МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Издается с 2023 года
Выходит 4 раза в год
ISSN 2949-3919

Том 1
Выпуск 3

Казань
2023

Журнал «Математика и теоретические компьютерные науки» основан в 2022 году Научно-образовательным математическим центром Приволжского федерального округа (НОМЦ ПФО). Его учредителем является ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет». Журнал зарегистрирован в Министерстве РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций 06 февраля 2023 г. (Эл № ФС77-84704) и ориентирован на электронную публикацию научных статей по всем основным направлениям математики и теоретических компьютерных наук:

- вещественный, комплексный и функциональный анализ;
- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление;
- математическая физика;
- геометрия и топология;
- теория вероятностей и математическая статистика;
- математическая логика, алгебра и теория чисел;
- вычислительная математика;
- теория вычислимости и сложности вычислений;
- дискретная математика и математическая кибернетика;
- теоретическая информатика;
- математические методы в искусственном интеллекте.

Также принимаются к печати обзоры, научно-популярные статьи, статьи о математической жизни. Все статьи проходят процедуру рецензирования. Все опубликованные статьи находятся в открытом доступе.

СОДЕРЖАНИЕ

НАУЧНЫЕ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Том 1, Выпуск 3
Стр. 3–21 (2023)

УДК 510.54
MSC 03C57, 03E15, 68Q32

О распознаваемости для семейств алгебраических структур

Н.А. Баженов

Аннотация. Приводится обзор недавних результатов об алгоритмическом распознавании (algorithmic learning) для семейств счетных алгебраических структур. В рамках этого подхода распознающее устройство на каждом шаге процесса распознавания получает конечный объем информации о данной счетной структуре S (которую нужно распознать), а также выдает гипотезу, описывающую тип изоморфизма S. Если последовательность выдаваемых гипотез сходится к правильному ответу, то распознавание считается успешным. В работе обсуждаются результаты о связи распознаваемости с синтаксическими свойствами структур S. Также приводятся результаты о новом подходе к распознаваемости, основанном на отношениях эквивалентности на пространстве Кантора.

Ключевые слова: теория алгоритмического распознавания, индуктивный вывод, вычислимая структура, бесконечные формулы, борелевское отношение эквивалентности.

Введение

Теория алгоритмического распознавания (algorithmic learning theory) восходит к работам Х. Патнэма [1] и Э.М. Голда [2]. В рамках этого подхода распознающее устройство на каждом шаге процесса распознавания получает конечный объем информации о данном объекте (который необходимо распознать), а также выдает некоторую гипотезу об этом объекте. В пределе последовательность выдаваемых гипотез должна сходиться к конечному описанию распознаваемого объекта. Процесс распознавания можно рассматривать как диалог между учителем (teacher) и учеником (learner): ученику (или распознающему устройству) необходимо выучить описание объекта при условии, если информация, задаваемая учителем, удовлетворяет некоторому протоколу. В математической формализации данного подхода особую роль играют два аспекта формальной спецификации: как определяется сходимость последовательности гипотез и как задается протокол для учителя.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

Поступила: 28.09.2022. Принята: 06.06.2023. Опубликована: 18.10.2023.

В классической теории алгоритмического распознавания в основном изучается распознавание для формальных языков и для рекурсивных функций (см., например, монографию [3] и обзоры [4, 5]). В 2000-е годы начали активно развиваться исследования распознавания для различных семейств подмножеств в алгебраических структурах [6–9]: зачастую различные типы распознаваемости оказываются тесно связанными с алгебраическими свойствами рассматриваемых структур. В частности, в [6, теорема 3.1] установлено, что семейство всех идеалов вычислимого коммутативного кольца R является BC-распознаваемым в том и только том случае, когда кольцо R нётерово.

В работах [10, 11] предложен подход к алгоритмическому распознаванию для семейств счетных алгебраических структур. В данной работе приводится обзор недавних результатов, полученных в рамках этого подхода. Большинство изложенных результатов получено в работах [11–14].

В разделе 1 даются основные определения для распознаваемости семейств структур. В частности, для данного отношения эквивалентности E на пространстве Кантора 2^ω вводится понятие *E-распознаваемого* счетного семейства структур $\mathfrak{K}$ (определение 2). В разделе 2 доказывается важный критерий распознаваемости семейства $\mathfrak{K}$ (теорема 5):

- с одной стороны, понятие распознаваемости имеет интерпретацию в дескриптивной теории множеств: это понятие эквивалентно E_0-распознаваемости, где E_0 – отношение почти равенства на бесконечных бинарных строках;
- с другой стороны, распознаваемость допускает синтаксическое описание в терминах бесконечных Σ_2-формул.

