом (нарушение аналитичности – в точке $r = 0$ и на счетном числе линий $r = \mathrm{const}$, на которых изменяются значения P и Q, которые обязаны быть неограниченными).*

Дополнительно доказывается, что нельзя подобрать изменения значений P и Q так, чтобы на линиях их изменения поверхность стала C^1-гладкой. Выбор вида метрики в полугедезических координатах или с заданием ее в модели Пуанкаре на верхней полуплоскости, в которых нет явного выделения точки в виде полюса, тоже не помогает избавиться от нарушения гладкости поверхности в точках изменения значений параметров P и Q.

Как итог, заключаем, что желанный идеал – существование аналитического изометрического вложения или хотя бы погружения плоскости Лобачевского в R^4 пока еще остается не достигнутым.

Погружения областей плоскости Лобачевского, в том числе с выходом к абсолюту, описаны во многих работах, см., например, [14–17].

3. Реализации плоскости Лобачевского в псевдоевклидовом пространстве

Изменение пространства, в котором ищется реализация плоскости Лобачевского как поверхности, позволяет полностью решить этот вопрос. Таких поверхностей существует большое множество, которые можно представить как изгибания известного в учебной литературе представления плоскости Лобачевского как одной полости двуполостного гиперболоида $S : x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ в трехмерном полуевклидовом пространстве $R^3_{2,1}$ с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. Покажем, что метрика ds^2 этой поверхности в пространстве $R^3_{2,1}$ может быть представлена как изометрическая реализация формы (3) метрики Лобачевского. Введем в пространстве $R^3_{2,1}$ координаты

$$x = x, \quad y = r \operatorname{sh} u, \quad z = r \operatorname{ch} u,$$

в которых поверхность S представляется уравнениями

$$x = \sqrt{r^2 - 1}, \quad y = r \operatorname{sh} u, \quad z = r \operatorname{ch} u \tag{5}$$

с метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2 = \frac{dr^2}{r^2 - 1} + r^2 du^2.$$

Заменой $r = \operatorname{ch} t$ представляем эту метрику в виде $ds^2 = dt^2 + \operatorname{ch} t^2 du^2$, что согласно (3) и подтверждает, что метрика поверхности S является метрикой плоскости Лобачевского и ее изометрическое вложение в $R^3_{2,1}$ дается отображением (5). Подробное изложение изометрических вложений плоскости Лобачевского в псевдоевклидово пространство вместе с их свойствами есть в монографии Б.А. Розенфельда [19].

Замечание 3. Хотелось бы иметь вложение, которое было бы отображением в $R^3_{2,1}$ канонического представления (1) метрики Лобачевского (скажем, для более короткого изложения этого материала на лекции). Приведение метрики (3) и вообще любой двумерной метрики к каноническому виду дается согласно, например, [18] решением некоторой системы Бельтрами, но ее решение в общем случае в явном виде не выписывается, поэтому нам пришлось искать явное вложение плоскости Лобачевского, задав ее метрику не в канонических, а в полугеодезических координатах.

4. Реализации плоскости Лобачевского в пространстве с переменной сигнатурой

В работе [20] А.Д. Сахаров предложил идею обобщить постановку задачи об изометрических погружениях метрик, расширив область погружения, а именно, допуская, что некоторую часть данной метрики можно погружать в пространство с некоторой одной данной сигнатурой его метрики, а другую часть метрики погружать в некоторое пространство с метрикой другой сигнатуры. Такую задачу имеет смысл ставить в космологических масштабах, так как нам неизвестно глобальное поведение таких физических реалий, как пространство и время. Краткое описание работы [20] приведено в монографии Ю.А. Аминова [14]. Из известных автору публикаций в этом направлении можно упомянуть работу А.В. Костина [21] и его же недавно опубликованную статью [22], в которых классические поверхности вращения с метрикой Лобачевского гладко продолжаются в псевдоевклидово пространство с сохранением метрики постоянной отрицательной кривизны.

Считаю своим приятным долгом выразить мою благодарность А.В. Костину за многочисленные полезные замечания.

Список литературы

[1] E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, Giorn. di Mat. **6**, 284–312 (1868).
URL: https://zbmath.org/01.0275.02

[2] D. Hilbert, *Über Flächen von konstanter Gaußsch Krümmung*, Trans. Amer. Math. Soc. **1** (2), 87–99 (1901).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-52012-9_30

[3] Н.В. Ефимов, *Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны*, Матем. сб. **64** (2), 286–320 (1964).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/sm4448

[4] Э.Р. Розендорн, *Слабо нерегулярные поверхности отрицательной кривизны*, УМН **21** (5), 59–116 (1966).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm5914

[5] L. Bieberbach, *Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negative Krümmung in Hilbertschen Raume*, Comment. Math. Helv. **4**, 248–255 (1932).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01202719

[6] С.Б. Кадомцев, *Невозможность некоторых специальных изометрических погружений пространств Лобачевского*, Матем. сб. **149** (10), 175–198 (1978).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/sm2635

[7] Э.Р. Розендорн, *Поверхности отрицательной кривизны*, в сб.: *Геометрия*–3, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления **48**, 98–195 (ВИНИТИ, М., 1989).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/intf145

[8] D. Blanuša, *Über die Einbettung hiperbolischer Räume im euklidische Räume*, Monatsh. Math. **59** (3), 217–229 (1955).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01303796

[9] Э.Р. Розендорн, *Реализация метрики $ds^2 = du^2 + f(u)dv^2$ в пятимерном евклидовом пространстве*, ДАН Арм. ССР **30** (4), 197–199 (1960).

[10] И.Х. Сабитов, *Об изометрических погружениях плоскости Лобачевского в E^4*, Сиб. матем. журн. **30** (5), 179–186 (1989).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/smj3665

[11] М.Л. Громов, *Дифференциальные соотношения с частными производными*, Мир, М., 1990.

[12] И.Х. Сабитов, *Полный перечень центрально-симметричных форм двумерных метрик постоянной кривизны*, Изв. вузов. Матем. (3), 65–68 (1994).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/ivm4197

[13] F. Schur, *Ueber die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses*, Math. Ann. **27**, 163–176 (1886).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01452055

[14] Ю.А. Аминов, *Геометрия подмногообразий*, Наукова Думка, Киев, 2002.

[15] А.А. Борисенко, *Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий* (Экзамен, М., 2003).

[16] Э.Г. Позняк, Е.В. Шикин, *Поверхности отрицательной кривизны*, Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. **12**, 171–207 (1974).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/inta69

[17] Е.В. Шикин, *Задача изометрического погружения и уравнения Монжа–Ампера гиперболического типа*, Тр. Ин-та матем. **14**, 245–258 (1989).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/mt506

[18] И.Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Наука, М., 1988.

[19] Б.А. Розенфелд, *Неевклидовы геометрии*, Гостехиздат, М., 1955.

[20] А.Д. Сахаров, *Космологические переходы с метрикой переменной сигнатуры*, ЖЭТФ **87** (2), 375–383 (1984).

[21] А.В. Костин, *Асимптотические на псевдосферах и угол параллельности*, Изв. вузов. Матем. (6), 25–34 (2021).
DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-6-25-34

[22] А.В. Костин, *Задача о тени и поверхности постоянной кривизны*, Сиб. электрон. матем. изв. **20** (1), 150–164 (2023).
DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.014

Иджад Хакович Сабитов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские Горы, Москва, ГСП-1, 119991,
e-mail: isabitov@mail.ru

Volume 1, Issue 2 UDC 514.764
pp. 22–34 (2023) MSC 53-03, 53C20

Isometric realisations of Lobachevsky plane in $R^n, n \geq 4$

I.Kh. Sabitov

Abstract. The article is written following the talk by author on the satellite conference “Lobachevsky readings” held in Kazan in July 2022. The talk has presented a short survey of works concerning the history and results of investigations devoted to the realisation of the complete Lobachevsky plane as a two-dimensional surface in a multidimensional Euclidean space. For the present situation the best result for the minimal dimension of ambient space is given by a theorem affirming that Lobachevsky plane can be immersed in R^4 as a piecewise analytic surface with $C^{0.1}$ smoothness in whole.

Keywords: metric and plane of Lobachevsky, existence and non-existence of Lobachevsky plane as a surface in the Euclidean space of a dimension.

References

[1] E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, Giorn. di Mat. **6**, 284–312 (1868).
URL: https://zbmath.org/01.0275.02

[2] D. Hilbert, *Über Flächen von konstanter Gaußsch Krümmung*, Trans. Amer. Math. Soc. **1** (2), 87–99 (1901).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-52012-9_30

[3] N.V. Efimov, *Appearance of singularities on the surfaces of negative curvature*, Math. Sbonik **64** (2), 286–320 (1964) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/sm4448

[4] E.R. Rozendorn, *Weakly irregular surfaces of negative curvature*, Russ. Math. Surv. **21** (5), 57–112 (1966).
DOI: https://doi.org/10.1070/RM1966v021n05ABEH004174

[5] L. Bieberbach, *Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negative Krümmung in Hilbertschen Raume*, Comment. Math. Helv. **4**, 248–255 (1932).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01202719

Received: 25 November 2022. Accepted: 11 May 2023. Published: 30 June 2023.

[6] S.B. Kadomcev, *The impossibility of some special isometric immersions of Lobačevskiĭ spaces*, Math. USSR Sb. **35**, 461–480 (1979).
DOI: https://doi.org/10.1070/SM1979v035n04ABEH001555

[7] E.R. Rozendorn, *Surfaces of Negative Curvature*, in: *Geometry* III, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 48, Springer, Berlin, Heidelberg, 1992.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-02751-6_2

[8] D. Blanuša, *Über die Einbettung hiperbolischer Räume im euklidische Räume*, Monatsh. Math. **59** (3), 217–229 (1955).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01303796

[9] E.R. Rozendorn, Realization of the metric $ds^2 = du^2 + f(u)dv^2$ in five-dimensional Euclidean space, Dokl. Akad. Nauk ArmSSSR **30** (4), 196–199 (1960) [in Russian].

[10] I.Kh. Sabitov, *Isometric immersions of the Lobachevskii plane in E^4*, Sib. Math. J. **30** (5), 805–811 (1989).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF00971274

[11] M. Gromov, *Partial differential relations*, Springer, Berlin, 1986.

[12] I.Kh. Sabitov, *A complete list of central symmetric forms of two dimensional metrics of constant curvature*, Russian Math. (Iz. VUZ) **38** (3), 63–66 (1994).

[13] F. Schur, *Ueber die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses*, Math. Ann. **27**, 163–176 (1886).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01452055

[14] Yu.A. Aminov, *The Geometry of Submanifolds*, CRC Press, London, 2001.
DOI: https://doi.org/10.1201/9781482296860

[15] A.A. Borisenko, *Interior and Exterior Geometry of Multidimensional Submanifolds* (Ekzamen, M., 2003) [in Russian].

[16] E.G. Poznyak, E.V. Shikin, *Surfaces of negative curvature*, J. Soviet Math. **5** (6), 865–887 (1976).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01085151

[17] E.V. Shikin, *Problem of isometric immersions and hyperbolic Monge–Ampér equation*, Proceedings of Math. Inst. **14**, 245–258 (1989) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/mt506

[18] I.N. Vekua, *Generalised Analytic Functions*, Pergamon, 1962.
DOI: https://doi.org/10.1016/C2013-0-05289-9

[19] B.A. Rozenfeld, *Non-Euclidean geometries*, Gostekhizdat, M., 1955.

[20] A.D. Sakharov, *Cosmological transitions with changes in the signature of the metric*, Sov. Phys. JETP **60** (2), (1984), 214–218.
URL: http://jetp.ras.ru/cgi-bin/e/index/e/60/2/p214?a=list

[21] A.V. Kostin, *Acymptotic lines on pseudo spheres and the angle of parallelism.* Russ. Math. **65** (6), 21–28 (2021).
DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X21060037

[22] A.V. Kostin, *Problem of shadow and surface of constant curvature*, Sib. Electron. Math. Rep. **20** (1), 150–164 (2023).
DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.014

Idzhad Khakovich Sabitov
Moscow State University,
Faculty of Mechanics and Mathematics,
1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia,
e-mail: isabitov@mail.ru

Том 1, Выпуск 2 УДК 510.54, 510.57
Стр. 35–49 (2023) MSC 03D45, 03D25

Обобщенно вычислимые нумерации и неподвижные точки

М.Х. Файзрахманов

Аннотация. Доказывается, что для любого в. п. множества W его невычислимость равносильна выполнению теоремы рекурсии (с параметрами) в каждой универсальной W-вычислимой нумерации, а также ее слабой предполноте и неразложимости. Устанавливается, что тьюринговая полнота в. п. оракула W равносильна наличию предполной W-вычислимой нумерации у любого W-вычислимого семейства.

Ключевые слова: нумерация, универсальная нумерация, предполная нумерация, слабо предполная нумерация, теорема рекурсии.

Введение

Начиная со второй половины 90-х годов прошлого столетия после публикации работы С.С. Гончарова и А. Сорби [1], излагающей общую концепцию вычислимых семейств конструктивных объектов, наряду с вычислимыми нумерациями стали исследоваться и разного рода обобщенно вычислимые нумерации. Наибольший прогресс при этом был достигнут в изучении вычислимых нумераций в арифметической [2–5] и гиперарифметической [6, 7] иерархиях. К середине 2010-х годов обобщенно вычислимые нумерации стали интенсивно исследоваться и с позиции равномерной перечислимости семейств относительно произвольного оракула A. Такие нумерации, впервые содержательно изученные в работе С. А. Бадаева и С.С. Гончарова [8] (см. также [9,10]), были названы A-*вычислимыми*. В настоящей статье исследуются A-вычислимые нумерации для вычислимо перечислимых (в. п.) оракулов A и оракулов, вычисляющих невычислимые в. п. множества. Рассмотрение такого класса оракулов охватывает и нумерации, вычислимые в (гипер)арифметической иерархии.

В первой части статьи мы рассматриваем некоторые вопросы, касающиеся универсальных нумераций. Интерес к изучению таких нумераций [8, 11, 12] связан с тем, что они содержат в себе информацию обо всех (обобщенно) вычислимых нумерациях нумеруемого семейства. Основная ее цель заключается в определении форм теоремы о неподвижной

Благодарности. Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 23-21-00181) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

Поступила: 16.09.2022. Принята: 11.05.2023. Опубликована: 30.06.2023.

точке, справедливых в универсальных обобщенно вычислимых нумерациях. Во второй части статьи классифицируются в. п. оракулы W, для которых любое W-вычислимое семейство обладает (слабо) предполной W-вычислимой нумерацией. Такие нумерации определяются выполнением в них теорем о неподвижной точке с разной степенью равномерности и составляют важный раздел теории нумераций, имеющий множество приложений в различных разделах теории вычислимости [13–18].

Необходимые сведения по теории нумераций можно найти в монографии Ю. Л. Ершова [19] и в его статье [20]. Напомним самые необходимые из них. *Нумерацией* счетного множества S называется произвольное сюръективное отображение $\alpha : \mathbb{N} \to S$. Говорим, что нумерация α *сводится* к нумерации β (обозначаем как $\alpha \leqslant \beta$), если $\alpha = \beta \circ f$ для некоторой вычислимой функции f. Нумерации α и β называются *эквивалентными* (в этом случае используется обозначение $\alpha \equiv \beta$), если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$. Для двух нумераций α_0 и α_1 их *прямая сумма* есть нумерация $(\alpha_0 \oplus \alpha_1)(2x+i) = \alpha_i(x)$, $i = 0, 1$. *Нумерационная эквивалентность* нумерации α определяется как

$$\eta_\alpha = \{\langle x, y\rangle : \alpha(x) = \alpha(y)\}.$$

В настоящей статье рассматриваются только нумерации семейства подмножеств $\mathbb{N}$.

Приведем теперь необходимые сведения, связанные с вычислимостью нумераций. Пусть A – произвольное множество натуральных чисел, а $\mathcal{S}$ – семейство A-в. п. множеств. Следуя [1, 8], назовем нумерацию α семейства $\mathcal{S}$ *A-вычислимой*, если множество

$$G_\alpha = \{\langle x, y\rangle : x \in \mathbb{N},\ y \in \alpha(x)\}$$

A-в. п. Семейство $\mathcal{S}$ называется *A-вычислимым*, если оно имеет A-вычислимую нумерацию. Опуская оракул A, получим определения *вычислимой* нумерации и *вычислимого* семейства.

Мы используем стандартные обозначения из теории вычислимости. Через φ_e и W_e обозначаем соответственно частично вычислимую функцию и в. п. множество с геделевским номером e. Область определения произвольной частичной функции ψ будем обозначать через $\operatorname{dom}\psi$, а ее область значений – через $\operatorname{rng}\psi$. Пишем $\psi(x)\downarrow$, если $x \in \operatorname{dom}\psi$, и $\psi(x)\uparrow$ – в противном случае. Вычислимую функцию $\langle x, y\rangle \mapsto 2^x(2y+1) - 1$, взаимно однозначно нумерующую пары натуральных чисел, обозначаем через $c(x, y)$, а проекции ее образа на первую и вторую координаты – через l и r соответственно: $l(c(x, y)) = x$ и $r(c(x, y)) = y$. Будем писать $c(x, y, z)$ вместо $c(x, c(y, z))$. Остальные обозначения можно найти в монографии Р.И. Соара [21].

1. Универсальные нумерации

Напомним, что отношение эквивалентности η на $\mathbb{N}$ называется *слабо предполным*, если существует частично вычислимая функция ψ такая, что для любого геделевского номера e всюду определенной функции φ_e выполняется

$$\psi(e)\downarrow \,\&\, \big\langle \psi(e), \varphi_e(\psi(e))\big\rangle \in \eta.$$

Назовем нумерацию ν *слабо предполной*, если ее нумерационная эквивалентность η_ν является слабо предполной. Приведем достаточное условие на множество A, обеспечивающее слабую предполноту каждой универсальной A-вычислимой нумерации.

Теорема 1. *Пусть $\emptyset <_T B \leqslant_T A$ и B вычислимо перечислимо. Тогда любая универсальная A-вычислимая нумерация ν является слабо предполной.*

Доказательство. Сначала определим B-вычислимую функцию g следующим образом:

$$g(c(i,e,u)) = \begin{cases} \varphi_i(\varphi_e(c(i,e,u))), & \text{если } \exists s\,[u \leqslant s \,\&\, \varphi_{e,s}(c(i,e,u))\downarrow \,\& \\ & \&\, \varphi_{i,s}(\varphi_{e,s}(c(i,e,u)))\downarrow \,\& \\ & \&\, B_{s+1} \restriction u \neq B_s \restriction u]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Чтобы вычислить с оракулом B значение $g(c(i,e,u))$, достаточно выбрать такое наименьшее $t = t(u) \geqslant u$, что

$$B_{t+1} \restriction u = B \restriction u.$$

Тогда

$$g(c(i,e,u)) = \begin{cases} \varphi_i(\varphi_e(c(i,e,u))), & \text{если } \exists s \leqslant t(u)\,[u \leqslant s \,\&\, \varphi_{e,s}(c(i,e,u))\downarrow \,\& \\ & \&\, \varphi_{i,s}(\varphi_{e,s}(c(i,e,u)))\downarrow \,\& \\ & \&\, B_{s+1} \restriction u \neq B_s \restriction u]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку нумерация ν универсальна, выполняется $\nu \circ g \leqslant \nu$. Следовательно, существует такое e, что функция φ_e всюду определена и

$$\nu \circ g = \nu \circ \varphi_e.$$

Теперь определим частично вычислимую функцию ψ, свидетельствующую о слабой предполноте ν. Для этого определим частично вычислимую функцию σ, положив значение $\sigma(i)$ равным наименьшему s, удовлетворяющему для некоторого $u \leqslant s$ условию

$$\varphi_{e,s}(c(i,e,u))\downarrow \,\&\, \varphi_{i,s}(\varphi_{e,s}(c(i,e,u)))\downarrow \,\&\, B_{s+1} \restriction u \neq B_s \restriction u, \tag{1}$$

если такое s существует, и положив $\sigma(i)\uparrow$, в противном случае. Покажем, используя метод разрешения, что если функция φ_i всюду определена, то значение $\sigma(i)$ определено.

Предположим, что, напротив, выполняется

$$\varphi_{e,t}(c(i,e,u))\downarrow \,\&\, \varphi_{i,t}(\varphi_{e,t}(c(i,e,u)))\downarrow \Rightarrow B_{t+1}\restriction u = B_t \restriction u$$

для всех t и всех $u \leqslant t$. Тогда

$$\varphi_{e,t}(c(i,e,u))\,\&\, \varphi_{i,t}(\varphi_{e,t}(c(i,e,u)))\downarrow \Rightarrow B\restriction u = B_{t+1} \restriction u$$

для всех t и всех $u \leqslant t$. Отсюда B вычислимо. Таким образом, получили противоречие с выбором B. Теперь положим $\psi(i)\uparrow$, если $\sigma(i)\uparrow$, и

$$\psi(i) = \varphi_{e,\sigma(i)}(c(i,e,u)),$$

если $\sigma(i)\downarrow$, где $u \leqslant \sigma(i)$ – наименьшее число, удовлетворяющее (1) при $s = \sigma(i)$. Пусть φ_i всюду определена. Покажем, что тогда $\psi(i)$ является неподвижной точкой функции φ_i в нумерации ν. В самом деле, справедливы следующие равенства:

$$\nu(\psi(i)) = \nu(\varphi_e(c(i,e,u))) = \nu(g(c(i,e,u))) = \nu(\varphi_i(\varphi_e(c(i,e,u)))) = \nu(\varphi_i(\psi(i))).$$

Этим завершается доказательство теоремы. □

Покажем, что для в. п. множества W слабая предполнота каждой универсальной W-вычислимой нумерации равносильна выполнению в ней теоремы рекурсии (с параметрами).

Теорема 2. *Для в. п. множества W следующие условия эквивалентны:*

1) *W невычислимо;*
2) *любая универсальная W-вычислимая нумерация слабо предполна;*
3) *для любой универсальной W-вычислимой нумерации ν и любой двухместной вычислимой функции f существует такая вычислимая функция h, что $\nu(h(x)) = \nu(f(x,h(x)))$ для всех x;*
4) *для любой универсальной W-вычислимой нумерации ν и любой вычислимой функции g существует такое число n, что $\nu(n) = \nu(g(n))$.*

Доказательство. Импликация (1⇒2) следует из теоремы 1. Чтобы установить справедливость импликации (2⇒3), покажем, что каждая двухместная вычислимая функция f удовлетворяет теореме рекурсии с параметрами в любой слабо предполной нумерации ν. Зафиксируем частично вычислимую функцию ψ такую, что

$$\psi(e)\downarrow \,\&\, \nu(\psi(e)) = \nu(\varphi_e(\psi(e)))$$

для любого геделевского номера e всюду определенной функции φ_e. Определим вычислимые функции g и h, положив

$$\varphi_{g(x)}(y) = f(x,y),$$

$$h(x) = \psi(g(x)).$$

Тогда для всех x выполняется

$$\nu(f(x, h(x))) = \nu(\varphi_{g(x)}(h(x))) = \nu(\varphi_{g(x)}(\psi(g(x)))) = \nu(\psi(g(x))) = \nu(h(x)).$$

Импликация (3⇒4) очевидна. Импликация (4⇒1) следует из [22, теорема 2.1]. □

Напомним введенное Ю.Л. Ершовым [13] понятие *предполной* нумерации.

Определение 3. Нумерация α называется *предполной*, если для любой частично вычислимой функции ψ существует такая вычислимая функция f, что $\alpha(\psi(x)) = \alpha(f(x))$ для всех $x \in \operatorname{dom}\psi$.

Предполные нумерации могут быть следующим образом охарактеризованы в терминах неподвижных точек.

Теорема 4 (Ю.Л. Ершов [19])**.** *Нумерация α является предполной тогда и только тогда, когда для каждой двухместной частично вычислимой функции ψ существует такая вычислимая функция h, что $\alpha(\psi(x, h(x))) = \alpha(h(x))$ для всех x, удовлетворяющих условию $\langle x, h(x)\rangle \in \operatorname{dom}\psi$.*

В [23] было установлено, что если множество A является *высоким* ($\emptyset'' \leqslant_T A'$), то каждая универсальная A-вычислимая нумерация предполна. Таким образом, остается нерешенным

Вопрос 5. Каково описание (в. п.) множеств A, для которых любая универсальная A-вычислимая нумерация предполна?

Согласно классическому результату Ю.Л. Ершова [13] никакая предполная нумерация не разлагается в нетривиальную сумму нумераций подсемейств нумеруемого семейства. Покажем, что для в. п. множества W неразложимость любой универсальной W-вычислимой нумерации равносильна его невычислимости.

Теорема 6. *Пусть $\emptyset <_T B \leqslant_T A$ и B вычислимо перечислимо. Тогда для любой универсальной A-вычислимой нумерации ν и любых нумераций ν_0, ν_1 из $\nu \equiv \nu_0 \oplus \nu_1$ следует, что либо $\nu \equiv \nu_0$, либо $\nu \equiv \nu_1$.*

Доказательство. Определим A-вычислимую нумерацию α такую, что если она сводима к прямой сумме $\nu_0 \oplus \nu_1$ посредством функции φ_e, то для одного из $i = 0, 1$ найдется вычислимая последовательность $\{x^i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, для которой

$$\nu(j) = \alpha(c(e, x^i_j)) = \nu_i\left(\frac{\varphi_e(c(e, x^i_j)) - i}{2}\right) \tag{2}$$

при любом $j \in \mathbb{N}$. Отсюда получим $\nu \leqslant \nu_i$.

Зафиксируем произвольно e и для всех x определим значение $\alpha(c(e,x))$. Для этого следующим образом определим в. п. множества M_0 и M_1:

$$M_i = \{x : \exists s \exists z\, [\varphi_{e,s}(c(e,x)) = 2z + i \,\&\, B_s \upharpoonright x \neq B_{s+1} \upharpoonright x]\}.$$

Пусть

$$x_0^i, x_1^i, x_2^i, \ldots$$

– вычислимое (возможно конечное) перечисление M_i без повторений. Для произвольного x выберем наименьшее t такое, что

$$B_{t+1} \upharpoonright x = B \upharpoonright x.$$

Если существует $s \leqslant t$, удовлетворяющее условию

$$\varphi_{e,s}(c(e,x))\downarrow \,\&\, B_s \upharpoonright x \neq B_{s+1} \upharpoonright x, \tag{3}$$

то $x \in M_0 \cup M_1$. Выберем единственные $i = 0, 1$, и j, для которых $x = x_j^i$, и определим

$$\alpha(c(e,x)) = \nu(j).$$

Если $s \leqslant t$, удовлетворяющего (3), не существует, то полагаем

$$\alpha(c(e,x)) = \nu(0).$$

Выберем e, для которого функция φ_e всюду определена и

$$\alpha = (\nu_0 \oplus \nu_1) \circ \varphi_e.$$

Поскольку B невычислимо, существует бесконечно много пар $\langle s, x \rangle$, удовлетворяющих (3). Следовательно, $M_0 \cup M_1$ бесконечно. Отсюда для одного из $i = 0, 1$ при любом j справедливо условие (2). Таким образом, выполняется сводимость $\nu \leqslant \nu_i$. $\square$

Следствие 7. Для в. п. множества W следующие условия эквивалентны:

1) W невычислимо;
2) никакая универсальная W-вычислимая нумерация не разлагается в нетривиальную сумму нумераций подсемейств нумеруемого ей семейства.

Доказательство. Достаточно заметить, что семейство, состоящее из двух несравнимых по включению в. п. множеств, обладает универсальной вычислимой нумерацией [19], которая разлагается в нетривиальную сумму нумераций одноэлементных подсемейств. $\square$

2. Семейства с предполными и слабо предполными нумерациями

В настоящем разделе рассматривается вопрос из работы Х. Барендрегта и С. Тервейна [16] о существовании нумераций, удовлетворяющих теореме рекурсии с параметрами (для всюду определенных двухместных функций), но не являющимися предполными. Ответ на него получается из результатов работ [17, 18], в которых построены (причем во второй работе бесконечно много попарно не сравнимых) слабо предполные позитивные эквивалентности, не являющиеся предполными. Следующие результаты показывают, что существуют семейства, обладающие слабо предполными, но не обладающие предполными обобщенно вычислимыми нумерациями.

Теорема 8. *Для в. п. множества W следующие условия эквивалентны:*

1) $\emptyset' \leqslant_T W$;
2) *любое W-вычислимое семейство обладает предполной W-вычислимой нумерацией.*

Доказательство. Чтобы установить импликацию (1⇒2), выберем произвольное W-вычислимое семейство $\mathcal{S}$ и для любой его W-вычислимой нумерации и элемента $X \in \mathcal{S}$ определим пополнение α относительно X [13]:

$$\alpha_X(c(e,x)) = \begin{cases} \alpha(\varphi_e(x)), & \text{если } \varphi_e(x)\downarrow; \\ X, & \text{если } \varphi_e(x)\downarrow. \end{cases}$$

Нумерация α_X полна относительно X и, тем более, предполна. Поскольку $\emptyset' \leqslant_T W$, нумерация α_X является W-вычислимой.

Докажем импликацию (2⇒1). Пусть $W <_T \emptyset'$. Выберем произвольное непустое конечное семейство W-в. п. множеств $\mathcal{R}$, не содержащее наименьшего по включению элемента. Пусть α – произвольная W-вычислимая нумерация семейства $\mathcal{R}$. Обозначим через $X_0, \ldots, X_n$ $(n > 0)$ все минимальные по включению элементы $\mathcal{R}$. Так же, как в доказательстве [19, гл. I §2, предложение 4], выберем такие конечные множества $F_0, \ldots, F_n$, что

$$F_i \subseteq X_j \Leftrightarrow i = j$$

для всех $i, j \leqslant n$. Зафиксируем номера x_0, x_1, для которых $\alpha(x_0) = X_0$ и $\alpha(x_1) = X_1$.

Допустим, что α предполна. Тогда существует двухместная вычислимая функция f такая, что $\alpha(f(e,x)) = \alpha(\varphi_e(x))$ для всех e и всех $x \in \operatorname{dom}\varphi_e$. Пусть $\{\alpha_s(x)\}_{s,x\in\mathbb{N}}$ – сильно W-вычислимая двойная последовательность конечных множеств, для которой $\alpha(x) = \bigcup_s \alpha_s(x)$ и $\alpha_t(x) \subseteq \alpha_{t+1}(x)$ для всех x, t. Определим W-вычислимые функции r и h, положив

$$r(y) = \min\{s : \exists i \leqslant n\, [F_i \subseteq \alpha_s(y)]\},$$

$$h(y) = \min\{i \leqslant n : F_i \subseteq \alpha_{r(y)}(y)\}$$

для всех y. По лемме о модуле (см. [21, гл. III, лемма 3.2]) существуют двухместная вычислимая функция $\widehat{h}$ и W-вычислимая функция m, удовлетворяющие условиям $h(x) = \lim_s \widehat{h}(x,s)$ и $\widehat{h}(x,t) = h(x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$ и $t > m(x)$. Используя s-m-n теорему, определим вычислимую функцию d, полагая

$$\varphi_{d(e)}(x) = \begin{cases} x_0, & \text{если } x \in \emptyset' \,\&\, \widehat{h}(f(e,x),s) > 0, \\ & \text{где } s = \min\{t : x \in \emptyset'_t\}; \\ x_1, & \text{если } x \in \emptyset' \,\&\, \widehat{h}(f(e,x),s) = 0, \\ & \text{где } s = \min\{t : x \in \emptyset'_t\}; \\ \text{не определено} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

По теореме рекурсии выберем номер n, для которого $\varphi_{d(n)} = \varphi_n$. Покажем, что для всех x выполняется

$$x \in \emptyset' \Leftrightarrow x \in \emptyset'_{m(f(n,x))}.$$

Выберем произвольно $x \in \emptyset'$. Предположим, напротив, $x \notin \emptyset'_{m(f(n,x))}$. Выберем первое s, для которого $x \in \emptyset'_s$. Поскольку $s > m(f(n,x))$, имеем либо $F_0 \subseteq \alpha(f(n,x))$ и $\varphi_n(x) = x_1$, либо

$$\exists i \leqslant n\, [0 < i \,\&\, F_i \subseteq \alpha(f(n,x))]$$

и $\varphi_n(x) = x_0$. Следовательно,

$$\alpha(f(n,x)) \neq \alpha(\varphi_n(x)) = \alpha(f(n,x)).$$

Отсюда $z \in \emptyset'_{m(f(n,x))}$. Таким образом, выполняется сводимость $\emptyset' \leqslant_T W$, которая противоречит выбору W. Следовательно, нумерация α не предполна. В силу произвольности выбора α теорема доказана. □

Отметим, что семейство, состоящее из двух несравнимых по включению в. п. множеств, не имеет вычислимых нумераций, удовлетворяющих теореме рекурсии. Таким образом, следующая теорема дает описание в. п. оракулов W, для которых любое W-вычислимое семейство обладает слабо предполной W-вычислимой нумерацией.

Теорема 9. *Пусть $\emptyset <_T B \leqslant_T A$ и B вычислимо перечислимо. Тогда любое A-вычислимое семейство обладает слабо предполной A-вычислимой нумерацией.*

Доказательство. Пусть β – A-вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S}$. Определим по индукции его слабо предполную A-вычислимую нумерацию α. Одновременно с нумерацией α будем определять частично вычислимую функцию ψ, свидетельствующую о слабой предполноте α, и последовательность функций $\{\gamma_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ такую, что для всех s, z выполняется $\gamma_{s+1}(z) \leqslant \gamma_s(z)$ и $\alpha_s(z) = \alpha(z)$, если $B_s \restriction \gamma_s(z) = B \restriction \gamma_s(z)$. Отсюда α будет A-вычислимой.

Через η_s будем обозначать отношение эквивалентности:

$$\eta_s = \{\langle x, y\rangle : \gamma_s(x) = \gamma_s(y)\}.$$

Для каждого s выполним

$$\eta_s \subseteq \eta_{\alpha_s}.$$

Определим для всех x

$$\alpha_0(2x) = \beta(0),\ \alpha_0(2x+1) = \beta(x),$$

$$\gamma_0(2x) = x,\ \gamma_0(2x+1) = 0.$$

Пусть $\psi_0(e)\uparrow$ для всех e. Для всех s и y будем считать, что $\alpha_{s+1}(y) = \alpha_s(y)$, $\gamma_{s+1}(y) = \gamma_s(y)$, $\psi_{s+1}(y) = \psi_s(y)$, если явно не указано обратное.

Предположим по индукции, что нумерация α_s и функции γ_s, ψ_s определены, и $\eta_s \subseteq \eta_{\alpha_s}$. Если существует $e \leqslant s$ такое, что $\psi_s(e)\uparrow$ и для некоторого $x \leqslant s$ выполняется

$$\varphi_{e,s}(2c(e,x))\downarrow,$$

$$B_s \upharpoonright M \neq B_{s+1} \upharpoonright M,$$

где $M = \max\{\gamma_s(2c(e,x)), \gamma_s(\varphi_{e,s}(2c(e,x)))\}$, то выберем наименьшее такое e и зафиксируем z, для которого

$$\gamma_s(z) = \min\{\gamma_s(2c(e,x)), \gamma_s(\varphi_{e,s}(2c(e,x)))\}.$$

Определим

$$\psi_{s+1}(e) = 2c(e,x),\ \ \alpha_{s+1}(y) = \alpha_s(z),\ \ \gamma_{s+1}(y) = \gamma_s(z)$$

для всех y, удовлетворяющих условию $\gamma_s(y) = M$. В силу индукционного предположения $\eta_s \subseteq \eta_{\alpha_s}$, определение α_{s+1} корректно. Нетрудно видеть, что при таком определении индукционное предположение сохраняется.

Поскольку $\alpha_0(2x) = \beta(x)$ и $\gamma_0(2x) = 0$ для всех x, получаем, что α нумерует все семейство $\mathcal{S}$. Покажем, что нумерация α является слабо предполной. Предположим, что функция φ_e всюду определена, но значение $\psi(e)$ не определено. Отсюда для любого s и любого достаточно большого x, если $\varphi_{e,s}(2c(e,x))\downarrow$, то

$$B \upharpoonright \gamma_s(2c(e,x)) = B_{s+1} \upharpoonright \gamma_s(2c(e,x)).$$

Стало быть, что B вычислимо. Таким образом, пришли к противоречию. Значит, $\psi(e) = 2c(e,x)$ для некоторого x. Непосредственно из построения вытекает, что $\langle \psi(e), \varphi_e(\psi(e))\rangle \in \eta$ и, следовательно, $\alpha(\psi(e)) = \alpha(\varphi_e(\psi(e)))$. □

Следствие 10. Для любого в. п. множества W, удовлетворяющего условию $\emptyset <_T W <_T \emptyset'$, существует семейство, обладающее слабо предполными, но не обладающее предполными W-вычислимыми нумерациями.

Список литературы

[1] С. С. Гончаров, А. Сорби, *Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса*, Алгебра и логика **36** (6), 621–641 (1997).
URL: http://mi.mathnet.ru/al2412

[2] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, *The theory of numberings: open problems*, Contemporary Math. **257**, 23–38 (2000).
URL: http://www.ams.org/books/conm/257/

[3] С. А. Бадаев, С. С. Гончаров, *О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств*, Алгебра и логика **40** (5), 507–522 (2001).
URL: http://mi.mathnet.ru/al233

[4] С. Ю. Подзоров, *Начальные сегменты в полурешетках Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций*, Алгебра и логика **42** (2), 211–226 (2003).
URL: http://mi.mathnet.ru/al233

[5] С. Ю. Подзоров, *О локальном строении полурешеток Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций*, Алгебра и логика **44** (2), 148–172 (2005).
URL: http://mi.mathnet.ru/al99

[6] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, *Computability and numberings*, in: S. B. Cooper (ed.) et al., New computational paradigms. Changing conceptions of what is computable, New York, NY, Springer-Verlag, 19–34 (2008).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-68546-5_2

[7] М. Х. Файзрахманов, *О теореме Хуторецкого для обобщенно вычислимых семейств*, Алгебра и логика **58** (4), 528–541 (2019).
URL: http://mi.mathnet.ru/al914

[8] С. А. Бадаев, С. С. Гончаров, *Обобщенно вычислимые универсальные нумерации*, Алгебра и логика **53** (5), 555–569 (2014).
URL: http://mi.mathnet.ru/al650

[9] С. А. Бадаев, А. А. Исахов, *Некоторые абсолютные свойства A-вычислимых нумераций*, Алгебра и логика **57** (4), 426–447 (2018).
URL: http://mi.mathnet.ru/al857

[10] М. Х. Файзрахманов, *О полурешетках Роджерса обобщенно вычислимых нумераций*, Сиб. матем. журн. **58** (6), 1418–1427 (2017).
URL: http://mi.mathnet.ru/smj2948

[11] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, A. Sorbi, *Completeness and universality of arithmetical numberings*, in: Computability and Models, Univ. Ser. Math., Kluwer/Plenum, New York, 11–44 (2003).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4615-0755-0_2

[12] С. Ю. Подзоров, *О предельности наибольшего элемента полурешетки Роджерса*, Матем. тр. **7** (2), 98–108 (2004).
URL: http://mi.mathnet.ru/mt78

[13] Ю. Л. Ершов, *О неотделимых парах*, Алгебра и логика **9** (6), 661–666 (1970).
URL: http://mi.mathnet.ru/al1272

[14] В. Л. Селиванов, *Предполные нумерации и функции без неподвижных точек*, Матем. заметки **51** (1), 149–155 (1992).
URL: http://mi.mathnet.ru/mz4463

[15] В. Л. Селиванов, *Предполные нумерации*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. **157**, 106–134 (2018).
URL: http://mi.mathnet.ru/into409

[16] H. Barendregt, S. A. Terwijn, *Fixed point theorems for precomplete numberings*, Ann. Pure App. Logic **170** (10), 1151–1161 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.apal.2019.04.013

[17] T. H. Payne, *Effective extandability and fixed points*, Notre Dame J. Form. Log. **14** (1), 123–124 (1973).
DOI: https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093890819

[18] С. А. Бадаев, *О слабо предполных позитивных эквивалентностях*, Сиб. матем. журн. **32** (2), 166–169 (1991).
URL: http://mi.mathnet.ru/smj4620

[19] Ю. Л. Ершов, *Теория нумераций*, Наука, М., 1977.

[20] Yu. L. Ershov, *Theory of numberings*, in: E.R. Griffor (ed.), Handbook of computability theory (Stud. Logic Found. Math., 140), Amsterdam, Elsevier, 1999, 473–503.
DOI: https://doi.org/10.1016/S0049-237X(99)80030-5

[21] R. I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987.
URL: https://link.springer.com/book/9783540666813

[22] M. Kh. Faizrahmanov, *Extremal numberings and fixed point theorems*, Math. Log. Q. **68** (4), 398–408 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1002/malq.202200035

[23] М. Х. Файзрахманов, *Универсальные обобщенно вычислимые нумерации и гипериммунность*, Алгебра и логика **56** (4), 506–521 (2017).
URL: http://mi.mathnet.ru/al811

Марат Хайдарович Файзрахманов
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com

Volume 1, Issue 2
pp. 35–49 (2023)

UDC 510.54, 510.57
MSC 03D45, 03D25

Generalized computable numberings and fixed points

M.Kh. Faizrahmanov

Abstract. The paper proves that for any c.e. set W, its non-computability is equivalent to the fulfillment of the Recursion theorem (with parameters) in each universal W-computable numbering, as well as its weak precompleteness and nnon-splittability. It is established that the Turing completeness of the c.e. oracle W is equivalent to the existence of a precomplete W-computable numbering for any W-computable family.