В разделе 3 приводятся результаты о тьюринговой сложности распознающих устройств. В разделе 4 теорема 5 применяется к естественным алгебраическим классам структур. В частности, в [11] установлено, что для любой конечной мощности $n > 0$ можно построить распознаваемое семейство линейных порядков, содержащее в точности n типов изоморфизма, но при этом не существует распознаваемого семейства линейных порядков, содержащего бесконечно много типов изоморфизма. В разделе 4 также строится новый пример распознаваемого семейства абелевых групп без кручения (предложение 12). В разделе 5 доказывается новый результат о связи Id-распознаваемости (где Id – тождественное отношение эквивалентности) с конечными $\exists$-формулами (теорема 13). В разделе 6 приводится обзор основных результатов [13] о E-распознаваемости для некоторых естественных комбинаторных борелевских отношений E.

1. Подход к распознаваемости для семейств структур

Предварительные сведения по теории вычислимости можно найти, например, в монографии [15]. Необходимые сведения по теории вычислимых структур можно найти в [16, 17].

Пусть L – конечная сигнатура. Без ограничения общности можно считать, что L содержит только предикатные символы (как обычно, при необходимости заменяем сигнатурные функции f на их графики). Если не оговорено противное, то считаем, что все рассматриваемые счетные L-структуры имеют носитель ω. Произвольную счетную L-структуру $\mathcal{A}$ можно представить в виде объединения возрастающей последовательности ее конечных подструктур: $\mathcal{A} = \bigcup_{s\in\omega} \mathcal{A}\restriction_s$, где

$$\mathcal{A}\restriction_0 \subset \mathcal{A}\restriction_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}\restriction_n \subset \dots$$

и $\mathcal{A}\restriction_n$ есть подструктура $\mathcal{A}$, имеющая носитель $\{0, 1, \dots, n\}$.

Необходимые сведения по дескриптивной теории множеств можно найти, например, в монографии [18]. Стандартным образом (см., например, § 3.6 в [18]) произвольную счетную L-структуру $\mathcal{A}$ (имеющую носитель ω) можно отождествить с элементом пространства Кантора 2^ω.

Элементы пространства Кантора обозначаем строчными греческими буквами: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Через Id обозначаем тождественное отношение на 2^ω.

Приведем определение распознаваемости для семейств L-структур, введенное в [11]. Приведенная версия определения следует работе [13]. Схожие подходы к распознаванию ранее рассматривались в [19, 20].

Определение 1 ([11,13])**.** Пусть $\mathfrak{K} = \{\mathcal{A}_i : i \in \omega\}$ – счетное семейство счетных L-структур такое, что $\mathcal{A}_i \not\cong \mathcal{A}_j$ при $i \neq j$.

- *Область распознавания* (learning domain) для $\mathfrak{K}$ – множество всех L-структур, являющихся изоморфными копиями структур из $\mathfrak{K}$, т. е.

$$LD(\mathfrak{K}) = \bigcup_{i\in\omega} \{\mathcal{S} : \mathcal{S} \cong \mathcal{A}_i\}.$$

  В силу нашего соглашения о том, что счетные L-структуры рассматриваются как элементы пространства Кантора, будем считать, что $LD(\mathfrak{K}) \subseteq 2^\omega$.

- *Пространство гипотез* (hypothesis space) для $\mathfrak{K}$ содержит индексы i для каждого $\mathcal{A}_i$ и специальный символ '?'. Другими словами,

$$HS(\mathfrak{K}) = \omega \cup \{?\}.$$

- *Распознающее устройство* (learner) $\mathbf{M}$ получает по шагам всю информацию (причем как позитивную, так и негативную) о данной структуре $\mathcal{S}$ из области распознавания. На каждом шаге устройство $\mathbf{M}$ должно выдавать некоторую гипотезу о типе изоморфизма $\mathcal{S}$. Данные требования формализуются следующим образом: $\mathbf{M}$ – произвольная функция, действующая из множества всех конечных бинарных строк $2^{<\omega}$ в пространство гипотез $HS(\mathfrak{K})$.
- Говорят, что процесс распознавания *успешен* для $\mathbf{M}$, если для каждой структуры $\mathcal{S} \in LD(\mathfrak{K})$ последовательность гипотез, выдаваемая $\mathbf{M}$, сходится к правильной гипотезе о типе изоморфизма $\mathcal{S}$, т. е. если $\mathcal{S} \cong \mathcal{A}_i$ для некоторого $i \in \omega$, то существует

предел $\lim_{k\to\infty} \mathbf{M}(\mathcal{S} \restriction_k)$ и этот предел равен i.