Keywords: numberings, universal numbering, precomplete numbering, Recursion theorem.

References

[1] S. S. Goncharov, A. Sorbi, *Generalized computable numerations and nontrivial rogers semilattices*, Algebra and Logic **36** (6), 359–369 (1997).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02671553

[2] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, *The theory of numberings: open problems*, Contemporary Math. **257**, 23–38 (2000).
URL: http://www.ams.org/books/conm/257/

[3] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, *Rogers semilattices of families of arithmetic sets*, Algebra and Logic **40** (5), 283–291 (2001).
DOI: https://doi.org/10.1023/A:1012516217265

[4] S. Y. Podzorov, *Initial segments in Rogers semilattices of Σ^0_n-computable numberings*, Algebra and Logic **42** (2), 121–129 (2003).
DOI: https://doi.org/10.1023/A:1023354407888

[5] S. Y. Podzorov, *Local structure of Rogers semilattices of Σ^0_n-computable numberings*, Algebra and Logic **44** (2), 82–94 (2005).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-005-0010-3

[6] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, *Computability and numberings*, in: S. B. Cooper (ed.) et al., New computational paradigms. Changing conceptions of what is computable, New York, NY, Springer-Verlag, 19–34 (2008).

Acknowledgements. The work is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 23-21-00181) and performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2023-944).

Received: 16 September 2022. Accepted: 11 May 2023. Published: 30 June 2023.

DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-68546-5_2

[7] M. Kh. Faizrakhmanov, *Khutoretskii's theorem for generalized computable families*, Algebra and Logic **58** (4), 356–365 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-019-09557-9

[8] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, *Generalized computable universal numberings*, Algebra and Logic **53** (5), 355–364 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-014-9296-3

[9] S. A. Badaev, I. I. Issakhov, *Some absolute properties of A-computable numberings*, Algebra and Logic **57** (4), 275–288 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-018-9499-0

[10] M. Kh. Faizrahmanov, *The Rogers semilattices of generalized computable enumerations*, Sib. Math. J. **58** (6), 1104–1110 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446617060192

[11] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, A. Sorbi, *Completeness and universality of arithmetical numberings*, in: Computability and Models, Univ. Ser. Math., Kluwer/Plenum, New York, 11–44 (2003).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4615-0755-0_2

[12] S. Yu. Podzorov, *On the limit property of the greatest element in the Rogers semilattice*, Siberian Adv. Math. **15** (2), 104–114 (2005).
URL: https://zbmath.org/?q=an:1095.03027

[13] Y. L. Ershov, *On inseparable pairs*, Algebra and Logic **9** (6), 396–399 (1970).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02219043

[14] V. L. Selivanov, *Precomplete numberings and functions without fixed points*, Math. Notes **51** (1), 95–99 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01229443

[15] V. L. Selivanov, *Precomplete numberings*, J. Math. Sci. **256**, 96–124 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-021-05422-2

[16] H. Barendregt, S. A. Terwijn, *Fixed point theorems for precomplete numberings*, Ann. Pure App. Logic **170** (10), 1151–1161 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.apal.2019.04.013

[17] T. H. Payne, *Effective extandability and fixed points*, Notre Dame J. Form. Log. **14** (1), 123–124 (1973).
DOI: https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093890819

[18] S. A. Badaev, *On weakly pre-complete positive equivalences*, Sib. Math. J. **32** (2), 321–323 (1991).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF00972779

[19] Yu. L. Ershov, *Theory of numberings*, Nauka, M., 1977 (in Russian).

[20] Yu. L. Ershov, *Theory of numberings*, in: E.R. Griffor (ed.), Handbook of computability theory (Stud. Logic Found. Math., 140), Amsterdam, Elsevier, 473–503 (1999).
DOI: https://doi.org/10.1016/S0049-237X(99)80030-5

[21] R. I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987.
URL: https://link.springer.com/book/9783540666813

[22] M. Kh. Faizrahmanov, *Extremal numberings and fixed point theorems*, Math. Log. Q. **68** (4), 398–408 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1002/malq.202200035

[23] M. Kh. Faizrakhmanov, *Universal generalized computable numberings and hyperimmunity*, Algebra and Logic **56** (4), 337–347 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-017-9454-5

Marat Khaidarovich Faizrahmanov
Kazan Federal University,
Volga Region Mathematical Center,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com

Том 1, Выпуск 2
Стр. 50–61 (2023)

УДК 517.54
MSC 30C70

О максимальной и минимальной площадях ожерелья

Р.Р. Газизов

Аннотация. Исследуется экстремальная проблема, связанная с нахождением максимальной и минимальной площадей множества кругов, вписанных в область, ограниченную двумя касающимися окружностями.

Ключевые слова: конформные отображения, дробно-линейные отображения, экстремальные задачи.

Введение

В XIX веке Якоб Штайнер определил и исследовал цепи, которые названы в честь него. Он обнаружил следующий результат, который известен как *поризм Штайнера.* Слово *поризм* означает теорему, содержанием которой является какое-либо построение циркулем и линейкой.

Поризм Штайнера. Рассмотрим две непересекающиеся окружности и построим цепочку последовательно касающихся окружностей, каждая из которых касается двух исходных. Может случиться так, что эта цепочка замкнется, т. е. n-я окружность коснется первой. Если для двух данных окружностей какая-либо цепочка замкнулась, то замкнется любая такая цепочка, независимо от выбора первой окружности. Количество окружностей во всех цепочках будет одинаковым.

Для доказательства достаточно перевести две данные окружности в концентрические (рис. 1) [1].

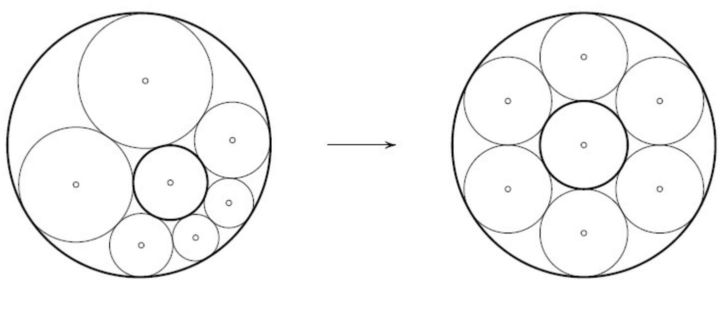

Рис. 1. Поризм Штайнера

Для похожей конструкции в статье Е.А. Авксентьева и В.Ю. Протасова [2] получен современный и более общий результат. В данной работе вводится инвариантная мера для

Поступила: 01.10.2022. Принята: 11.05.2023. Опубликована: 30.06.2023.

теорем типа Понселе. Пусть α_0, α_1, δ – произвольные окружности и пусть $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^2$, r_i – центры и радиусы окружностей α_i соответственно $(i = 0, 1)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ – точка на окружности δ. Тогда функция $\rho(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{|f_0(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x})|}}$ задает инвариантную меру для любой окружности δ, где $f_i(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{c}_i| - r_i^2$ $(i = 0, 1)$. Если окружности α_0, α_1 и δ принадлежат одному пучку окружностей так, что δ – геометрическое место точек касания двух окружностей, последовательно вписанных в область, ограниченную окружностями α_0 и α_1, то функция $\rho(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{cf_0(\mathbf{x})}$ определяет инвариантную меру для цепи Штайнера, в данном случае $f_1(\mathbf{x}) = -cf_0(\mathbf{x})$.

Словом *арбелос* называют криволинейный треугольник, образованный тремя полуокружностями (рис. 2). Архимед в своей *задаче об арбелосе* обнаружил прекрасное свойство.

Задача Архимеда. Пусть точка C лежит на отрезке AB. Построим в одну сторону от отрезка полуокружности на диаметрах AB, BC, AC (это и есть арбелос). Перпендикуляр MC к отрезку AB делит арбелос на две части. Докажите, что радиусы окружностей, вписанных в эти части арбелоса, равны между собой (рис. 3) [1].

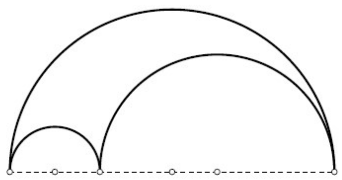

Рис. 2. Арбелос

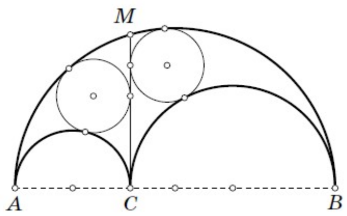

Рис. 3. Задача Архимеда

Также существует знаменитая задача Паппа Александрийского, связанная с арбелосом.

Задача Паппа. Даны окружности α, β и γ с диаметрами AB, BC, AC, которые образуют арбелос, δ_1 – окружность, вписанная в арбелос, окружность δ_2 касается окружностей α, β и δ_1, окружность δ_3 касается окружностей α, β и δ_2, $\ldots$, окружность δ_{n+1} касается окружностей α, β и δ_n (рис. 4). Пусть R_n – радиус окружности δ_n, d_n – расстояние от центра окружности δ_n до прямой AB. Докажите, что тогда

$$\frac{d_1}{R_1} = 2, \ \frac{d_2}{R_2} = 4, \ \frac{d_3}{R_3} = 6, \ \ldots, \ \frac{d_n}{R_n} = 2n,$$

т. е. расстояние от центра n-й окружности до диаметра арбелоса в $2n$ раз больше ее радиуса [1].

Утверждения в поризме Штайнера, в задачах Архимеда и Паппа доказываются с помощью инверсии, которая связана с дробно-линейными отображениями.

Теперь рассмотрим систему окружностей, которая образуется так же, как и в задаче Паппа. Возьмем на плоскости две окружности $\alpha((r;0), r)$ и $\beta((R;0), R)$ $(R > r)$

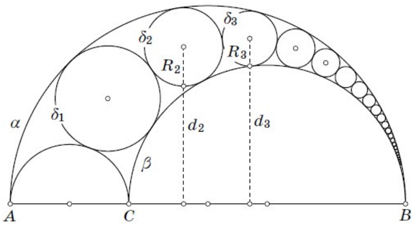

Рис. 4. Задача Паппа

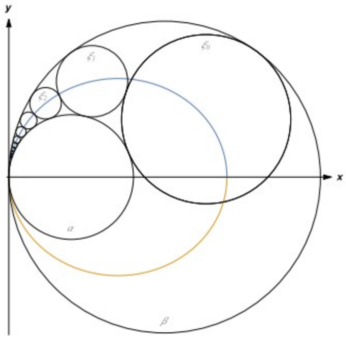

Рис. 5.

(рис. 5), которые касаются внутренним образом. Пусть окружность ξ_0 с радиусом r_0 касается внутренним образом окружностей α и β. В полученный арбелос впишем попарно касающиеся окружности $\xi_n,\ n \in \mathbb{N}$. Тогда координаты центров $x_n,\ y_n$ и радиусы r_n данных окружностей вычисляются по следующим формулам [3]:

$$x_n = \frac{Rrr_0(R+r)}{Rr(R-r) + 2(R-r)\sqrt{Rrr_0(R-r-r_0)}n + (R-r)^2 r_0 n^2},$$
$$y_n = \frac{2Rrr_0(R-r)n + 2Rr\sqrt{Rrr_0(R-r-r_0)}}{Rr(R-r) + 2(R-r)\sqrt{Rrr_0(R-r-r_0)}n + (R-r)^2 r_0 n^2},$$
$$r_n = \frac{Rrr_0}{Rr + 2\sqrt{Rrr_0(R-r-r_0)}n + (R-r)r_0 n^2}.$$

В данной работе мы решаем задачу, которая лежит в русле экстремальных проблем теории функций. А именно, опираясь на окружности, вписанные в арбелос в задаче Паппа, определяем ожерелье, находим максимальную и минимальную площади данного ожерелья.

1. Площадь ожерелья

Определение. *Пусть даны две окружности с радиусами* R_1 *и* R_2 *такие, что они касаются внутренним образом* (*рис.* 6). *В большую окружность вписаны последовательно касающиеся окружности так, что они касаются маленькой окружности, которая была дана изначально. Полученную систему без учета внешней и внутренней окружностей назовем* **ожерельем** (*рис.* 7).

При изучении полученного ожерелья естественно возникает такой **вопрос**: при каком условии ожерелье приобретет *максимальную площадь*, и как найти эту максимальную площадь?

Исследуя данную задачу, мы получили следующее утверждение.

Теорема. *При фиксированных радиусах внутренней и внешней окружностей* ***макси-***

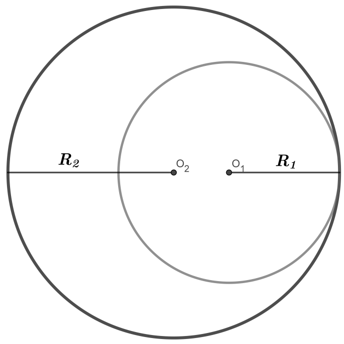

Рис. 6. Две касающиеся окружности

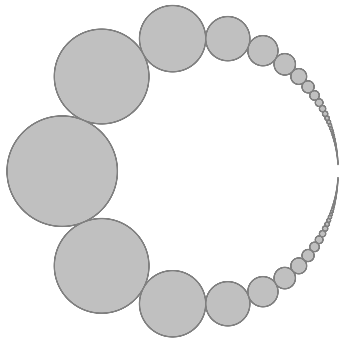

Рис. 7. Ожерелье

мальная площадь *ожерелья вычисляется по формуле*

$$S(R_1, R_2) = \frac{1}{4}\pi^2 R_1 R_2 \operatorname{csch}^2 \frac{\pi\sqrt{R_1 R_2}}{R_2 - R_1}\left(2\pi + \frac{R_2 - R_1}{\sqrt{R_1 R_2}} \operatorname{sh} \frac{2\pi\sqrt{R_1 R_2}}{R_2 - R_1}\right), \tag{1}$$

а ***минимальная площадь*** *ожерелья вычисляется по формуле*

$$S(R_1, R_2) = \frac{1}{4}\pi^2 R_1 R_2 \operatorname{sech}^2 \frac{\pi\sqrt{R_1 R_2}}{R_2 - R_1}\left(\frac{R_2 - R_1}{\sqrt{R_1 R_2}} \operatorname{sh} \frac{2\pi\sqrt{R_1 R_2}}{R_2 - R_1} - 2\pi\right), \tag{2}$$

где R_1 – радиус внутренней окружности, R_2 – радиус внешней окружности.

Доказательство. Рассмотрим систему окружностей, расположенных в полосе П, с радиусом r и со следующими центрами:

$$z_0 = b + i(2rt + k), \tag{3}$$

где b – параметр смещения центров окружностей вдоль оси OX, k – параметр смещения центров окружностей вдоль оси OY, $t \in \mathbb{Z}$.

Для дальнейших исследований выберем на этих окружностях следующие точки:

$$z_1 = b + i(r(2t + 1) + k). \tag{4}$$

При $r = 1,\ b = -5$ и $k = 0$ получаем следующую систему окружностей, расположенных в полосе П (рис. 8).

Рассмотрим дробно-линейное отображение

$$w(z) = \frac{1}{z}. \tag{5}$$

Из теории конформных отображений известно [4], что с помощью отображения (5) при фиксированных параметрах $b,\ k,\ r$ система окружностей, расположенных в полосе П, отображается в систему окружностей (рис. 7), которая была дана в определении ожерелья.

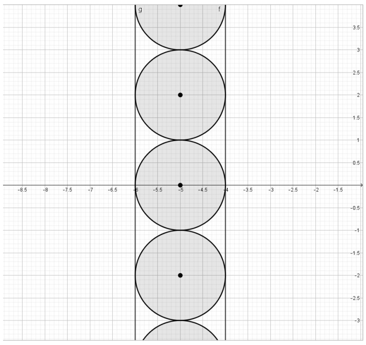

Рис. 8. Полоса окружностей

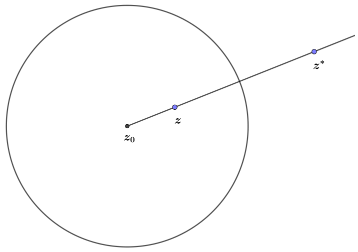

Рис. 9. Симметричные точки

Пусть $b < 0$ и $|b| > r$, в этом случае прямые g и f при отображении (5) перейдут в малую и большую окружности соответственно, а в случае $b > 0$ – наоборот. Поэтому дальнейшие рассуждения будут для $b < 0$.

Для того, чтобы найти площадь ожерелья, необходимо найти радиусы отображенных окружностей. Для этого найдем центры образов системы окружностей (3), расположенных в полосе П, и образы одной из точек (4).

Воспользуемся следующим соотношением, которое позволит найти симметричные точки относительно окружностей полосы П, являющиеся прообразами центров окружностей ожерелья (рис. 9):

$$z^* = z_0 + \frac{q^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}, \tag{6}$$

где q – радиус окружности, z_0 – центр окружности, z и z^* – симметричные точки относительно данной окружности. В нашем случае имеем, что $q = r$, $z_0 = b + i(2rt + k)$ и $z = 0$ (прообраз бесконечности). Подставляя эти данные в формулу (6), найдем симметричные точки, образы которых будут являться центрами звеньев ожерелья:

$$z^* = b + i(2rt + k) + \frac{r^2}{\overline{0} - \overline{b + i(2rt + k)}} = \frac{b^2 + (2rt + k)^2 - r^2}{b - i(2rt + k)}.$$

Используя отображение (5), найдем центры образов окружностей, расположенных в полосе П, и образы точек на окружностях (4):

$$w_0 = w(z^*) = \frac{b - i(2rt + k)}{b^2 + (2rt + k)^2 - r^2} = \frac{1}{b^2 + (2rt + k)^2 - r^2} \left(b - i(2rt + k)\right),$$

$$w_1 = w(z_1) = \frac{1}{b + i(r(2t + 1) + k)} = \frac{1}{b^2 + (r(2t + 1) + k)^2} \left(b - i(r(2t + 1) + k)\right).$$

Найдем радиусы отображенных окружностей:

$$
\begin{gathered}
R = |w_0 - w_1| = \\
= \left| \frac{1}{b^2 + (2rt+k)^2 - r^2} \left(b - i(2rt+k)\right) - \frac{1}{b^2 + (r(2t+1)+k)^2} \left(b - i(r(2t+1)+k)\right) \right| \\
= \left| b \left(\frac{1}{b^2 + (2rt+k)^2 - r^2} - \frac{1}{b^2 + (r(2t+1)+k)^2} \right) \right. \\
\left. + i \left(\frac{r(2t+1)+k}{b^2 + (r(2t+1)+k)^2} - \frac{2rt+k}{b^2 + (2rt+k)^2 - r^2} \right) \right| \\
= \frac{1}{(b^2 + (2rt+k)^2 - r^2)(b^2 + (r(2t+1)+k)^2)} \big| 2br(k + r(2t+1)) \\
+ ir(b^2 - (r(2t+1)+k)^2) \big| = \frac{1}{(b^2 + (2rt+k)^2 - r^2)(b^2 + (r(2t+1)+k)^2)} \times \\
\times \sqrt{4b^2r^2(k + r(2t+1))^2 + r^2(b^2 - (r(2t+1)+k)^2)^2} \\
= \frac{r}{(2rt+k)^2 + b^2 - r^2}.
\end{gathered}
$$

Таким образом, при $t \in \mathbb{Z}$ получаем

$$
R = \frac{r}{(2rt+k)^2 + b^2 - r^2}. \tag{7}
$$

Преобразуем выражение (7) следующим образом:

$$
R = \frac{r}{\left(2r\left(t + \frac{k}{2r}\right)\right)^2 + b^2 - r^2} = \frac{1}{4r\left(\left(t + \frac{k}{2r}\right)^2 + \frac{b^2 - r^2}{4r^2}\right)}. \tag{8}
$$

Пусть $n = \dfrac{k}{2r}$ и $m = \dfrac{\sqrt{b^2 - r^2}}{2r}$. Подставим в выражение (8)

$$
R = \frac{1}{4r\left((t+n)^2 + m^2\right)}. \tag{9}
$$

Используя выражение (9), при $t \in (-\infty; +\infty)$ получим следующий функциональный ряд для вычисления площади ожерелья:

$$
S = \frac{\pi}{16r^2} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left((t+n)^2 + m^2\right)^2}. \tag{10}
$$

Для нахождения суммы данного функционального ряда рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t+n)^2+m^2}. \tag{11}$$

Сумма данного функционального ряда (11) известна [5]:

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t+n)^2+m^2} = \frac{\pi}{m}\,\frac{\operatorname{sh} 2\pi m}{\operatorname{ch} 2\pi m - \cos 2\pi n}. \tag{12}$$

Дифференцируя равномерно сходящийся ряд и сумму ряда (12) по параметру m, получаем

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{-2m}{\left((t+n)^2+m^2\right)^2}$$
$$= \frac{2\pi^2 \operatorname{ch} 2\pi m}{m\,(\operatorname{ch} 2\pi m - \cos 2\pi n)} - \frac{\pi \operatorname{sh} 2\pi m}{m^2\,(\operatorname{ch} 2\pi m - \cos 2\pi n)} - \frac{2\pi^2 \operatorname{sh}^2 2\pi m}{m\,(\operatorname{ch} 2\pi m - \cos 2\pi n)^2}.$$

Домножая последнее выражение на $\frac{-\pi}{32r^2m}$, получаем сумму функционального ряда (10) для нахождения площади ожерелья

$$S = \frac{\pi}{16r^2}\sum_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left((t+n)^2+m^2\right)^2}$$
$$= \frac{\pi^2}{32r^2m^2}\left(\frac{\operatorname{sh} 2\pi m}{m\,(\operatorname{ch} 2\pi m - \cos 2\pi n)} + \frac{2\pi \operatorname{sh}^2 2\pi m}{(\operatorname{ch} 2\pi m - \cos 2\pi n)^2} - \frac{2\pi \operatorname{ch} 2\pi m}{\operatorname{ch} 2\pi m - \cos 2\pi n}\right).$$

В полученном выражении в сумме ряда произведем обратную замену $n = \frac{k}{2r}$ и $m = \frac{\sqrt{b^2-r^2}}{2r}$. Тогда

$$S(k,b,r) = \frac{\pi^2}{4\,(b^2-r^2)}\left(\frac{r \operatorname{sh} \frac{\pi\sqrt{b^2-r^2}}{r}}{\sqrt{b^2-r^2}\left(\operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{b^2-r^2}}{r} - \cos\frac{\pi k}{r}\right)}\right.$$
$$\left. + \frac{\pi \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\sqrt{b^2-r^2}}{r}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{b^2-r^2}}{r} - \cos\frac{\pi k}{r}\right)^2} - \frac{\pi \operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{b^2-r^2}}{r}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{b^2-r^2}}{r} - \cos\frac{\pi k}{r}}\right). \tag{13}$$

Необходимо записать последнее выражение через радиусы большой и малой окружностей R_2 и R_1 соответсвенно. Для этого рассмотрим прямую (рис. 8)

$$f : x - (b+r) = 0.$$

Подставляя в это уравнение прямой $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, находим

$$z + \overline{z} - 2(b+r) = 0.$$

Подставим вместо z обратное отображение к (5) $w = \dfrac{1}{z}$

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}} - 2(b+r) = 0$$

или

$$\overline{w} + w - 2(b+r)w\overline{w} = 0.$$

С учетом $w = u + iv$, проведя преобразования, получаем уравнение большой окружности

$$\left(u - \frac{1}{2(b+r)}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4(b+r)^2}. \tag{14}$$

Аналогично для прямой (рис. 8)

$$g : x - (b-r) = 0$$

получаем уравнение малой окружности

$$\left(u - \frac{1}{2(b-r)}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4(b-r)^2}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) с учетом, что $b < 0$ и $|b| > r$, получаем

$$R_1 = -\frac{1}{2(b-r)}, \quad R_2 = -\frac{1}{2(b+r)}$$

или

$$b = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \quad r = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{16}$$

Подставляя (16) в (13), получаем

$$S(k, R_1, R_2) = \pi^2 R_1 R_2 \left(\frac{(R_2 - R_1)\operatorname{sh}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}}{2\sqrt{R_1R_2}\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1} - \cos\frac{4\pi k R_1 R_2}{R_2-R_1}\right)}\right.$$

$$+\frac{\pi\operatorname{sh}^2\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}}{\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}-\cos\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}\right)^2}-\frac{\pi\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}-\cos\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}}\Bigg). \quad (17)$$

Продифференцируем (17) по k и полученное приравняем к нулю:

$$2\pi^3R_1^2R_2^2\sin\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}\left(-\frac{\operatorname{sh}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}}{\sqrt{R_1R_2}\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}-\cos\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}\right)^2}\right.$$
$$-\frac{4\pi\operatorname{sh}^2\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}}{(R_2-R_1)\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}-\cos\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}\right)^3}$$
$$\left.+\frac{2\pi\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}}{(R_2-R_1)\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}-\cos\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}\right)^2}\right)=0.$$

Из последнего равенства $k=\dfrac{R_2-R_1}{4R_1R_2}l$ при $l\in\mathbb{Z}$ обращает в нуль первую производную. Для дальнейшего исследования найдем вторую производную:

$$\frac{d^2S(k,R_1,R_2)}{dk^2}=\frac{8\pi^4R_1^3R_2^3}{R_2-R_1}\cos\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}\left(-\frac{\operatorname{sh}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}}{\sqrt{R_1R_2}\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}-\cos\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}\right)^2}\right.$$
$$-\frac{4\pi\operatorname{sh}^2\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}}{(R_2-R_1)\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}-\cos\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}\right)^3}$$
$$\left.+\frac{2\pi\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}}{(R_2-R_1)\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}-\cos\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}\right)^2}\right) \quad (18)$$
$$+\frac{16\pi^4R_1^3R_2^3}{R_2-R_1}\sin^2\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}}{\sqrt{R_1R_2}\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}-\cos\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}\right)^3}\right.$$
$$+\frac{6\pi\operatorname{sh}^2\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}}{(R_2-R_1)\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}-\cos\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}\right)^4}$$
$$\left.-\frac{2\pi\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}}{(R_2-R_1)\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}-\cos\frac{4\pi kR_1R_2}{R_2-R_1}\right)^3}\right).$$

Подставляя в правую часть выражения (18) $k = \dfrac{R_2 - R_1}{4R_1R_2}l$, где $l = 2p,\ p \in \mathbb{Z}$, получаем

$$\left.\frac{d^2S(k,R_1,R_2)}{dk^2}\right|_{k=\frac{R_2-R_1}{4R_1R_2}l,\ l=2p,\ p\in\mathbb{Z}} = -\frac{2\pi^4R_1^3R_2^3}{(R_2-R_1)^2}\operatorname{csch}^4\frac{\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}\times$$
$$\times\left(4\pi + 2\pi\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1} + \frac{R_2-R_1}{\sqrt{R_1R_2}}\operatorname{sh}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}\right) < 0, \quad R_2 > R_1.$$

Видим, что вторая производная функции площади ожерелья отрицательна при данном значении k, где $R_2 > R_1$, следовательно, функция вычисления площади ожерелья (17) принимает наибольшее значении в данной точке. Подставляя в (17) $k = \dfrac{R_2 - R_1}{4R_1R_2}l$, где $l = 2p,\ p \in \mathbb{Z}$, получаем формулу (1).

Подставляя в правую часть выражения (18) $k = \dfrac{R_2 - R_1}{4R_1R_2}l$, где $l = 2p+1, p \in \mathbb{Z}$, получаем

$$\left.\frac{d^2S(k,R_1,R_2)}{dk^2}\right|_{k=\frac{R_2-R_1}{4R_1R_2}l,\ l=2p+1,\ p\in\mathbb{Z}} = \frac{2\pi^4R_1^3R_2^3}{(R_2-R_1)^2}\operatorname{sech}^4\frac{\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}\times$$
$$\times\left(-4\pi + 2\pi\operatorname{ch}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1} + \frac{R_2-R_1}{\sqrt{R_1R_2}}\operatorname{sh}\frac{2\pi\sqrt{R_1R_2}}{R_2-R_1}\right) > 0, \quad R_2 > R_1.$$

Видим, что вторая производная функции площади ожерелья положительна при данном значении k, где $R_2 > R_1$, следовательно, функция вычисления площади ожерелья (17) принимает наименьшее значении в данной точке. Подставляя в (17) $k = \dfrac{R_2 - R_1}{4R_1R_2}l$, где $l = 2p+1,\ p \in \mathbb{Z}$, получаем формулу (2). Что и требовалось доказать. □

Автор выражает благодарность научному руководителю И.Р. Каюмову за постановку задачи и ценные советы.

Список литературы

[1] И. Д. Жижилкин, *Инверсия*, Изд-во МЦНМО, М., 2009.

[2] E. A. Avksentyev, V. Yu. Protasov, *Universal measure for Poncele-type theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. **146** (11), 4843–4854 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1090/proc/13838

[3] M. N. Gurov, M. A. Volkov, *Chains of tangent circles inscribed in curvilinear triangles*, Int. J. Geom. **7** (1), 105–118 (2018).
URL: https://ijgeometry.com/product/mikhail-n-gurov-and-makar-a-volkov-chains-of-tangent-circles-inscribed-in-curvilinear-triangles/

[4] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, ч. 1. 2-е изд., Наука, М., 1976.

[5] L. B. W. Jolley, *Summation of series.* 2nd revised ed. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publ., Inc., New York, 1961.

Райнур Рафаэлевич Газизов
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: rainurrrr2000@mail.ru

Volume 1, Issue 2
pp. 50–61 (2023)

UDC 517.54
MSC 30C70

About the maximum and minimum areas of the necklace

R.R. Gazizov

Abstract. An extreme problem related to finding the maximal and minimal areas of the set of circles inscribed into the bounded by two tangent circles.

Keywords: conformal mappings, fractional-linear mappings, extremal problems.

References

[1] I. D. Zhizhilkin, *Inversion transformation*, MCCME, M., 2009 (in Russian).

[2] E. A. Avksentyev, V. Yu. Protasov, *Universal measure for Poncele-type theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. **146** (11), 4843–4854 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1090/proc/13838

[3] M. N. Gurov, M. A. Volkov, *Chains of tangent circles inscribed in curvilinear triangles*, Int. J. Geom. **7** (1), 105–118 (2018).
URL: https://ijgeometry.com/product/mikhail-n-gurov-and-makar-a-volkov-chains-of-tangent-circles-inscribed-in-curvilinear-triangles/

[4] B. V. Shabat, *Introduction to complex analysis*, p. 1. 2nd ed., Nauka, M., 1976 (in Russian).

[5] L. B. W. Jolley, *Summation of series.* 2nd revised ed. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publ., Inc., New York, 1961.

Rainur Rafaelevich Gazizov
Kazan Federal University,
Lobachevskii Institute of Mathematics and Mechanics,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: rainurrrr2000@mail.ru

Received: 01 October 2022. Accepted: 11 May 2023. Published: 30 June 2023.

Том 1, Выпуск 2 УДК 512.552
Стр. 62–85 (2023) MSC 16S38, 16T25

Симметрии Гекке, ассоциированные с регулярными по Артину–Шельтеру алгебрами типов E и H

Н.А. Шишмаров

Аннотация. Приводятся симметрии Гекке R, для которых соответствующая алгебра $\mathbb{S}(V, R)$ является регулярной в смысле Артина–Шельтера алгеброй типа E. Кроме того, установлено, что не существует симметрий Гекке R с регулярной алгеброй $\mathbb{S}(V, R)$ типа H.

Ключевые слова: симметрии Гекке, регулярные по Артину–Шельтеру алгебры.

Введение

Симметрии Гекке являются решениями уравнения Янга–Бакстера, удовлетворяющие дополнительному квадратичному соотношению. В одной из форм уравнение Янга–Бакстера представляет собой уравнение кос.

Со всякой симметрией Гекке R согласно [1] можно связать две алгебры: $\mathbb{S}(V, R)$, $\Lambda(V, R)$. Введенные алгебры можно рассматривать как аналоги симметрической и внешней алгебр, ассоциированных с некоторым векторным пространством V. Д. И. Гуревич [1] установил ряд свойств этих алгебр при некоторых ограничениях. Он показал, что алгебры типа $\mathbb{S}(V, R)$ являются кошулевыми. Также он установил фробениусовость алгебр вида $\Lambda(V, R)$. Поэтому, учитывая фробениусовость двойственной алгебры $\mathbb{S}(V, R)^!$, заключаем, что $\mathbb{S}(V, R)$ горенштейнова конечной гомологической размерности. Кроме того, в работе [2] показано, что при ограничениях на параметр симметрии Гекке R размерности однородных компонент алгебры $\mathbb{S}(V, R)$ имеют полиномиальный рост. В случае, когда $\dim V = 3$, алгебры типа $\mathbb{S}(V, R)$ можно отнести к классу регулярных в смысле Артина–Шельтера алгебр глобальной гомологической размерности 3.

В работе М. Артина и В. Шельтера [3] была дана параметризация регулярных алгебр глобальной гомологической размерности 3 некоторым множеством тензоров, по форме которых эти алгебры были разделены на несколько типов, и для каждого типа были приведены алгебры общего положения. Однако в одном и том же типе могут содержаться неизоморфные алгебры. В работе М. Артина, Дж. Тейта и М. Ван ден Берга [4] была получена классификация этих алгебр в геометрических терминах, а в [5, 6] дан список отвечающих им тензоров.

Поступила: 28.09.2022. Принята: 11.05.2023. Опубликована: 30.06.2023.

Возникает вопрос: для заданной регулярной по Артину–Шельтеру алгебры A гомологической размерности 3 существует ли симметрия Гекке R с алгеброй $\mathbb{S}(V,R) = A$? В предлагаемой работе этот вопрос исследован для алгебр типа E и H. Дается общая формула для всех симметрий Гекке R с алгеброй $\mathbb{S}(V,R)$ типа E. Доказывается, что в случае алгебр типа H соответствующих им симметрий Гекке не существует.

Симметрии Гекке с регулярными алгебрами $\mathbb{S}(V,R)$ гомологической размерности 3 возникают в задаче о классификации квантовых аналогов группы $GL(3)$, которой был посвящен препринт [7]. В этом препринте авторы выписали в явном виде многие R-матрицы, включая матрицы, соответствующие алгебрам типа E. Однако в той постановке задачи R-матрицы классифицировались с точностью до скручивания.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 приводятся необходимые в дальнейшем изложении определения и результаты. Некоторые из результатов ранее получены в работе Д.И. Гуревича [1], а также в бескоординатной форме в препринте С.М. Скрябина [8]. В разделе 2 формулируются основные теоремы нашей работы. Разделы 3 и 4 посвящены обоснованию этих теорем.

1. Предварительные сведения

Пусть $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле, $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2, 3$. Предположим, V – конечномерное векторное пространство над $\Bbbk$, $0 \neq q \in \Bbbk$.

Определение 1. Симметрией Гекке R с параметром q на пространстве V называется невырожденный линейный оператор $R\colon V \otimes V \to V \otimes V$, удовлетворяющий следующим свойствам:

$$(R \otimes \mathrm{Id}_V)(\mathrm{Id}_V \otimes R)(R \otimes \mathrm{Id}_V) = (\mathrm{Id}_V \otimes R)(R \otimes \mathrm{Id}_V)(\mathrm{Id}_V \otimes R), \tag{1}$$

$$(R - q \cdot \mathrm{Id}_{V^{\otimes 2}})(R + \mathrm{Id}_{V^{\otimes 2}}) = 0. \tag{2}$$

Определение 2. R-симметрической алгеброй $\mathbb{S}(V,R)$ (R-кососимметрической алгеброй $\Lambda(V,R)$) называется факторалгебра алгебры $\mathbb{T}(V)$ по однородному идеалу, порожденному подпространством $\mathrm{Im}(R - q\cdot \mathrm{Id}_{V^{\otimes 2}}) \subset V^{\otimes 2}$ (соответственно $\mathrm{Ker}(R - q \cdot \mathrm{Id}_{V^{\otimes 2}}) \subset V^{\otimes 2}$).

Определение 3. Алгеброй Гекке $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n(q)$ типа A_{n-1} называется алгебра с образующими $T_1, \ldots, T_{n-1}$ и соотношениями

$$\begin{gathered} T_iT_jT_i = T_jT_iT_j, \quad |i-j| = 1, \\ T_iT_j = T_jT_i, \quad |i-j| > 1, \\ (T_i - q)(T_i + 1) = 0, \quad i,j = 1, \ldots, n-1. \end{gathered}$$

Симметрия Гекке R задает представление алгебры $\mathcal{H}_n$ на пространстве $V^{\otimes n}$ таким образом, что элементу T_i для любого $i = 1, \ldots, n-1$ соответствует линейный оператор

$$R_i^{(n)} = \mathrm{Id}_{V^{\otimes(i-1)}} \otimes R \otimes \mathrm{Id}_{V^{\otimes(n-i-1)}}.$$

Алгебра Гекке $\mathcal{H}_n$ обладает стандартным базисом $\{T_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$, где $\mathfrak{S}_n$ – симметрическая группа на n символах. Отметим, что симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$ является группой Кокстера с множеством образующих $\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$, где $\tau_i = (i, i+1)$ [9].

Обозначим через $\ell(\sigma)$ длину перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Таким образом, получим

$$\ell(\sigma) = \#\{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n, \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Пусть $e \in \mathfrak{S}_n$ – тождественная перестановка. Тогда имеем $T_e = 1, T_{\tau_i} = T_i$, где $i = 1, \dots, n$. Если $\pi, \sigma \in \mathfrak{S}_n$ такие, что $\ell(\pi\sigma) = \ell(\pi) + \ell(\sigma)$, то $T_\pi T_\sigma = T_{\pi\sigma}$.

Параболическими подгруппами в $\mathfrak{S}_n$ являются подгруппы Юнга. Пусть $\mathfrak{S}'$ – подгруппа Юнга в $\mathfrak{S}_n$. Тогда определим множество

$$\mathcal{D}(\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}') = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) < \sigma(i+1) \text{ для всех } i \text{ таких, что } \tau_i \in \mathfrak{S}'\},$$

состоящее из представителей смежных классов группы $\mathfrak{S}_n$ по подгруппе $\mathfrak{S}'$, которые имеют наименьшую длину.

Антисимметризатор $y_n \in \mathcal{H}_n$ определяется следующим образом:

$$y_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\ell(\sigma)} q^{\ell_n - \ell(\sigma)} T_\sigma,$$

где $\ell_n = n(n-1)/2$. Антисимметризатор y_n допускает представление

$$y_n = y(\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}')y(\mathfrak{S}'),$$

где

$$y(\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}') = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}(\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}')} (-1)^{\ell(\sigma)} q^{\ell_n - \ell(\mathfrak{S}') - \ell(\sigma)} T_\sigma,$$

$$y(\mathfrak{S}') = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}'} (-1)^{\ell(\sigma)} q^{\ell(\mathfrak{S}') - \ell(\sigma)} T_\sigma,$$

$$\ell(\mathfrak{S}') = \max\{\ell(\sigma) \mid \sigma \in \mathfrak{S}'\}.$$

В дальнейшем для удобства будут использоваться обозначения:

$$[n]_q = \sum_{i=1}^{n} q^{i-1}, \quad [n]!_q = \prod_{k=1}^{n} [k]_q, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]!_q}{[k]!_q [n-k]!_q}.$$

Для неотрицательных целых k, n обозначим через $\mathfrak{S}_{k,n-k} \subset \mathfrak{S}_n$ подгруппу Юнга, состоящую из перестановок, относительно которых множества $\{1, \dots, k\}$, $\{k+1, \dots, n\}$ инвариантны. Положим $y_{k,n-k} = y(\mathfrak{S}_{k,n-k})$, $y_{n/k,n-k} = y(\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{k,n-k})$. Тогда с учетом принятых обозначений получим

$$y_n = y_{n/k,n-k} y_{k,n-k}.$$

Пусть $\Upsilon^{(0)} = \Bbbk$, $\Upsilon^{(1)} = V$. Если $n > 2$, то положим

$$\Upsilon^{(n)} = \bigcap_{i=1}^{n-1} (q - T_i) V^{\otimes n}.$$

Нетрудно проверить, что $y_n V^{\otimes n} \subset \Upsilon^{(n)}$. Для неотрицательных k, l обозначим

$$\Upsilon^{(k,l)} = \Upsilon^{(k)} \otimes \Upsilon^{(l)} \subset V^{\otimes(k+l)}.$$

Предложение 4. *Векторное пространство* $\Upsilon(V,R) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Upsilon^{(k)}$ *является ассоциативной градуированной алгеброй с единицей по отношению к операции* $\star$*, определяемой формулой*

$$v \star w = y_{k+l/k,l}(vw),$$

где $v \in \Upsilon^{(k)}, w \in \Upsilon^{(l)}$*.*

Напомним основные определения теории квадратичных алгебр, подробное изложение которой можно найти в [10]. Хорошо известно, что любую ассоциативную градуированную локально конечномерную (т. е. с конечномерными однородными компонентами) алгебру $A = \Bbbk \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$, порожденную первой однородной компонентой, можно представить в виде $A \cong \mathbb{T}(A_1)/I$, для некоторого идеала I тензорной алгебры $\mathbb{T}(A_1)$. Всюду в дальнейшем для идеала I под I_j понимается его однородная компонента степени j. *Квадратичной* алгеброй называется ассоциативная градуированная локально конечномерная алгебра A, порожденная первой однородной компонентой, для которой идеал I порожден подпространством I_2, называемом пространством соотношений. Тот факт, что A – квадратичная алгебра с пространством соотношений I_2, мы будем записывать в виде $A = (A_1, I_2)$.