Семейство $\mathfrak{K}$ называем $\mathbf{InfEx}_{\cong}$-*распознаваемым* ($\mathbf{InfEx}_{\cong}$-learnable), если существует устройство $\mathbf{M}$, успешно распознающее $\mathfrak{K}$. Аналогичным образом понятие $\mathbf{InfEx}_{\cong}$-распознаваемости можно задать и для конечных семейств $\mathfrak{K}$. Далее для простоты изложения будем называть $\mathbf{InfEx}_{\cong}$-распознаваемые семейства *распознаваемыми*.

В используемом обозначении $\mathbf{InfEx}_{\cong}$ заложено следующее:

- **Inf** означает распознаваемость по *информанту* (informant): протокол для учителя (см. введение) указывает, что ученику (распознающему устройству) подается как позитивная, так и негативная информация о распознаваемом объекте (см. [2, с. 450] и [4, § 6.1]).
- **Ex** (explanatory) соответствует критерию сходимости последовательности гипотез (критерию успеха для распознаваемости) (см., например, [4, § 3.1]).
- Нижний индекс $\cong$ говорит о том, что структуры распознаются с точностью до изоморфизма. В общем случае можно рассматривать распознаваемость с точностью до произвольного отношения эквивалентности $\sim$ на классе $\mathfrak{K}$: в частности, в [10, § 4] изучалась распознаваемость с точностью до изоморфной бивложимости.

Пусть E и F – отношения эквивалентности на пространстве Кантора 2^ω. Говорим, что функция $f\colon 2^\omega \to 2^\omega$ *сводит* E к F, если для любых $\alpha, \beta \in 2^\omega$

$$(\alpha\, E\, \beta) \ \Leftrightarrow\ (f(\alpha)\, F\, f(\beta)). \tag{1}$$

Если для (1) существует борелевская сводящая функция f, то говорят, что E *сводится по Борелю* к F (обозначается через $E \le_B F$). Если для (1) можно выбрать непрерывную сводящую функцию f, то E *непрерывно сводится* к F. Сводимость по Борелю является стандартным инструментом для классификации сложности борелевских отношений эквивалентности в дескриптивной теории множеств (см., например, [18, 21, 22]).

В работе [13] установлено, что распознаваемость для счетных семейств структур $\mathfrak{K}$ тесно связана с естественным комбинаторным отношением эквивалентности E_0 на пространстве Кантора: для $\alpha, \beta \in 2^\omega$

$$\alpha\, E_0\, \beta \ \Leftrightarrow\ \exists m (\forall n \ge m)(\alpha(n) = \beta(n)). \tag{2}$$

Говоря неформально, распознаваемость для $\mathfrak{K}$ эквивалентна тому, что отношение изоморфизма на классе $\mathfrak{K}$ непрерывно сводится к отношению E_0 (подробнее см. в разделе 2). Этот результат свидетельствует о том, что определение 1 является естественным: отношение E_0 играет важную роль в дескриптивной теории множеств. В частности, известная дихотомия Глимма–Эффроса [23] говорит о том, что любое борелевское отношение эквивалентности E на 2^ω удовлетворяет следующему свойству: если $\mathrm{Id} \le_B E$, то либо $E \equiv_B \mathrm{Id}$, либо $E_0 \le_B E$.

Установленная в [13] связь между распознаваемостью и отношением E_0 послужила мотивацией для следующего нового понятия.

Определение 2 ([13])**.** Пусть E – отношение эквивалентности на 2^ω. Говорим, что счетное семейство $\mathfrak{K}$ является *E-распознаваемым*, если существует непрерывное отображение $\Gamma\colon 2^\omega \to 2^\omega$ со следующим свойством: для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LD(\mathfrak{K})$ выполнено

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \Gamma(\mathcal{A})\, E\, \Gamma(\mathcal{B}). \tag{3}$$

Отметим следующий простой факт, непосредственно вытекающий из определений.

Замечание 3. Пусть E и F – отношения эквивалентности на 2^ω. Если E непрерывно сводится к F, то любое E-распознаваемое семейство также является и F-распознаваемым.