Для квадратичной алгебры $A = (A_1, I_2)$ через $A^! = (A_1^*, I_2^\perp)$ обозначается двойственная к A квадратичная алгебра, где $I_2^\perp$ – ортогональное дополнение к I_2 относительно билинейного спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V^{*\otimes 2} \times V^{\otimes 2} \to \Bbbk$, определенного формулой:

$$\langle f_1 \otimes f_2, v_1 \otimes v_2 \rangle := f_1(v_1) f_2(v_2).$$

В частности, алгебра $\mathbb{S}(V,R)^!$ задается идеалом алгебры $\mathbb{T}(V)$, порожденным $\Upsilon^{(2)\perp}$, поскольку $\Upsilon^{(2)} = \mathrm{Im}(R - q \cdot \mathrm{Id})$, а однородная компонента степени k этого идеала есть $\Upsilon^{(k)\perp}$.

Следующий результат был обоснован в [8] без ограничения на параметр q, а при некоторых ограничениях доказан ранее в работе [1].

Теорема 5. *Если* $\dim \Upsilon^{(n)} = 1$, $\Upsilon^{(n+1)} = 0$*, то алгебры* $\Upsilon(V,R)$*,* $\mathbb{S}(V,R)^!$ *являются фробениусовыми.*

Предположим, $A = \bigoplus_{i=0}^{n} A_i$ – градуированная фробениусова алгебра над $\Bbbk$, порожденная однородной компонентой степени 1, где $A_0 = \Bbbk$, $A_1 = V$. В дальнейшем наименьшее натуральное число n такое, что $A_n \neq 0$ будем называть длиной градуировки. Как уже было отмечено, для A справедливо представление $A \cong \mathbb{T}(V)/I$. Пусть $f \in \mathbb{T}_n(V)^*$ – линейная форма на пространстве тензоров степени n такая, что $\operatorname{Ker} f = I_n$. Напомним, что A характеризуется такой линейной формой [11]. Следуя [11], назовем форму f *квантовым детерминантом*.

Будем говорить, что линейная форма $g \in \mathbb{T}_n(V)^*$ удовлетворяет *обобщенному условию цикличности*, если существует невырожденный линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ такой, что $g(wv) = g(\varphi(v)w)$ для всех $v \in V, w \in V^{\otimes n-1}$.

Для алгебры A существует сохраняющий градуировку автоморфизм $\nu\colon A \to A$ такой, что билинейное спаривание $A_i \times A_{n-i} \to A_n$, $i = 0, \ldots, n$, обладает свойством

$$ba = \nu(a)b \quad \forall a \in A_k, \forall b \in A_{n-k},$$

где $k = 0, \ldots, n$. Автоморфизм ν является одним из *автоморфизмов Накаямы* фробениусовой алгебры A. Поэтому линейная форма f удовлетворяет обобщенному условию цикличности [11]:

$$f(wv) = f(\nu'(v)w), \quad v \in V, w \in V^{\otimes(n-1)},$$

где ν' – ограничение ν на A_1.

Сформулируем теперь общее предположение для формулироки дальнейших результатов.

Алгебра $\Upsilon(V, R)$ фробениусова с градуировкой длины n.

Пусть $t\colon \mathbb{T}_n(V^*) \to \Bbbk$ – квантовый детерминант, отвечающий фробениусовой алгебре $\mathbb{S}(V, R)^!$. Мы будем отождествлять форму t с тензором $t \in \mathbb{T}_n(V)$. Этот тензор порождает одномерное пространство $\Upsilon^{(n)}$. Обозначим через $\psi\colon V \to V$ линейный оператор, для которого двойственный оператор ψ^* является ограничением на первую однородную компоненту автоморфизма Накаямы алгебры $\mathbb{S}(V, R)^!$. Предположим, что $\dim V = m$, а $x_1, \ldots, x_m$ – фиксированный базис V. Тогда обозначим через $t_1, \ldots, t_m$ тензоры, образующие базис пространства $\Upsilon^{(n-1)}$, такие, что справедливо представление

$$t = \sum_{i=1}^{m} x_i t_i = \sum_{i=1}^{m} t_i \psi(x_i). \tag{3}$$

Обозначим через φ оператор, являющийся ограничением на первую однородную компоненту автоморфизма Накаямы алгебры $\Upsilon(V, R)$.

Сформулируем несколько результатов, имеющих фундаментальное значение для дальнейших рассуждений. Обоснование этих утверждений приведено в [8]. Однако при некоторых ограничениях на параметр q часть результатов была получена в работах [1, 7].

Предложение 6. *Существует линейный оператор $\theta \in GL(V)$ такой, что*

$$T_n \ldots T_1(vt) = t\theta(v)$$

для всех $v \in V$. Причем θ продолжается до автоморфизма алгебр $\mathbb{S}(V,R)$, $\Lambda(V,R)$.

Следующий результат описывает действие продолжений оператора $\psi^{-1}\theta$ на однородных компонентах алгебры $\Upsilon(V,R)$.

Предложение 7. *Пусть $1 \le k \le n$. Тогда*

$$\mathrm{tr}(\psi^{-1}\theta)^{\otimes k} |_{\Upsilon^{(k)}} = (-1)^{kn-k} q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q .$$

Сформулируем результат, позволяющий установить связь между введенными автоморфизмами.

Предложение 8. *Линейные операторы φ, ψ, θ попарно коммутируют, а также обладают свойствами*

1) $\psi = q^{-n-1}\varphi\theta^2$;
2) $\theta^{\otimes n}(t) = q^{n(n+1)/2} t$;
3) *φ, ψ, θ лежат в подгруппе $GL(V)$, состоящей из таких операторов η, для которых $\eta^{\otimes 2}$ коммутирует с R.*

Следующее утверждение дает правило выбора квантового детерминанта для алгебры $\Upsilon(V,R)$, которое в дальнейших рассуждениях многократно применяется.

Предложение 9. *Предположим, что $[n-1]!_q \neq 0$. Пусть $f \in \mathbb{T}_n(V)^*$ такая, что*

$$y_n(v) = [n-1]!_q f(v) t$$

для $v \in \mathbb{T}_n(V)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $f(t) = [n]_q$;
2) *линейная форма f является квантовым детерминантом для алгебры $\Upsilon(V,R)$ со свойством цикличности*
$$f(wv) = f(\varphi(v)w)$$
для всех $v \in V, w \in V^{\otimes(n-1)}$;
3) *представив тензор t в виде $t = \sum x_i t_i$ для подходящих $x_i \in V$, $t_i \in \Upsilon^{(n-1)}$, получаем*
$$\theta(v) = (-1)^{n-1} q \sum f(vt_i)\psi(x_i)$$
для всех $v \in V$.

В дополнение к перечисленным фактам докажем две леммы, носящие общий характер. Отметим также, что эти леммы существенно упрощают дальнейшие рассуждения.

Лемма 10. *Предположим, что $[n-1]!_q \neq 0$. Пусть $f \in \mathbb{T}_n(V)^*$ – квантовый детерминант для алгебры $\Upsilon(V,R)$, а W_λ – корневое подпространство оператора $\theta^{\otimes n}$, отвечающее собственному значению $\lambda \in \Bbbk$. Тогда линейная форма f обращается в нуль на подпространствах W_λ для $\lambda \neq q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.*

Доказательство. Поскольку квантовый детерминант для заданной алгебры определен с точностью до пропорциональности, то согласно предложению 9 мы можем считать, что форма f выбрана таким образом, что $y_n(v) = [n-1]!_q f(v)t$ для всех $v \in V^{\otimes 3}$.

Покажем сначала, что для любого $k > 1$ и для всех $v_1, \dots, v_k \in V$ справедливо равенство
$$v_1 \star \dots \star v_k = y_k(v_1 \dots v_k). \tag{4}$$
Доказательство проведем индукцией по k. Для $k = 2$ справедливость (4) очевидна:
$$v_1 \star v_2 = y_{2/1,1}(v_1 v_2) = y_{2/1,1} y_{1,1}(v_1 v_2) = y_2(v_1 v_2).$$
Предположив истинность равенства (4) для $k-1$, покажем, что оно справедливо для k:
$$\begin{aligned} v_1 \star v_2 \star \dots \star v_k &= y_{k/1,k-1}(v_1(v_2 \star \dots \star v_k)) = y_{k/1,k-1}(v_1 y_{k-1}(v_2 \dots v_k)) = \\ &= y_{k/1,k-1} y_{1,k-1}(v_1 v_2 \dots v_k). \end{aligned}$$
С учетом равенства $y_k = y_{k/1,k-1} y_{1,k-1}$ справедливость (4) установлена. Для $k = n$ доказанное равенство имеет вид
$$v_1 \star \dots \star v_n = y_n(v_1 \dots v_n). \tag{5}$$

Поскольку линейный оператор θ продолжается до автоморфизма алгебры $\Upsilon(V, R)$, в силу (5) получим $\theta^{\otimes n} y_n = y_n \theta^{\otimes n}$. Тензор t согласно предложению 8 является собственным вектором оператора $\theta^{\otimes n}$, отвечающий собственному значению $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Поэтому W_λ для $\lambda \neq q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ инвариантно относительно y_n и не содержат подпространство $\langle t \rangle$, отсюда, учитывая, что $y_n(V^{\otimes n}) = \langle t \rangle$, линейная форма f обращается в нуль на W_λ для всех $\lambda \neq q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. □

При $q \neq -1$ для заданной симметрии Гекке R мы определили фробениусову алгебру $\Upsilon(V, R)$, а также линейную форму $f \in \mathbb{T}_n(V)^*$ и тензор $t \in \mathbb{T}_n(V)$. В этом случае мы также можем определить идемпотентный оператор $P\colon V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ по формуле:
$$P = \frac{1}{1+q}(-R + q \cdot \mathrm{Id}). \tag{6}$$
Заметим, что тогда $R = -P + q(\mathrm{Id} - P)$, а $\operatorname{Im} P = \Upsilon^{(2)}$. Также отметим, что
$$\operatorname{Ker} P = \{ w \in V^{\otimes 2} \mid Rw = qw \}.$$

Таким образом, с R мы можем связать тройку (f, t, P). Следующая лемма дает необходимое и достаточное условие при $n = 3$ на тройку (f, t, P) для того, чтобы она соответствовала некоторой симметрии Гекке. Кроме того, лемма упрощает проверку уравнения Янга–Бакстера (1). При $q \neq -1$ обозначим через P_1 и P_2 линейные операторы на пространстве $V^{\otimes 3}$, определяемые по формулам:

$$P_1 = P \otimes \mathrm{Id}_V, \quad P_2 = \mathrm{Id}_V \otimes P.$$

Лемма 11. *Пусть $q \neq -1$, $P\colon V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ – идемпотентный оператор, $f \in \mathbb{T}_3(V)^*$ – линейная форма, удовлетворяющая обобщенному условию цикличности и $t \in \mathbb{T}_3(V)$. Предположим, что*

$$(V \otimes W) \cap (W \otimes V) = \langle t \rangle,$$

$$\operatorname{Ker} P = \{w \in V^{\otimes 2} \mid f(vw) = 0 \ \forall v \in V\},$$

где $W = \operatorname{Im} P$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) *для всех $v \in V^{\otimes 3}$ справедливо представление*

$$\Big(P_1P_2P_1 - \frac{q}{(1+q)^2}P_1\Big)v = \frac{1}{(1+q)^2}f(v)t;$$

2) *для всех $v \in V^{\otimes 3}$ справедливо представление*

$$\Big(P_2P_1P_2 - \frac{q}{(1+q)^2}P_2\Big)v = \frac{1}{(1+q)^2}f(v)t; \tag{7}$$

3) *линейный оператор $R = -P + q(\mathrm{Id} - P)$ – симметрия Гекке на V с параметром q и $y_3(v) = (1+q)f(v)t$ для всех $v \in V^{\otimes 3}$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Покажем, что оператор $P_2\colon W \otimes V \to V \otimes W$ невырожденный. Проверим сначала, что $P_2\,|_{W\otimes V}$ инъективен. Предположив противное, выберем тензоры $v_1, v_2 \in W \otimes V, v_1 \neq v_2$ такие, что $P_2v_1 = P_2v_2$. Учитывая 1), получим

$$\frac{q}{(1+q)^2}(v_1 - v_2) = \frac{1}{(1+q)^2}(f(v_1) - f(v_2))t.$$

Поскольку P_2 – идемпотентный оператор, для всех $w \in V^{\otimes 3}$ справедливо $P_2w - w \in \operatorname{Ker} P_2 = V \otimes \operatorname{Ker} P$. В силу условия леммы $f(P_2w - w) = 0$ отсюда $f(P_2w) = f(w)$ для всех $w \in V^{\otimes 3}$. Тогда $f(v_1) = f(P_2v_1) = f(P_2v_2) = f(v_2)$, значит, $v_1 = v_2$, противоречие.

Поэтому оператор $P_2\,|_{W\otimes V}$ инъективный, причем $\dim W \otimes V = \dim V \otimes W$, отсюда оператор $P_2\,|_{W\otimes V}$ биективен.

Пусть $v \in V \otimes W$, а $v' \in W \otimes V$ такой, что $P_2v' = v$. Тогда $f(v) = f(P_2v') = f(v')$. Поскольку $P_1v' = v'$, имеем

$$\Big(P_1P_2P_1 - \frac{q}{(1+q)^2}P_1\Big)v' = \Big(P_1P_2 - \frac{q}{(1+q)^2}\,\mathrm{Id}\Big)v' = \frac{1}{(1+q)^2}f(v')t = \frac{1}{(1+q)^2}f(v)t.$$

Отсюда, учитывая равенства $P_2v = v$ и $P_2t = t$, получаем

$$\Big(P_2P_1P_2 - \frac{q}{(1+q)^2}P_2\Big)v = \Big(P_2P_1 - \frac{q}{(1+q)^2}\,\mathrm{Id}\Big)v = \Big(P_2P_1 - \frac{q}{(1+q)^2}\,\mathrm{Id}\Big)P_2v'$$

$$= P_2\Big(P_1P_2 - \frac{q}{(1+q)^2}\operatorname{Id}\Big)v' = \frac{1}{(1+q)^2}f(v)t.$$

Поэтому для любого $v \in V^{\otimes 3}$ справедливо равенство

$$\Big(P_2P_1P_2 - \frac{q}{(1+q)^2}P_2\Big)v = \frac{1}{(1+q)^2}f(v)t.$$

Таким образом, справедливость соотношения 2) установлена.

Подобным образом проверяется 2) $\Rightarrow$ 1). Действительно, в силу обобщенного условия цикличности форма f обращается в нуль на подпространстве $\operatorname{Ker} P_1 = \operatorname{Ker} P \otimes V$, поэтому с учетом соотношения $P_1w - w \in \operatorname{Ker} P_1$ справедливо $f(P_1w) = f(w)$ для всех $w \in V^{\otimes 3}$. Остальные этапы доказательства абсолютно аналогичны. Поэтому эквивалентность утверждений 1) и 2) доказана.

Установим теперь, что из утверждения 3) следует справедливость утверждения 1). Предположим, что R – симметрия Гекке на V с параметром q и $y_3(v) = (1+q)f(v)t$ для всех $v \in V$. Тогда, поскольку $R = -P + q(\operatorname{Id} - P)$, элемент T_i при $i = 1, 2$ действует на $V^{\otimes 3}$ при помощи операторов $R_i^{(3)} = -P_i + q(\operatorname{Id} - P_i) = -(1+q)P_i + q\operatorname{Id}$. Так как

$$y_{3/2,1} = q^2 - qT_2 + T_1T_2, \quad y_{2,1} = q - T_1,$$

то для всех $v \in V^{\otimes 3}$ получаем

$$y_{3/2,1}v = \Big(q^2\operatorname{Id} - qR_2^{(3)} + R_1^{(3)}R_2^{(3)}\Big)\,v = \big(q^2\operatorname{Id} - q(1+q)P_1 + (1+q)^2P_1P_2\big)\,v,$$
$$y_{2,1}v = \Big(q\operatorname{Id} - R_1^{(3)}\Big)\,v = (1+q)P_1v.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_3(v) = y_{3/2,1}y_{2,1}(v) &= \big(q^2\operatorname{Id} - q(1+q)P_1 + (1+q)^2P_1P_2\big)\,(1+q)P_1v \\ &= (1+q)^3\Big(P_1P_2P_1 - \frac{q}{(1+q)^2}P_1\Big)v = (1+q)f(v)t \end{aligned}$$

для всех $v \in V^{\otimes 3}$. Таким образом, утверждение 1) выполнено. В силу уже доказанной эквивалентности 1) и 2) из 3) следует также и 2).

Пусть выполнены утверждения 1) и 2). Покажем, что тогда 3) также справедливо. Из равенств в 1) и 2) вытекает, что линейный оператор P удовлетворяет уравнению

$$P_1P_2P_1 - \frac{q}{(1+q)^2}P_1 = P_2P_1P_2 - \frac{q}{(1+q)^2}P_2$$

в алгебре $\operatorname{End}(V^{\otimes 3})$. Приведенное уравнение эквивалентно уравнению Янга–Бакстера (1) для оператора $R = -P + q(\operatorname{Id} - P)$, а соотношение (2) заведомо выполнено в силу идемпотентности оператора P. Кроме того, как уже было отмечено,

$$y_3(v) = y_{3/2,1}y_{2,1}(v) = (1+q)^3\Big(P_1P_2P_1 - \frac{q}{(1+q)^2}P_1\Big)v$$

для всех $v \in V^{\otimes 3}$. Отсюда с учетом 1) заключаем $y_3(v) = (1+q)f(v)t$ для всех $v \in V^{\otimes 3}$. Поэтому утверждение 3) выполнено. □

Предположим $A = \Bbbk \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$ – градуированная алгебра над $\Bbbk$ с конечномерными однородными компонентами. Алгебра A называется регулярной в смысле Артина–Шельтера [3] глобальной размерности d, если выполнены следующие требования:

1) A имеет конечную глобальную гомологическую размерность, $\operatorname{gldim} A = d$;
2) A имеет конечную размерность Гельфанда–Кириллова, т. е. размерности однородных компонент A имеют полиномиальный рост;
3) A – горенштейнова, т. е. пространство $\operatorname{Ext}^*_A(\Bbbk, A)$ одномерно.

В работе [3] показано, что регулярные алгебры глобальной размерности 3 задаются либо двумя образующими и двумя кубическими соотношениями, либо тремя образующими и тремя квадратичными соотношениями. В нашей работе будем иметь дело со вторым классом алгебр.

Предположим V – векторное пространство над $\Bbbk$ с базисом x_1, x_2, x_3, который мы считаем фиксированным. В дальнейшем под регулярной в смысле Артина–Шельтера алгеброй типа E и H мы будем понимать алгебры, определенные следующим образом. Регулярная в смысле Артина–Шельтера алгебра A типа E глобальной размерности 3, порожденная тремя образующими, согласно [3] представима в виде $A \cong \mathbb{T}(V)/J$, где $J = \langle t_1, t_2, t_3\rangle$ – однородный идеал, порожденный тензорами

$$t_1 = \zeta^5x_3^2 + x_1x_2 + \zeta x_2x_1, \qquad t_2 = \zeta^2x_1^2 + \zeta^3x_2x_3 + \zeta x_3x_2,$$
$$t_3 = \zeta^{-1}x_2^2 + \zeta x_1x_3 + \zeta^6x_3x_1,$$

где ζ – примитивный корень степени 9 из единицы.

Для сокращения вычислений и единообразия записи, введем обозначения:

$$t_i = \zeta^{6i-1}x_{i+2}^2 + \zeta^{3(i-1)}x_ix_{i+1} + \zeta x_{i+1}x_i$$

для всех $i = 1, 2, 3$, где индексы суммируются по модулю 3. Заметим, что мы используем такую индексацию базиса V только в случае алгебр типа E.

Согласно той же работе [3] регулярная алгебра A типа H может быть представлена в виде (избегая лишних обозначений, оставляем прежнее обозначение для идеала J и тензоров t_1, t_2, t_3) $A \cong \mathbb{T}(V)/J$ для однородного идеала $J = \langle t_1, t_2, t_3\rangle$, где тензоры

$$t_1 = x_1x_2 - \varepsilon x_2x_1, \quad t_2 = -x_1^2 + x_2x_3 - x_3x_2, \quad t_3 = x_2^2 + x_3^2,$$

$\varepsilon \in \Bbbk$ удовлетворяет соотношению $\varepsilon^2 = -1$.

2. Формулировка основных результатов

Будем пользоваться следующими соглашениями. Будем говорить, что симметрия Гекке R на пространстве V с параметром q ассоциирована с квадратичной алгеброй $A = (V, I_2)$, если $A = \mathbb{S}(V, R)$. Две симметрии Гекке R и R' на пространстве V мы считаем эквивалентными, если оператор R' сопряжен с R при помощи элементов из образа группы $GL(V)$ в группе $GL(V \otimes V)$. Заметим, что при переходе к эквивалентной симметрии Гекке параметр симметрии Гекке q не меняется.

Теорема 12. *Пусть $A = (V, J_2)$ – регулярная по Артину–Шельтеру алгебра типа E над $\Bbbk$, R – симметрия Гекке на V с параметром q, ассоциированная с A. Тогда q – примитивный корень степени 3 из единицы, а симметрия Гекке R имеет вид*

$$\begin{aligned}
R(x_i^2) &= (q + q^2\lambda\zeta^{6i+5}\xi_i)x_i^2 + q^2\lambda\zeta^{3i}\xi_i x_{i+1}x_{i+2} + q^2\lambda\zeta\xi_i x_{i+2}x_{i+1},\\
R(x_i x_{i+1}) &= (q + \lambda^2\zeta\xi_i)x_i x_{i+1} + \lambda^2\zeta^{3(i+1)}\xi_i x_{i+2}^2 + \lambda^2\zeta^{6i-4}\xi_i x_{i+1}x_i,\\
R(x_{i+1}x_i) &= (q + q\zeta^{3i}\xi_i)x_{i+1}x_i + q\zeta^{-2}\xi_i x_{i+2}^2 + q\zeta^{6i-4}\xi_i x_i x_{i+1},
\end{aligned}$$

где $\xi_i = \dfrac{1}{3}q\zeta^{6i}(1 - q\lambda\zeta^{3i+2})(1 - \zeta^6)$, причем $i = 1, 2, 3$ полагаются по модулю 3, а $\lambda \in \Bbbk$ такой, что $\lambda^3 = 1$.

Сформулируем несколько замечаний относительно последней теоремы. В условиях теоремы 12, существует шесть *различных* попарно неэквивалентных симметрий Гекке, отвечающих алгебре A. Действительно, как будет установлено в следующем разделе, в условиях теоремы 12 оператор θ является скалярным, а значит, не меняется при сопряжении. Отсюда получаем, что все указанные в теореме 12 симметрии Гекке неэквивалентны друг другу. Поэтому с учетом выбора q и λ различных и не эквивалентных друг другу симметрий Гекке, ассоциированных с A, ровно шесть.

Заметим, что при подстановке ζ^{-1} вместо ζ в выражения для соотношений t_i рассматриваемой алгебры типа E, где $i = 1, 2, 3$, мы также получим регулярную алгебру типа E, которая не изоморфна исходной. Согласно [5] любая регулярная алгебра типа E изоморфна одной из этих двух алгебр.

Отметим также, что изоморфным алгебрам отвечают эквивалентные симметрии Гекке. Другими словами, если R – симметрия Гекке на V, ассоциированная с алгеброй $A = (V, I_2)$, то для всякой квадратичной алгебры $A' = (V, I_2')$, изоморфной A, существует линейный оператор $R' \in GL(V \otimes V)$, который получается из R при помощи сопряжения элементами из образа группы $GL(V)$ в $GL(V \otimes V)$.

Таким образом, мы получаем по шесть различных неэквивалентных друг другу симметрий Гекке для каждой из двух неизоморфных алгебр типа E. Справедливо

Следствие 13. Существует ровно двенадцать различных попарно неэквивалентных симметрий Гекке R, для которых алгебра $\mathbb{S}(V, R)$ является регулярной по Артину–Шельтеру типа E.

Однако, как показывает следующая теорема, не для всех типов регулярных алгебр существуют ассоциированные с ними симметрии Гекке.

Теорема 14. *Не существует симметрии Гекке R на V такой, что алгебра $\mathbb{S}(V,R)$ является регулярной в смысле Артина–Шельтера типа H.*

3. Доказательство теоремы 12

Предположим, что R – симметрия Гекке на пространстве V с параметром q, отвечающая регулярной алгебре $A = (V, J_2)$ типа E.

В соответствии с принятыми в предыдущем разделе обозначениями получаем $\Upsilon^{(2)} = \langle t_1, t_2, t_3\rangle$, $\Upsilon^{(3)} = \langle t\rangle$, где

$$t = x_1^2x_2 + \zeta x_1x_2x_1 + \zeta^2 x_2x_1^2 + \zeta^3 x_2^2x_3 + \zeta x_2x_3x_2 + \zeta^{-1}x_3x_2^2 + \zeta^6 x_3^2x_1 + \zeta x_3x_1x_3 + \zeta^5 x_1x_3^2.$$

Учитывая представления в соответствии с (3)

$$t = x_1t_1 + x_2t_2 + x_3t_3 = \zeta t_1x_1 + \zeta^{-2}t_2x_2 + \zeta^4 t_3x_3,$$

получаем, что оператор ψ действует на пространстве V следующим образом: $\psi(x_i) = \beta_i x_i$, где $\beta_i = \zeta^{6i+4}$. В силу предложения 8 операторы θ и φ диагонализируемы, а векторы x_1, x_2, x_3 представляют собой собственные векторы этих операторов. Тогда для некоторых ненулевых $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Bbbk$ и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Bbbk$ получим $\theta(x_i) = \lambda_i x_i$ и $\varphi(x_i) = \alpha_i x_i$, $i = 1, 2, 3$.

Поскольку по предложению 9 $\theta^{\otimes 3}(t) = q^6 t$, получим систему уравнений, связывающую $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\lambda_1^2\lambda_2 = q^6, \quad \lambda_2^2\lambda_3 = q^6, \quad \lambda_3^2\lambda_1 = q^6. \tag{8}$$

Отсюда получаем $\lambda_i^2 = \lambda_{i+1}\lambda_{i+2}$, $i = 1, 2, 3$. Тогда справедливо $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = \lambda_3^3$. Поэтому $\theta^{\otimes 2}(t_i) = \lambda_{i+2}^2 t_i$.

В соответствии с предложением 7 $\operatorname{tr}\psi^{-1}\theta\,|_{\Upsilon^{(1)}} = q[3]_q, \operatorname{tr}(\psi^{-1}\theta)^{\otimes 2}\,|_{\Upsilon^{(2)}} = q^3[3]_q$, тогда

$$\zeta^{-1}\lambda_1 + \zeta^2\lambda_2 + \zeta^5\lambda_3 = q[3]_q, \tag{9}$$

$$\zeta^{-2}\lambda_1^2 + \zeta^4\lambda_2^2 + \zeta\lambda_3^2 = q^3[3]_q. \tag{10}$$

Поскольку $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = \lambda_3^3$, справедливо представление $\lambda_i = \varepsilon^{i-1}a$, где $0 \neq a \in \Bbbk$, а ε – корень степени 3 из единицы. Если $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = \zeta^3$, то в силу (9) получим $[3]_q = 0$, значит, q – примитивный корень степени 3 из единицы. Пусть теперь $\varepsilon = \zeta^6$. Тогда из равенств (9), (10) следует $q^2 = a\zeta^8$. Отсюда согласно (9) получим $q = 1$. Отметим также, что тогда из соотношений (8) следует $a^3\varepsilon = 1$. Таким образом, вне зависимости от выбора ε параметр q – корень степени 3 из единицы.

Поскольку по предложению 8 $\psi = q^{-1}\varphi\theta^2$, получаем соотношение $\beta_i = q^{-1}\alpha_i\lambda_i^2$, от-

сюда
$$\alpha_i = \frac{q\beta_i}{\lambda_i^2}. \tag{11}$$

Без ограничения общности предполагаем $q \neq -1$. Обозначим через $f \in \mathbb{T}_3(V)^*$ форму такую, что $y_3(v) = (1+q)f(v)t$ для всех $v \in V^{\otimes 3}$. Согласно предложению 9 форма f является квантовым детерминантом фробениусовой алгебры $\Upsilon(V, R)$.

Лемма 10 позволяет сделать вывод о том, на каких мономах линейная форма f обращается в нуль. В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ по (9) заключаем, что q – примитивный корень степени 3 из единицы, поэтому согласно соотношениям (8) $\lambda^3 = 1$. Затем в соответствии с формулой (11) получаем $\alpha_i = q\lambda\zeta^{6i-5}$. Поскольку для всех $i = 1, 2, 3$ справедливы соотношения
$$\alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_{i+2} = \zeta^3 \neq 1, \quad \alpha_i^2\alpha_{i+2} = \zeta^6 \neq 1, \quad \alpha_i \neq 1,$$
с учетом цикличности формы f получаем, что f обращается в нуль на мономах с весом, отличным от (2, 1, 0), (0, 2, 1), (1, 0, 2). В случае $\lambda_i = a\varepsilon^{i-1}$, где $0 \neq a \in \mathbb{k}$, а $\varepsilon \neq 1$, имеем
$$\lambda_i^2\lambda_{i+2} = q^6\frac{\lambda_{i+2}}{\lambda_{i+1}}, \quad \lambda_i\lambda_{i+1}\lambda_{i+2} = q^6\frac{\lambda_{i+2}}{\lambda_i}.$$
Отсюда $\lambda_i^2\lambda_{i+2} \neq q^6$ и $\lambda_i\lambda_{i+1}\lambda_{i+2} \neq q^6$, поскольку в противном случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, что невозможно. Кроме того, справедливо $\lambda_i^3 = a \neq 1$, иначе с учетом равенства $a^3\varepsilon = 1$ получаем $\varepsilon = 1$. Поэтому в силу леммы 10 в этом случае также форма f обращается в нуль на мономах, вес которых отличен от (2, 1, 0), (0, 2, 1), (1, 0, 2). Таким образом, в любом случае линейная форма f обращается в нуль на всех мономах, чей вес отличен от (2, 1, 0), (0, 2, 1), (1, 0, 2).

Введем обозначения: $\xi_i = f(x_i^2x_{i+1})$, где $i = 1, 2, 3$. Отметим несколько свойств формы f. В силу предложения 9, а также учитывая диагонализируемость ψ, заключаем
$$\theta(x_i) = q\sum_j f(x_it_j)\beta_jx_j,$$
отсюда в силу диагонализируемости θ получим $f(x_it_i) = q^{-1}\beta^{-1}\lambda_i$, а для $i \neq j$ выполнено $f(x_it_j) = 0$. Также, поскольку форма f согласно предложению 9 является квантовым детерминантом для $\Upsilon(V, R)$, она удовлетворяет обобщенному условию цикличности. Поэтому во введенных обозначениях имеет место формула
$$f(x_it_i) = f(x_i(\zeta^{6i-1}x_{i+2}^2 + \zeta^{3(i-1)}x_ix_{i+1} + \zeta x_{i+1}x_i)) = \zeta^{6i-1}\alpha_{i+2}^2\xi_{i+2} + \zeta^{3(i-1)}\xi_i + \zeta\alpha_i\xi_i.$$
Таким образом, равенство $f(x_it_i) = q^{-1}\beta^{-1}\lambda_i$ записывается в виде
$$(\zeta^{3(i-1)} + \alpha_i\zeta)\xi_i + \alpha_{i+2}^2\zeta^{6i-1}\xi_{i+2} = q^2\lambda_i\zeta^{3i+5}. \tag{12}$$

Пусть $P\colon V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ – идемпотентный линейный оператор, определенный по R

согласно формуле (6). Таким образом, R отвечает тройка (f, t, P).

Мы можем представить алгебру $\Upsilon(V, R)$ в виде $\Upsilon(V, R) \cong \mathbb{T}(V)/I$. Так как f – квантовый детерминант для $\Upsilon(V, R)$, то однородную компоненту I_2 мы можем восстановить по f следующим образом:

$$I_2 = \{w \in V^{\otimes 2} \mid f(vw) = 0\, \forall v \in V\} = \{w \in V^{\otimes 2} \mid y_3(vw) = 0\, \forall v \in V\}.$$

Затем, для $v \in V$ и $w \in V^{\otimes 2}$ справедливо

$$y_3(vw) = y_{3/1,2}y_{1,2}(vw) = y_{3/1,2}(vy_2(w)) = v \star y_2(w).$$

Если для некоторого $0 \neq w \in V^{\otimes 2}$ и всех $v \in V$ выполняется $y_3(vw) = 0$, то в силу невырожденности спаривания, индуцированного умножением $\star$ в алгебре $\Upsilon(V, R)$, заключаем, что $y_2(w) = 0$. Поэтому компонента I_2 представима в виде

$$I_2 = \{w \in V^{\otimes 2} \mid y_2(w) = 0\} = \{w \in V^{\otimes 2} \mid Rw = qw\} = \operatorname{Ker} P.$$

Отсюда мы делаем вывод, что $\operatorname{Ker} P = \{w \in V^{\otimes 2} \mid f(vw) = 0\, \forall v \in V\}$.

Таким образом, тройка (f, t, P) удовлетворяет условию леммы 11. Поэтому для того, чтобы R являлась симметрией Гекке, необходимым и достаточным условием является выполнение равенства (7). В силу своих свойств для оператора P справедлива формула:

$$P(v) = \sum_i \frac{1}{f(x_i t_i)} f(x_i v) t_i, \quad v \in V^{\otimes 2}.$$

Найдем значения оператора P на мономиальном базисе $V^{\otimes 2}$. Получим

$$P(x_i^2) = \frac{1}{\lambda_i^2}\xi_i t_{i+1}, \quad P(x_i x_{i+1}) = \frac{q}{\lambda_i}\zeta^{6i-5}\xi_i t_i, \quad P(x_{i+1}x_i) = \frac{q^2}{\lambda_i^3}\zeta^{3i-1}\xi_i t_i.$$

Равенство (7) эквивалентно соотношению

$$\Big(P_2P_1 - \frac{q}{(1+q)^2} \cdot \mathrm{Id}\Big)v = \frac{1}{(1+q)^2} f(v)t \tag{13}$$

для всех $v \in \Upsilon^{(1,2)}$. Поэтому соотношение (13) для образующих пространства $\Upsilon^{(1,2)}$ можно записать в виде

$$P_2P_1 x_i t_i - \frac{q}{(1+q)^2} x_i t_i = \frac{1}{q(1+q)^2\beta_i}\lambda_i t, \tag{14}$$

$$P_2P_1 x_i t_j - \frac{q}{(1+q)^2} x_i t_j = 0, \quad i \neq j, \tag{15}$$

где $i = 1, 2, 3$.

Линейные операторы P_1, P_2 действуют на базисных тензорах пространств $\Upsilon^{(1,2)}$, $\Upsilon^{(2,1)}$

следующим образом:

$$\begin{aligned}
P_1x_it_i &= \frac{q^2}{\lambda_{i+2}^3}\zeta^4\xi_{i+2}t_{i+2}x_{i+2} + \frac{1}{\lambda_i^2}\xi_i\zeta^{3i-3}t_{i+1}x_{i+1} + \frac{q}{\lambda_i}\zeta^{6i-4}\xi_it_ix_i,\\
P_1x_{i+1}t_i &= \frac{q}{\lambda_{i+1}}\zeta^{3i}\xi_{i+1}t_{i+1}x_{i+2} + \frac{q^2}{\lambda_i^3}\zeta^{6i-4}\xi_it_ix_{i+1} + \frac{1}{\lambda_{i+1}^2}\zeta\xi_{i+1}t_{i+2}x_i,\\
P_1x_{i+2}t_i &= \frac{1}{\lambda_{i+2}^2}\zeta^{6i-1}\xi_{i+2}t_ix_{i+2} + \frac{q}{\lambda_{i+2}}\xi_{i+2}\zeta^4t_{i+2}x_{i+1} + \frac{q^2}{\lambda_{i+1}^3}\zeta^{3i+3}\xi_{i+1}t_{i+1}x_i,\\
P_2t_ix_i &= \frac{q}{\lambda_{i+2}}\zeta^{3i-3}\xi_{i+2}x_{i+2}t_{i+2} + \frac{q^2}{\lambda_i^3}\zeta^{6i-4}\xi_ix_it_i + \frac{1}{\lambda_i^2}\zeta\xi_ix_{i+1}t_{i+1},\\
P_2t_ix_{i+1} &= \frac{q^2}{\lambda_{i+1}^3}\zeta\xi_{i+1}x_{i+2}t_{i+1} + \frac{1}{\lambda_{i+1}^2}\zeta^{3i-3}\xi_{i+1}x_it_{i+2} + \frac{q}{\lambda_i}\zeta^{6i-4}\xi_ix_{i+1}t_i,\\
P_2t_ix_{i+2} &= \frac{1}{\lambda_{i+2}^2}\zeta^{6i-1}\xi_{i+2}x_{i+2}t_i + \frac{q}{\lambda_{i+1}}\zeta^7\xi_{i+1}x_it_{i+1} + \frac{q^2}{\lambda_{i+2}^3}\zeta^{3i+6}\xi_{i+2}x_{i+1}t_{i+2}.
\end{aligned}$$

Далее вычислим

$$\begin{aligned}
P_2P_1x_{i+1}t_i &= \frac{q}{\lambda_{i+1}}\zeta^{3i}\xi_{i+1}\Big(\frac{q^2}{\lambda_{i+2}^3}\zeta\xi_{i+2}x_it_{i+2} + \frac{1}{\lambda_{i+2}^2}\zeta^{3i}\xi_{i+2}x_{i+1}t_i + \frac{q}{\lambda_{i+1}}\zeta^{6i+2}\xi_{i+1}x_{i+2}t_{i+1}\Big)\\
&\quad + \frac{q^2}{\lambda_i^3}\zeta^{6i-4}\xi_i\Big(\frac{q^2}{\lambda_{i+1}^3}\zeta\xi_{i+1}x_{i+2}t_{i+1} + \frac{1}{\lambda_{i+1}^2}\zeta^{3i-3}\xi_{i+1}x_it_{i+2} + \frac{q}{\lambda_i}\zeta^{6i-4}\xi_ix_{i+1}t_i\Big)\\
&\quad + \frac{1}{\lambda_{i+1}^2}\zeta\xi_{i+1}\Big(\frac{q^2}{\lambda_i^3}\zeta\xi_ix_{i+1}t_i + \frac{1}{\lambda_i^2}\zeta^{3i+3}\xi_ix_{i+2}t_{i+1} + \frac{q}{\lambda_{i+2}}\zeta^{6i-1}\xi_{i+2}x_it_{i+2}\Big)\\
&= \Big(\frac{1}{\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}^3}\zeta^{3i+1}\xi_{i+1}\xi_{i+2} + \frac{q^2}{\lambda_i^3\lambda_{i+1}^2}\zeta^2\xi_i\xi_{i+1} + \frac{q}{\lambda_{i+1}^2\lambda_{i+2}}\zeta^{6i}\xi_{i+1}\xi_{i+2}\Big)x_it_{i+2}\\
&\quad + \Big(\frac{q}{\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}^2}\zeta^{6i}\xi_{i+1}\xi_{i+2} + \frac{1}{\lambda_i^4}\zeta^{3i+1}\xi_i^2 + \frac{q^2}{\lambda_i^3\lambda_{i+1}^2}\zeta^2\xi_i\xi_{i+1}\Big)x_{i+1}t_i\\
&\quad + \Big(\frac{q^2}{\lambda_{i+1}^2}\zeta^2\xi_{i+1}^2 + \frac{q}{\lambda_i^3\lambda_{i+1}^3}\zeta^{6i-3}\xi_i\xi_{i+1} + \frac{1}{\lambda_i^2\lambda_{i+1}^2}\zeta^{3i+4}\xi_i\xi_{i+1}\Big)x_{i+2}t_{i+1}; \qquad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2P_1x_it_i &= \frac{q^2}{\lambda_{i+2}^3}\zeta^4\xi_{i+2}\Big(\frac{q}{\lambda_{i+1}}\zeta^{3i+3}\xi_{i+1}x_{i+1}t_{i+1} + \frac{q^2}{\lambda_{i+2}^3}\zeta^{6i-1}\xi_{i+2}x_{i+2}t_{i+2} + \frac{1}{\lambda_{i+2}^2}\zeta\xi_{i+2}x_it_i\Big)\\
&\quad + \frac{1}{\lambda_i^2}\zeta^{3i-3}\xi_i\Big(\frac{q}{\lambda_i}\zeta^{3i}\xi_ix_it_i + \frac{q^2}{\lambda_{i+1}^3}\zeta^{6i+2}\xi_{i+1}x_{i+1}t_{i+1} + \frac{1}{\lambda_{i+1}^2}\zeta\xi_{i+1}x_{i+2}t_{i+2}\Big)\\
&\quad + \frac{q}{\lambda_i}\zeta^{6i-4}\xi_i\Big(\frac{q}{\lambda_{i+2}}\zeta^{3i-3}\xi_{i+2}x_{i+2}t_{i+2} + \frac{q^2}{\lambda_i^3}\zeta^{6i-4}\xi_ix_it_i + \frac{1}{\lambda_i^2}\zeta\xi_ix_{i+1}t_{i+1}\Big)\\
&= \Big(\frac{q^2}{\lambda_{i+2}^5}\zeta^5\xi_{i+2}^2 + \frac{q}{\lambda_i^3}\zeta^{6i-3}\xi_i^2 + \frac{1}{\lambda_i^4}\zeta^{3i+1}\xi_i^2\Big)x_it_i\\
&\quad + \Big(\frac{1}{\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}^3}\zeta^{3i-2}\xi_{i+1}\xi_{i+2} + \frac{q^2}{\lambda_i^2\lambda_{i+1}^3}\zeta^{-1}\xi_i\xi_{i+1} + \frac{q}{\lambda_i^3}\zeta^{6i-3}\xi_i^2\Big)x_{i+1}t_{i+1}
\end{aligned}$$