В приведенных ниже доказательствах будем пользоваться следующим известным фактом.

Лемма 4 (фольклор)**.** *Отображение $\Gamma\colon 2^\omega \to 2^\omega$ является непрерывным в том и только том случае, когда существуют тьюрингов оператор Φ и оракул $X \in 2^\omega$ такие, что*

$$\forall\alpha \left(\Gamma(\alpha) = \Phi^{X\oplus\alpha}\right).$$

2. Критерий распознаваемости

Теорема 5 ([11, 13])**.** *Пусть $\mathfrak{K} = \{\mathcal{A}_i : i \in \omega\}$ – семейство счетных L-структур такое, что $\mathcal{A}_i \ncong \mathcal{A}_j$ при $i \neq j$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *семейство $\mathfrak{K}$ является распознаваемым (в смысле определения 1);*

(ii) *семейство $\mathfrak{K}$ является E_0-распознаваемым;*

(iii) *существует последовательность бесконечных Σ_2-предложений $(\psi_i)_{i\in\omega}$ такая, что для любых $i, j \in \omega$*

$$\mathcal{A}_j \models \psi_i \;\Leftrightarrow\; j = i.$$

Доказательство. (i)⇒(ii). Пусть $\mathbf{M}$ – функция, успешно распознающая семейство $\mathfrak{K}$. Построим непрерывное отображение Γ, удовлетворяющее условию (3) для эквивалентности E_0, заданной в (2).

Фиксируем произвольную счетную последовательность $(\alpha_i)_{i\in\omega}$ попарно не E_0-эквивалентных элементов пространства Кантора. Для данного $\beta \in 2^\omega$ зададим последовательность $\Gamma(\beta)$ побитово: для $s \in \omega$ полагаем

$$\Gamma(\beta)(s) := \alpha_{\mathbf{M}(\beta\restriction_s)}(s).$$

Здесь примем следующее соглашение: если $\mathbf{M}(\beta\restriction_s) = ?$, то считаем $\alpha_? = \alpha_0$. Нетрудно понять, что отображение Γ вычислимо относительно оракула $\mathbf{M} \oplus \bigoplus_{i\in\omega} \alpha_i$, следовательно, по лемме 4 отображение Γ непрерывно.

Пусть структура $\mathcal{S} \in LD(\mathfrak{K})$ изоморфна $\mathcal{A}_i$ для некоторого $i \in \omega$. Тогда в силу распознаваемости семейства $\mathfrak{K}$ посредством устройства $\mathbf{M}$ для бесконечной строки $\beta^{\mathcal{S}}$, кодирующей $\mathcal{S}$, существует шаг s_0 такой, что $\mathbf{M}(\beta^{\mathcal{S}} \upharpoonright_s) = i$ для всех $s \geq s_0$. Следовательно, получаем $\left(\Gamma\left(\beta^{\mathcal{S}}\right) E_0\, \alpha_i\right)$. Из того, что элементы α_i, $i \in \omega$ попарно не E_0-эквивалентны, вытекает следующее: для произвольных $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in LD(\mathfrak{K})$ верно

$$\mathcal{S} \cong \mathcal{T} \;\Leftrightarrow\; \Gamma(\beta^{\mathcal{S}})\, E_0\, \Gamma(\beta^{\mathcal{T}}).$$

Заключаем, что семейство $\mathfrak{K}$ является E_0-распознаваемым.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Для доказательства этого перехода воспользуемся техникой *вычислимых по Тьюрингу вложений* [24, 25].

Определение 6 ([24, 25])**.** Пусть $\mathfrak{K}_1$ – семейство счетных L_1-структур, а $\mathfrak{K}_2$ – семейство счетных L_2-структур такие, что $\mathfrak{K}_i$ замкнуты относительно изоморфизма. Говорят, что тьюрингов оператор Φ является *вычислимым по Тьюрингу вложением* (или *tc-вложением*) из $\mathfrak{K}_1$ в $\mathfrak{K}_2$, если выполнены следующие условия:

- для любой структуры $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}_1$ функция $\Phi^{\mathcal{A}}$ есть характеристическая функция для атомной диаграммы некоторой структуры из класса $\mathfrak{K}_2$; эту структуру обозначают через $\Phi(\mathcal{A})$,
- для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{K}_1$ $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ в том и только том случае, когда $\Phi(\mathcal{A}) \cong \Phi(\mathcal{B})$.