$$+\Big(\frac{q}{\lambda_{i+2}^6}\zeta^{6i+3}\xi_{i+2}^2+\frac{1}{\lambda_i^2\lambda_{i+1}^2}\zeta^{3i-2}\xi_i\xi_{i+1}+\frac{q^2}{\lambda_i\lambda_{i+2}}\zeta^2\xi_i\xi_{i+2}\Big)x_{i+2}t_{i+2}; \tag{17}$$

$$\begin{aligned}P_2P_1x_{i+2}t_i &= \frac{1}{\lambda_{i+2}^2}\zeta^{6i-1}\xi_{i+2}\Big(\frac{1}{\lambda_{i+2}^2}\zeta^{6i-1}\xi_{i+2}x_{i+2}t_i+\frac{q}{\lambda_{i+1}}\zeta^7\xi_{i+1}x_it_{i+1}+\frac{q^2}{\lambda_{i+2}^3}\zeta^{3i+6}\xi_{i+2}x_{i+1}t_{i+2}\Big)\\ &\quad+\frac{q}{\lambda_{i+2}}\xi_{i+2}\zeta^4\Big(\frac{1}{\lambda_{i+1}^2}\zeta^{6i+2}\xi_{i+1}x_{i+1}t_{i+2}+\frac{q}{\lambda_i}\zeta^7\xi_ix_{i+2}t_i+\frac{q^2}{\lambda_{i+1}^3}\zeta^{3i+3}\xi_{i+1}x_it_{i+1}\Big)\\ &\quad+\frac{q^2}{\lambda_{i+1}^3}\zeta^{3i+3}\xi_{i+1}\Big(\frac{1}{\lambda_i^2}\zeta^{6i+5}\xi_ix_it_{i+1}+\frac{q}{\lambda_{i+2}}\zeta^7\xi_{i+2}x_{i+1}t_{i+2}+\frac{q^2}{\lambda_i^3}\zeta^{3i}\xi_ix_{i+2}t_i\Big)\\ &=\Big(\frac{1}{\lambda_{i+2}^4}\zeta^{3i-2}\xi_{i+2}^2+\frac{q^2}{\lambda_i\lambda_{i+2}}\zeta^2\xi_i\xi_{i+2}+\frac{q}{\lambda_i^3\lambda_{i+1}^3}\zeta^{6i+3}\xi_i\xi_{i+1}\Big)x_{i+2}t_i\\ &\quad+\Big(\frac{q}{\lambda_{i+2}^2\lambda_{i+1}}\zeta^{6i+6}\xi_{i+1}\xi_{i+2}+\frac{1}{\lambda_{i+1}^3\lambda_{i+2}}\zeta^{3i+7}\xi_{i+1}\xi_{i+2}+\frac{q^2}{\lambda_i^2\lambda_{i+1}^3}\zeta^8\xi_i\xi_{i+1}\Big)x_it_{i+1}\\ &\quad+\Big(\frac{q^2}{\lambda_{i+2}^5}\zeta^5\xi_{i+2}^2+\frac{q}{\lambda_{i+1}^2\lambda_{i+2}}\zeta^{6i+6}\xi_{i+1}\xi_{i+2}+\frac{1}{\lambda_{i+1}^3\lambda_{i+2}}\zeta^{3i+1}\xi_{i+1}\xi_{i+2}\Big)x_{i+1}t_{i+2}.\end{aligned} \tag{18}$$

В силу (15), учитывая полученное выражение (16), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{q}{\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}^2}\zeta^{6i}\xi_{i+1}\xi_{i+2}+\frac{1}{\lambda_i^4}\zeta^{3i+1}\xi_i^2+\frac{q^2}{\lambda_i^3\lambda_{i+1}^2}\zeta^2\xi_i\xi_{i+1}-\frac{q}{(1+q)^2}=0,\\ \frac{1}{\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}^3}\zeta^{3i+1}\xi_{i+1}\xi_{i+2}+\frac{q^2}{\lambda_i^3\lambda_{i+1}^2}\zeta^2\xi_i\xi_{i+1}+\frac{q}{\lambda_{i+1}^2\lambda_{i+2}}\zeta^{6i}\xi_{i+1}\xi_{i+2}=0,\\ \frac{q^2}{\lambda_{i+1}^2}\zeta^2\xi_{i+1}^2+\frac{q}{\lambda_i^3\lambda_{i+1}^3}\zeta^{6i-3}\xi_i\xi_{i+1}+\frac{1}{\lambda_i^2\lambda_{i+1}^2}\zeta^{3i+4}\xi_i\xi_{i+1}=0.\end{gathered}$$

Отметим, что для всех $i=1,2,3$ параметры $\xi_i\neq 0$, поскольку в противном случае из уравнений последней системы следует $\xi_i=0$ для всех $i=1,2,3$, что говорит о том, что форма f нулевая. Поделив два последних уравнения на ξ_{i+1}, далее, сделав циклическую перестановку индексов в одном из них, придем к следующей однородной системе уравнений:

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{\lambda_{i+2}\lambda_i^3}\zeta^{3i+4}+\frac{q}{\lambda_{i+2}^2\lambda_i}\zeta^{6i+6}\right)\xi_i+\frac{q^2}{\lambda_{i+1}^3\lambda_{i+2}^2}\zeta^2\xi_{i+1}=0,\\ \left(\frac{1}{\lambda_i^2\lambda_{i+1}^2}\zeta^{3i+4}+\frac{q}{\lambda_i^3\lambda_{i+1}^3}\zeta^{6i-3}\right)\xi_i+\frac{q^2}{\lambda_{i+1}^2}\zeta^2\xi_{i+1}=0.\end{gathered}$$

Определитель этой системы равен

$$\left(\frac{q^2}{\lambda_i^3\lambda_{i+1}^2\lambda_{i+2}}-\frac{q^2}{\lambda_i^2\lambda_{i+1}^5\lambda_{i+2}^2}\right)\zeta^{3i+6}+\left(\frac{1}{\lambda_i\lambda_{i+1}^2\lambda_{i+2}^2}-\frac{1}{\lambda_i^3\lambda_{i+1}^6\lambda_{i+2}^2}\right)\zeta^{6i+8}$$

$$= q^2\zeta^{3i+6}\left(\frac{1}{\lambda_i^3}-1\right)+\zeta^{6i+8}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{1}{\lambda_{i+2}}-\frac{1}{\lambda_{i+1}}\right). \qquad (19)$$

Потребуем, чтобы определитель (19) для каждого из случаев $\varepsilon=\zeta^3$ и $\varepsilon=\zeta^6$ обращался в нуль. Непосредственной проверкой убеждаемся, что в случае $\varepsilon=\zeta^6$ это требование выполнено. Рассмотрим случай $\lambda_i=a\varepsilon^{i-1}$ при $\varepsilon=\zeta^3$. Тогда $\lambda_i=a\zeta^{3i+6}$, поэтому, обращаясь к выражению (19), получим соотношение

$$q^2\left(\frac{1}{a^3}-1\right)+\zeta^{3i+2}\frac{1}{a^2}\zeta^{6i+3}\left(\zeta^{6i+6}-\zeta^{6i}\right)=0.$$

После преобразований получим

$$\frac{1}{a^2}\zeta^{6i+5}\left(1-\zeta^6\right)=q^2\left(\frac{1}{a^3}-1\right).$$

Последнее соотношение содержит в левой части зависимость от индекса i, когда правая от него не зависит. Полученное соотношения приводит к противоречию.

Положим теперь $\varepsilon=\zeta^6$. В этом случае, как уже было отмечено, параметр $q=1$, а $a=\zeta$. Тогда $\alpha_i=\zeta^{3i+5}$, а соотношение (12) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned}2\xi_1+\zeta^6\xi_3&=1,\\ \xi_1+2\zeta^3\xi_2&=1,\\ \zeta^3\xi_2+2\zeta^6\xi_3&=1.\end{aligned}$$

Решая ее, получаем $\xi_i=\dfrac{1}{3}\zeta^{6i+3}$. Подставим найденные параметры ξ_i в первое уравнение системы (3). Получаем

$$\frac{1}{9}\zeta^{6i+3}\cdot\zeta^{6i}\cdot\zeta^{6i+6}+\frac{1}{9}\zeta^{6i+3}\cdot\zeta^{3i+6}+\frac{1}{9}\zeta^{6i+6}\cdot\zeta^{6i+3}\cdot\zeta^{6i}-\frac{1}{4}=0.$$

Приходим также к противоречию.

Таким образом, случай $\lambda_i=a\varepsilon^{i-1}$ для $\varepsilon\neq 1$ невозможен.

Рассмотрим случай $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$, т.е. $\theta=\lambda\cdot\mathrm{Id}_V$, где $\lambda\in\Bbbk$, причем, как уже было замечено, в силу (9) q – примитивный корень степени 3 из единицы и по (8) справедливо $\lambda^3=1$. Тогда система уравнений, полученная из условия (15) для выражения (16), эквивалентна подобной системе для выражения (18). Они переходят друг в друга при помощи подходящей перестановки индексов и домножения на степени ζ уравнений этих систем. Таким образом, нам остается применить оба условия (14), (15) для выражений (16) и (17). Получаем

$$\begin{gathered}\left(q\zeta^{6i-3}+\lambda^2\zeta^{3i+1}\right)\xi_i^2+q^2\lambda\zeta^5\xi_{i+2}^2-1=q\lambda\zeta^{3i+5},\\ q\zeta^{6i-3}\xi_i^2+q^2\lambda\zeta^{-1}\xi_i\xi_{i+1}+\lambda^2\zeta^{3i-2}\xi_{i+1}\xi_{i+2}=q\lambda\zeta^{3i+5},\end{gathered}$$

$$q\zeta^{6i+3}\xi_{i+2}^2 + \lambda^2\zeta^{3i-2}\xi_i\xi_{i+1} + q^2\lambda\zeta^2\xi_i\xi_{i+2} = q\lambda\zeta^{3i+5};$$

$$\begin{gathered}
q\zeta^{6i}\xi_{i+1}\xi_{i+2} + \lambda^2\zeta^{3i+1}\xi_i^2 + q^2\lambda\zeta^2\xi_i\xi_{i+1} - 1 = 0,\\
\lambda^2\zeta^{3i+1}\xi_{i+1}\xi_{i+2} + q^2\lambda\zeta^2\xi_i\xi_{i+1} + q\zeta^{6i}\xi_{i+1}\xi_{i+2} = 0,\\
q^2\lambda\zeta^2\xi_{i+1}^2 + q\zeta^{6i-3}\xi_i\xi_{i+1} + \lambda^2\zeta^{3i+4}\xi_i\xi_{i+1} = 0.
\end{gathered} \tag{20}$$

Уравнение (20) разделим на $\xi_{i+1} \neq 0$. Затем произведем циклическую перестановку индексов $i \mapsto i+1$ у переменных ξ_i в уравнении (12). Тогда полученное с учетом подстановки $\alpha_i = q\lambda\zeta^{6i+4}$ уравнение вместе с (20) образуют систему линейных уравнений относительно ξ_i, ξ_{i+1}. Решая эту систему из двух уравнений, находим ξ_i. В силу того, что нумерация индексов ведется по модулю 3, мы сразу находим ξ_i для всех $i = 1, 2, 3$. Таким образом, получаем некоторое решение, убеждаясь, что найденное решение удовлетворяет всем остальным уравнениям двух систем. Полученное решение имеет вид

$$\xi_i = \frac{1}{3}q\zeta^{6i}\left(1 - q\lambda\zeta^{3i+2}\right)\left(1 - \zeta^6\right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Линейный оператор R восстанавливается по оператору P естественным образом по формуле $R = -P + q(\mathrm{Id} - P)$. Таким образом, получим симметрию Гекке R

$$\begin{aligned}
R(x_i^2) &= \left(q + q^2\lambda\zeta^{6i+5}\xi_i\right)x_i^2 + q^2\lambda\zeta^{3i}\xi_i x_{i+1}x_{i+2} + q^2\lambda\zeta\xi_i x_{i+2}x_{i+1},\\
R(x_i x_{i+1}) &= \left(q + \lambda^2\zeta\xi_i\right)x_i x_{i+1} + \lambda^2\zeta^{3(i+1)}\xi_i x_{i+2}^2 + \lambda^2\zeta^{6i-4}\xi_i x_{i+1}x_i,\\
R(x_{i+1}x_i) &= \left(q + q\zeta^{3i}\xi_i\right)x_{i+1}x_i + q\zeta^{-2}\xi_i x_{i+2}^2 + q\zeta^{6i-4}\xi_i x_i x_{i+1}.
\end{aligned}$$

□

4. Доказательство теоремы 14

Предположим, что R – симметрия Гекке на пространстве V с параметром q, отвечающая регулярной алгебре $A = (V, J_2)$ типа H. Соответствующие векторам x_1, x_2, x_3 собственные значения оператора ψ обозначим через $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

В соответствии с обозначениями раздела 1, тензор t имеет вид:

$$t = x_1^2x_2 - \varepsilon x_1x_2x_1 - x_2x_1^2 + x_2^2x_3 - x_2x_3x_2 + x_3x_2^2 + x_3^3.$$

Поскольку справедливы представления

$$t = x_1t_1 + x_2t_2 + x_3t_3 = -\varepsilon t_1x_1 + (-1)t_2x_2 + t_3x_3,$$

собственные значения оператора ψ, отвечающие собственным векторам x_1, x_2, x_3, равны соответственно $-\varepsilon, -1, 1$. По предложению 8 операторы θ и φ диагонализируемы, а векторы x_1, x_2, x_3 представляют собой собственные векторы операторов θ и φ. Собственные значения оператора θ, соответствующие x_1, x_2, x_3, обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно. Пусть $\varphi(x_i) = \alpha_i x_i$, $i = 1, 2, 3$, для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Bbbk$.

Поскольку $\theta^{\otimes 3}(t) = q^6 t$, справедливы следующие уравнения:

$$\lambda_1^2\lambda_2 = q^6, \quad \lambda_2^2\lambda_3 = q^6, \quad \lambda_3^3 = q^6. \tag{21}$$

Согласно (21) выполнено $\lambda_1^2 = \lambda_2\lambda_3, \lambda_2^2 = \lambda_3^2$.

Тогда равенства $\operatorname{tr}\psi^{-1}\theta \mid_{\Upsilon^{(1)}} = q[3]_q, \operatorname{tr}(\psi^{-1}\theta)^{\otimes 2} \mid_{\Upsilon^{(2)}} = q^3[3]_q$ примут вид

$$\varepsilon\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = q(1 + q + q^2), \tag{22}$$

$$-\varepsilon\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2 + \lambda_3^2 = q^3(1 + q + q^2). \tag{23}$$

Предположим, что $[3]_q \neq 0$. Умножив на λ_2 уравнение (22), затем прибавив к уравнению (23), с учетом соотношений (21) получим $\lambda_2 = -q^2$. Тогда согласно (21) $\lambda_3 = q^2, \lambda_1^2 = -q^4$. Поэтому на основании формулы (22) можем полагать $q \neq -1$.

Пусть $f \in \mathbb{T}_3(V^*)$ – линейная форма, определенная равенством $y_3(v) = (1 + q)f(v)t$ для всех $v \in V^{\otimes 3}$. Отметим, что поскольку форма f согласно предложению 9 является квантовым детерминантом для $\Upsilon(V, R)$, она удовлетворяет обобщенному условию цикличности. По формуле $\beta_i = q^{-4}\alpha_i\lambda_i^2$ получим $\alpha_1 = \varepsilon$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$. Так как

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\varepsilon \neq 1, \quad \alpha_i^2\alpha_j \neq 1$$

при всех $(i, j) \neq (1, 2), (2, 3)$, то с учетом обобщенной цикличности форма f обращается в нуль на мономах, чей вес отличен от (2, 1, 0), (0, 2, 1), (0, 0, 3). Поскольку $q \neq -1$, по предложению 9 справедливо равенство $f(x_i t_i) = q^{-1}\beta_i^{-1}\lambda_i$, которое эквивалентно следующей системе:

$$2\xi_1 = \lambda_1\varepsilon q^{-1},$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 = q,$$

$$\xi_2 + \xi_3 = q;$$

где $\xi_1 = f(x_1^2 x_2), \xi_2 = f(x_2^2 x_3), \xi_3 = f(x_3^3)$.

Воспользуемся условием $f(t) = [3]_q$, выполненным в силу предложения 9. Тогда, поскольку $f(t) = 3\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3$, сложив все уравнения последней системы, получим

$$\lambda_1\varepsilon q^{-1} + 2q = 1 + q + q^2.$$

Так как $\lambda_1^2 = -q^4$, то из последнего соотношения имеем либо $q = 1$, либо $q^2 = -1$. В первом случае ввиду уравнения (22) получаем $\theta = \psi$, а во втором получаем $\lambda_1 = -\varepsilon, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.

Рассмотрим идемпотентный линейный оператор $P\colon V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$, определенный по R согласно формуле (6). Таким образом, R отвечает тройка (f, t, P). Рассуждая аналогично доказательству теоремы 12, заключаем, что $\operatorname{Ker} P = \{w \in V^{\otimes 2} \mid f(vw) = 0 \, \forall v \in V\}$ и тройка (f, t, P) удовлетворяет условию леммы 11. Поэтому для того, чтобы оператор R являлся симметрией Гекке на V с параметром q, необходимо и достаточно проверить выполнение равенства (7).

Нам потребуется, как и при доказательстве предыдущей теоремы, следующая формула для оператора P, справедливость которой следует из свойств этого оператора:

$$P(v) = \sum_i \frac{1}{f(x_i t_i)} f(x_i v) t_i, \quad v \in V^{\otimes 2}.$$

Тождество (7) эквивалентно соотношению

$$\left(P_2 P_1 - \frac{q}{(1+q)^2} \cdot \mathrm{Id}\right) v = \frac{1}{(1+q)^2} f(v) t$$

для всех $v \in \Upsilon^{(1,2)}$. Поэтому последнее равенство для образующих пространства $\Upsilon^{(1,2)}$ можно записать в виде

$$\begin{gathered} P_2 P_1 x_i t_i - \frac{q}{(1+q)^2} x_i t_i = \frac{1}{q(1+q)^2 \beta_i} \lambda_i t, \\ P_2 P_1 x_i t_j - \frac{q}{(1+q)^2} x_i t_j = 0, \quad i \neq j, \end{gathered} \tag{24}$$

где $i = 1, 2, 3$.

Предположим, что $q = 1$. Так как $f(x_i t_i) = 1$ для всех $i = 1, 2, 3$, то получаем

$$\begin{array}{lll} P(x_1^2) = -\xi_1 t_2, & P(x_2^2) = \xi_2 t_3, & P(x_3^2) = \xi_3 t_3, \\ P(x_1 x_2) = \xi_1 t_1, & P(x_1 x_3) = 0, & P(x_2 x_1) = \varepsilon \xi_1 t_1, \\ P(x_2 x_3) = \xi_2 t_2, & P(x_3 x_1) = 0, & P(x_3 x_2) = -\xi_2 t_2. \end{array}$$

Равенство (24) при $(i, j) = (3, 1)$ имеет вид

$$P_2 P_1 x_3 t_1 - \frac{1}{4} x_3 t_1 = 0.$$

Поскольку $P_1 x_3 t_1 = \varepsilon \xi_2 t_2 x_1$, получим

$$P_2 P_1 x_3 t_1 = \varepsilon \xi_2 P_2 t_2 x_1 = \varepsilon \xi_2 (\xi_1 x_1 t_2 - \varepsilon \xi_1 x_3 t_1) = \varepsilon \xi_1 \xi_2 x_1 t_2 + \xi_1 \xi_2 x_3 t_1.$$

Тогда должно быть выполнено равенство

$$P_2 P_1 x_3 t_1 - \frac{1}{4} x_3 t_1 = \varepsilon \xi_1 \xi_2 x_1 t_2 + \left(\xi_1 \xi_2 - \frac{1}{4}\right) x_3 t_1 = 0,$$

отсюда $\varepsilon \xi_1 \xi_2 = 0$, $\xi_1 \xi_2 - \dfrac{1}{4} = 0$. Пришли к противоречию.

Рассмотрим случай $q^2 = -1$. Поскольку $f(x_1t_1) = -q, f(x_2t_2) = q, f(x_3t_3) = q$, получаем

$$\begin{array}{lll} P\left(x_1^2\right) = q\xi_1 t_2, & P\left(x_2^2\right) = -q\xi_2 t_3, & P\left(x_3^2\right) = -q\xi_3 t_3, \\ P(x_1x_2) = q\xi_1 t_1, & P(x_1x_3) = 0, & P(x_2x_1) = q\varepsilon\xi_1 t_1, \\ P(x_2x_3) = -q\xi_2 t_2, & P(x_3x_1) = 0, & P(x_3x_2) = q\xi_2 t_2. \end{array}$$

Проверим, аналогично предыдущему случаю, выполнение равенства (24) для $(i, j) = (3, 1)$:

$$P_2P_1x_3t_1 - \frac{1}{2}x_3t_1 = 0.$$

Получаем $P_1x_3t_1 = -q\varepsilon\xi_2t_2x_1$, затем

$$P_2P_1x_3t_1 = -q\varepsilon\xi_2(-q\xi_1x_1t_2 - q\varepsilon\xi_1x_3t_1) = -\varepsilon\xi_1\xi_2x_1t_2 + \xi_1\xi_2x_3t_1.$$

Тогда выполнено

$$P_2P_1x_3t_1 - \frac{1}{2}x_3t_1 = -\varepsilon\xi_1\xi_2x_1t_2 + \left(\xi_1\xi_2 - \frac{1}{2}\right)x_3t_1.$$

Поэтому $-\varepsilon\xi_1\xi_2 = 0$, $\xi_1\xi_2 - \dfrac{1}{2} = 0$. Также приходим к противоречию.

Рассмотрим теперь случай, когда $[3]_q = 0$. Тогда либо $\lambda_2 = \lambda_3$, либо $\lambda_2 = -\lambda_3$. Если $\lambda_2 = \lambda_3$, то в силу (22) получим $\lambda_1 = 0$, что невозможно. В случае $\lambda_2 = -\lambda_3 = \lambda$ имеем $\lambda_1^2 = \lambda_2\lambda_3 = -\lambda^2$. Тогда согласно (22) получим $\varepsilon\lambda_1 - 2\lambda = 0$, отсюда $\lambda_1 = -2\varepsilon\lambda$, $\lambda_1^2 = -4\lambda^2 \neq -\lambda^2$. Пришли к противоречию. $\square$

Автор выражает глубокую признательность Сергею Марковичу Скрябину за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Список литературы

[1] Д.И. Гуревич, *Алгебраические аспекты квантового уравнения Янга–Бакстера*, Алгебра и Анализ **2** (4), 119–148 (1990).
URL: http://mi.mathnet.ru/aa198

[2] P.H. Hai, *Poincare series of quantum spaces associated to Hecke operators*, Acta Math. Vietnam **24** (2), 235–246 (1999).
DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.q-alg/9711020

[3] M. Artin, W.F. Schelter, *Graded algebras of global dimension* 3, Adv. Math. **66** (2), 171–216 (1987).
DOI: https://doi.org/10.1016/0001-8708(87)90034-X

[4] M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh, *Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves*, "The Grothendieck Festschrift, V. I", Birkhäuser Boston, Boston MA, 33–85 (1990).

DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4574-8_3

[5] M. Matsuno, *A complete classification of 3-dimensional quadratic AS-regular algebras of type EC*, Can. Math. Bull. **64** (1), 123–141 (2021).
DOI: https://doi.org/10.4153/S0008439520000302

[6] A. Itaba, M. Matsuno, *AS-regularity of geometric algebras of plane cubic curves*, J. Aust. Math. Soc. **112** (2), 193–217 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1017/S1446788721000070

[7] H. Ewen, O. Ogievetsky, *Classification of the $GL(3)$ quantum matrix groups*, 1994.
DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.q-alg/9412009

[8] S. Skryabin, *Hecke symmetries: an overview of Frobenius properties*, 2021.
DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.14169

[9] A. Björner, F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, Springer, New York, 2005.
DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-27596-7

[10] A. Polishchuk, L. Positselski, *Quadratic algebras*, Amer. Math. Soc., Provedence R.I., 2005.
DOI: http://doi.org/10.1090/ulect/037

[11] А.И. Бондал, А.Е. Полищук, *Гомологические свойства ассоциативных алгебр: метод спиралей*, Изв. РАН Сер. Матем. **57** (2), 3–50 (1993).
URL: http://mi.mathnet.ru/izv877

Никита Александрович Шишмаров
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: nashishmarov@yandex.ru

Volume 1, Issue 2 UDC 512.552
pp. 62–85 (2023) MSC 16S38, 16T25

Hecke symmetries, associated with Artin–Schelter regular algebras of type E and H

N.A. Shishmarov

Abstract. In this paper all Hecke symmetries are given for which the corresponding algebra $\mathbb{S}(V, R)$ is Artin-Schelter regular of type E. Also we prove that there exist no Hecke symmetries with regular algebra $\mathbb{S}(V, R)$ of type H.

Keywords: Hecke symmetries, Artin–Schelter regular algebras.

References

[1] D.I. Gurevich, *Algebraic aspects of the quantum Yang-–Baxter equation*, Leningrad Math. J. **2** (4), 801–828 (1991).

[2] P.H. Hai, *Poincare series of quantum spaces associated to Hecke operators*, Acta Math. Vietnam **24** (2), 235–246 (1999).
DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.q-alg/9711020

[3] M. Artin, W.F. Schelter, *Graded algebras of global dimension* 3, Adv. Math. **66** (2), 171–216 (1987).
DOI: https://doi.org/10.1016/0001-8708(87)90034-X

[4] M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh, *Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves*, "The Grothendieck Festschrift, V. I", Birkhäuser Boston, Boston MA, 33–85 (1990).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4574-8_3

[5] M. Matsuno, *A complete classification of* 3*-dimensional quadratic AS-regular algebras of type EC*, Can. Math. Bull. **64** (1), 123–141 (2021).
DOI: https://doi.org/10.4153/S0008439520000302

[6] A. Itaba, M. Matsuno, *AS-regularity of geometric algebras of plane cubic curves*, J. Aust. Math. Soc. **112** (2), 193–217 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1017/S1446788721000070

[7] H. Ewen, O. Ogievetsky, *Classification of the $GL(3)$ quantum matrix groups*, 1994.
DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.q-alg/9412009

[8] S. Skryabin, *Hecke symmetries: an overview of Frobenius properties*, 2021.
DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.14169

Received: 28 September 2022. Accepted: 11 May 2023. Published: 30 June 2023.

[9] A. Björner, F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, Springer, New York, 2005. DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-27596-7

[10] A. Polishchuk, L. Positselski, *Quadratic algebras*, Amer. Math. Soc., Provedence R.I., 2005. DOI: http://doi.org/10.1090/ulect/037

[11] A.I. Bondal, A.E. Polishchuk, *Homological properties of associative algebras: the method of helices*, Russian Acad. Sci. Izv. Math. **42** (2), 219–260 (1994). DOI: https://doi.org/10.1070/IM1994v042n02ABEH001536

Nikita Aleksandrovich Shishmarov
Kazan Federal University,
Lobachevskii Institute of Mathematics and Mechanics,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: nashishmarov@yandex.ru

НЕКРОЛОГ

АНАТОЛИЙ НИКОЛАЕВИЧ ШЕРСТНЕВ

25 мая 2023 года скончался известный казанский ученый и педагог, доктор физико-математических наук, профессор Анатолий Николаевич Шерстнев.

А.Н. Шерстнев родился 27 января 1938 г. в г. Ташкенте в семье военнослужащего. Закончив в 1955 г. казанскую школу № 24, он поступил на физико-математический факультет Казанского государственного университета, который окончил с отличием в 1960 г. После окончания КГУ работал в НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева при КГУ в должностях сначала младшего, затем старшего научного сотрудника и с 1964 г. — заведующего отделом теории вероятностей и математической статистики. В 1973 г. перешел на кафедру математического анализа, где работал в должностях доцента, заведующего кафедрой (1974–1998), затем — профессора (1998–2011). В 1963 г. под руководством профессора А.В. Сульдина защитил кандидатскую диссертацию «Случайные метрические и нормированные пространства». В 1980 г. он в Ленинградском отделении МИАН СССР защитил докторскую диссертацию «Исследования по общей теории интегрирования в алгебрах операторов». В 1982 г. ему присвоено ученое звание профессора.

Основная проблематика исследований А.Н. Шерстнева: вероятностные метрические и нормированные пространства, некоммутативная теория меры и интеграла. В 1974 г. он организовал межвузовский научный семинар «Алгебры операторов и их приложения», которым руководил долгие годы. Перу Анатолия Николаевича принадлежат свыше 100 научных публикаций, в том числе хорошо известные монография и учебники, опубликованные в центральных издательствах.

Результаты А.Н. Шерстнева и его учеников получили признание и поддержку математической общественности. В 1971 и 1978 гг. Казанским университетом (совместно с Московским и Ленинградским государственными университетами) в г. Казани были проведены представительные летние школы по некоммутативной теории вероятностей. В последующие двадцать лет возглавляемый Анатолием Николаевичем научный семинар приобрел широкую известность: с научными докладами на семинаре выступали ученые научных центров России, Казахстана, Узбекистана, Украины, Чехословакии. Семинар имел тесные научные контакты с коллективами ученых Института математики им. В.И. Романовского (г. Ташкент), Института теории измерений Словацкой академии наук (г. Братислава).

Решая проблему распространения некоммутативной теории интегрирования И. Сигала (Ann. Math., 1953, V. 57) на нормальные веса φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$, А.Н. Шерстнев предложил идею реализации пространства $L_1(\mathcal{A}, \varphi)$ как пространства «интегрируемых» билинейных форм, заданных на плотном в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ линеале веса D_φ, внутренним образом связанным с весом (1974; 1977). Было получено двойственное описание пространства $L_1(\mathcal{A}, \varphi)$. Аппарат билинейных форм оказался исключительно полезным и для решения других важных проблем, относящихся к общей теории меры на проекторах алгебры фон Неймана. Достижения Анатолия Николаевича и результаты его коллег по теории некоммутативного интегрирования изложены в обзорных статьях (Изв. вузов. Матем., 1982, № 8, 20–35; В кн.: Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Итоги науки и техники. Т. 27. М.: ВИНИТИ, 1985, 167–190; Internat. J. Theoret. Phys., 2011, V. 60, no. 2, 585–596), и монографии (Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. М.: Физматлит, 2008). Ряд научных результатов А.Н. Шерстнева достаточно детально отражены в зарубежных монографиях: по теории случайных нормированных пространств – в монографии Б. Швайцера и А. Склара (1983), по строению неограниченных мер – в монографиях А. Двуреченского (1993) и Я. Хамхалтера (2003).

В 1968 г. А.Н. Шерстнев опубликовал одну из пионерских работ в мире по квантовым логикам; позднее к этой тематике подключились его ученики П.Г. Овчинников, М.С. Матвейчук, Ф.Ф. Султанбеков, Д.Х. Муштари, А.М. Бикчентаев и Е.А. Турилова. Анатолий Николаевич занимался обобщениями знаменитой теоремы А. Глизона и реперными функциями, изучал различные классы подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана. В сферу его интересов вошли и задачи продолжения весов в полугруппах, характеризации следа на алгебрах фон Неймана и теории операторов. В 1980-е годы он возглавлял группу сотрудников кафедры математического анализа, занимавшуюся тематикой, связанной с советской космической программой.

Под руководством А.Н. Шерстнева защищено 15 кандидатских диссертаций. Его ученики Д.Х. Муштари, М.С. Матвейчук, А.М. Бикчентаев, Е.А. Турилова стали докторами физико-математических наук; вместе с ташкентскими математиками Р.З. Абдуллаевым, Ш.А. Аюповым, М.А. Бердикуловым и Ш.М. Усмановым, О.Е. Тихонов и Н.В. Трунов в 1986 г. удостоены звания лауреата премии Ленинского комсомола.

С работой А.Н. Шерстнева-ученого неразрывно связана его работа в качестве педагога. Заведуя кафедрой математического анализа в течение 24 лет (1974–1998), он создал на кафедре специализацию по функциональному анализу, им разработаны и прочитаны специальные курсы по этой специализации, опубликован цикл методических пособий по этим курсам. В соавторстве с Г.Д. Луговой им издано учебное пособие, в котором собраны базовые специальные курсы для специализации «Функциональный анализ». Это пособие получило гриф УМС по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию РФ и переиздано на испанском языке издательством URSS (г. Москва).

Анатолием Николаевичем предложен новый методический подход к изложению общих курсов «Математический анализ» и «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для математических специальностей университетов. На его основе написано учебное пособие «Конспект лекций по математическому анализу», которое с 1991 г. выдержало семь изданий, последнее вышло в 2021 году. Первые два издания удостоены грифа Государственного комитета СССР по народному образованию, третье издание (существенно расширенное) — грифа Министерства общего и профессионального образования РФ, четвертое — грифа НМС по математике и механике УМО университетов России.

А.Н. Шерстнев первым в Казанском университете предложил рейтинговую систему оценки знаний студентов и успешно реализовал ее, разработав подробное положение об этой системе.

С 1968 по 2011 гг. А.Н. Шерстнев являлся членом специализированных советов по защите диссертаций по математике при Казанском университете. С 1995 по 2001 гг. он являлся также членом Совета по защите докторских диссертаций при Институте математики и механики Уральского отделения РАН. С 1982 по 1990 гг. Анатолий Николаевич являлся заместителем председателя экспертной комиссии по математике и механике по премиям Минвуза СССР за лучшие научные работы. Его работа на этом посту получила высокую оценку министерства. А.Н. Шерстнев являлся научным редактором тематических научных сборников «Вероятностные методы и кибернетика» (1965–1974), «Конструктивная теория функций и функциональный анализ» (1976–1992), издававшихся Казанским университетом. Он являлся также членом редколлегии регулярно издававшегося Межвузовского научного сборника «Функциональный анализ» (г. Ульяновск).

Наряду с выдающимся творческим потенциалом заслуженный профессор Казанского университета Анатолий Николаевич Шерстнев обладал огромным жизнелюбием, в молодости активно занимался спортом, он поддерживал хорошую физическую форму и после выхода на заслуженный отдых.

За заслуги в области высшего образования А.Н. Шерстнев награжден Почетной грамотой Минвуза СССР за многолетнюю плодотворную работу по подготовке высококвалифицированных специалистов, развитие научных исследований (1980 г.). В 1996 г. ему было присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Республики Татарстан», в 2005 г. он награжден медалью ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени.

Светлая память об Анатолии Николаевиче навсегда сохранится в наших сердцах.

Список литературы

[1] А.М. Бикчентаев, С.Р. Насыров, Е.А. Турилова, *Анатолий Николаевич Шерстнев* (*к восьмидесятилетию со дня рождения*), Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, **160** (3), 590–598 (2018).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/uzku1480

[2] Казанский университет: 1804–2004. Библиографический словарь. Т.3: 1905–2004 (Н-Я). Изд-во Казан. ун-та, Казань, 768 с. (2004).

Ф.Г. Авхадиев, Г.Г. Амосов, М.М. Арсланов, Ш.А. Аюпов,
А.М. Бикчентаев, И.Н. Володин, С.А. Григорян, Р.Н. Гумеров,
И.Р. Каюмов, И.Ш. Калимуллин, В.Л. Крепкогорский,
Е.К. Липачев, М.С. Матвейчук, М.Д. Миссаров, С.Р. Насыров,
Ю.В. Обносов, А.А. Попов, В.Ж. Сакбаев, Ф.А. Сукочев,
Н. Темиргалиев, О.Е. Тихонов, Е.А. Турилова, А.С. Холево,
В.И. Чилин, Е.А. Широкова, А.И. Штерн, В.В. Шурыгин

III Конференция Математических центров России

С 10 по 15 октября 2023 года на базе РНОМЦ «Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета» в г. Майкоп, Республика Адыгея пройдет третья конференция Математических центров России.

Цель конференции — представление последних достижений, обмен опытом и обсуждение вопросов взаимодействия Математических центров России. Это третья подобная конференция (первая проводилась в Матцентре «Сириус» в 2021 году, а вторая прошла на базе МГУ и МИАН в 2022 году).

Программа конференции:

- 9 октября заезд участников конференции;
- 10, 11 октября рабочие дни конференции;
- 12 октября выходной день, выезд в предгорья Адыгеи;
- 13, 14 октября рабочие дни конференции;
- 15 октября рабочий день конференции (до 13.00), экскурсии для участников (после 14.00);
- 16 октября отъезд участников конференции.

К участию в конференции приглашаются российские и зарубежные ученые, и в первую очередь сотрудники, аспиранты, студенты, слушатели региональных математических центров и математических центров мирового уровня.

Формат участия: очный. Для участия в конференции необходима предварительная регистрация на сайте конференции.

Оргкомитет берет на себя расходы по проезду и проживанию членов Программного комитета и пленарных докладчиков. Оргкомитет готов обеспечить бесплатное проживание в кампусе АГУ молодых участников конференции в количестве 50 чел.

Расходы по проезду и проживанию секционных докладчиков предполагаются за счет направляющей стороны. В отдельных случаях оргкомитет готов рассмотреть вопрос о поддержке некоторых из участников.

Основные даты:
Регистрация участников — **до 1 сентября 2023 года.**
Решение о приеме докладов к участию — **не позднее 15 сентября 2023 года.**

Контакты оргкомитета:
Официальный сайт конференции: **mc-conf.adygnet.ru**
E-mail: **mc-conf@adygnet.ru**

VII Всемирный Конгресс математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023)

20–23 сентября 2023 года Математическое общество тюркского мира (Turkic World Mathematical Society, TWMS) при поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, акимата Туркестанской области и Международного казахско-турецкого университета имени Х.А. Ясави (МКТУ) проводят **VII Всемирный Конгресс Математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023)**.

Основная цель Конгресса – расширение международных связей и научного сотрудничества ученых, содействие развитию математической науки и применению достижений математики, информационных технологий в научных исследованиях, в технике и образовании.

Конгресс будет проходить в духовной столице тюркского мира – **г. Туркестан** на базе **Международного казахско-турецкого университета имени Х.А. Ясави.**

В рамках культурного обмена для участников конференции будут организованы экскурсии по музеям, сохранившимся памятникам средневековья Туркестана (в древности великий Туран — колыбель воинственных тюрков).

Международные Конгрессы Математического общества тюркского мира проводятся один раз в три года.

I Конгресс математиков тюркского мира прошёл в 1999 году в Университете Фират (Элазиг, Турция).

II Конгресс – в 2007 году в Университете Сакарья (Адапазары, Турция).

III Конгресс – в 2009 году в Казахском национальном университете имени аль-Фараби (Алматы, Казахстан).

IV Конгресс – в 2011 году в Бакинском университете (Баку, Азербайджан).

V Конгресс – в 2014 году на побережье озера Иссык-Куль (Иссык-куль, Кыргызстан).

VI Конгресс – в 2017 году в Евразийском национальном университете (Астана, Казахстан).

Со всеми подробностями можно ознакомиться на официальном сайте Конгресса: **https://acagor.kz/conference/twms-2023/**.

Объявления о конференциях с поддержкой НОМЦ ПФО

Международная конференция Теория функций, ее приложения и смежные вопросы

С 22 по 27 августа 2023 года в Казани пройдет конференция “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”. Приглашаем вас принять участие в нашей конференции!

Сроки регистрации и подачи тезисов продлены до **30 июня 2023 года**.

Сайт конференции: **https://mathcenter.kpfu.ru/functiontheory**.

Тезисы по установленному на сайте образцу просим присылать на электронную почту конференции theorfunc@gmail.com. Организационный взнос участника конференции - 1500 рублей.

По всем вопросам обращаться к ученому секретарю конференции Даутовой Дине Наилевне по электронной почте **theorfunc@gmail.com**.

Международная научная конференция Уфимская осенняя математическая школа — 2023

Уфимский университет науки и технологий, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (г. Уфа, Россия) и НОМЦ Приволжского федерального округа **с 4 по 8 октября 2023 года** проводят Международную научную конференцию «УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА — 2023». Место проведения – Факультет математики и информационных технологий УУНТ (г. Уфа, ул. З. Валиди, 32).

Регламент конференции предполагает пленарные, секционные и стендовые доклады.

Важное место в работе школы займут обзорные лекции ведущих ученых для аспирантов и молодых ученых.

Научная программа конференции охватывает следующие направления:

- спектральная теория операторов;
- комплексный и функциональный анализ;
- нелинейные уравнения;
- дифференциальные уравнения и приложения;
- математическое моделирование.

Для участия в работе конференции необходимо зарегистрироваться, подать тезисы доклада и оплатить оргвзнос до **15 сентября 2023 г.**. Участие студентов и аспирантов бесплатное. Все принятые тезисы будут опубликованы в сборнике тезисов конференции и проиндексированы в РИНЦ. Кроме этого, тезисы будут проходить отбор для опубликования расширенного варианта доклада в виде научной статьи в журналах «Уфимский математический журнал», «Lobachevskii Journal of Mathematics» и «Математическое моделирование» (Scopus и Web of Scienes). Конференция будет проводиться в гибридном формате: для тех, кто сможет приехать в Уфу, конференция будет проводиться в классическом формате (очно), а тем, кто не сможет приехать, будет предложена возможность провести дистанционную презентацию.

Сайт конференции: **http://www.conf-bashedu-fmit.ru**