Пусть $X \in 2^\omega$. Если в определении 6 заменить тьюрингов оператор Φ на оператор Θ вида

$$\Theta(\alpha) = \Psi^{X \oplus \alpha}, \text{ где } \Psi \text{ – некоторый тьюрингов оператор,}$$

то говорим, что Θ является *X-tc-вложением* из $\mathfrak{K}_1$ в $\mathfrak{K}_2$ (обозначаем через $\Theta\colon \mathfrak{K}_1 \leq_{tc}^X \mathfrak{K}_2$).

Следующий результат является релятивизацией теоремы о пуллбэке (Pullback Theorem) из [25] (см. также § 3.1 в [11]):

Предложение 7 ([25])**.** *Пусть $\Theta\colon \mathfrak{K}_1 \leq_{tc}^X \mathfrak{K}_2$. Тогда для любого X-вычислимого бесконечного L_2-предложения ψ можно эффективно с оракулом X найти X-вычислимое бесконечное L_1-предложение ψ^* со следующим свойством: для любой структуры $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}_1$*

$$\mathcal{A} \models \psi^* \;\Leftrightarrow\; \Theta(\mathcal{A}) \models \psi.$$

Кроме того, если ψ – X-вычислимое бесконечное Σ_α-предложение, то ψ^* также является X-вычислимым бесконечным Σ_α-предложением.

Для доказательства нашей теоремы построим теперь специальное семейство вычислимых структур $\mathfrak{K}_{st} = \{\mathcal{B}_i : i \in \omega\}$ в сигнатуре $L_{st} = \{\leq\} \cup \{P_j^1 : j \in \omega\}$. Как обычно, через η обозначаем порядковый тип рациональных чисел. Для $i \in \omega$ структура $\mathcal{B}_i$ задается следующим образом. Предикаты P_j, $j \in \omega$, попарно не пересекаются. Если $x \in P_j$ и $y \in P_k$ для $j \neq k$, то x и y несравнимы. Предикат $P_i^{\mathcal{B}_i}$ содержит копию линейного порядка $1 + \eta$, а при $j \neq i$ предикат $P_j^{\mathcal{B}_i}$ содержит копию порядка η. Отметим следующее полезное свойство построенного семейства $\mathfrak{K}_{st}$: для $\exists\forall$-предложений

$$\psi_i^{st} := \exists x \forall y [P_i(y) \to x \leq y]$$

выполнено следующее:

$$\mathcal{B}_j \models \psi_i^{st} \ \Leftrightarrow \ j = i. \tag{4}$$

Пусть теперь Γ – непрерывное отображение, свидетельствующее о том, что данное счетное семейство $\mathfrak{K}$ является E_0-распознаваемым. Через β_i обозначим элемент $\Gamma(\mathcal{A}_i)$ из пространства Кантора. Заметим, что β_i попарно не E_0-эквивалентны. Из предложения 7 и свойства (4) вытекает следующее: для того, чтобы получить п. (iii) теоремы, достаточно построить X-tc-вложение из класса $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{K}_{st}$ (для некоторого оракула X).

Зададим вспомогательную вычислимую L_{st}-структуру $\mathcal{C}$ следующим образом: $\mathcal{C}$ определяется так же, как $\mathcal{B}_i$, за исключением того, что каждый предикат $P_i^{\mathcal{C}}$ содержит копию η. Кроме того, выделим последовательность элементов $(r_{i,j})_{i\in\omega, j\in\mathbb{Z}}$ такую, что $r_{i,j} \in P_i^{\mathcal{C}}$ и $r_{i,j} <_{\mathcal{C}} r_{i,j+1}$ для всех i, j.

Искомое X-tc-вложение Θ теперь можно задать следующим образом. Пусть $\mathcal{S}$ – произвольная изоморфная копия некоторой структуры из нашего семейства $\mathfrak{K}$. Без ограничения общности можно считать, что носитель $\mathcal{S}$ равен ω, т. е. $\mathcal{S} \in LD(\mathfrak{K})$. Тогда структура $\Theta(\mathcal{S})$ определяется следующим образом:

- $\Theta(\mathcal{S})$ есть подструктура в $\mathcal{C}$;
- $\bigcup_{i\in\omega}\{x : x \geq_{\mathcal{C}} r_{i,0}\} \subseteq \mathrm{dom}(\Theta(\mathcal{S}))$;
- для каждых $i \in \omega$ и $l \geq 1$, если $\mathrm{card}(\{t \in \omega : \Gamma(\mathcal{S})(t) \neq \beta_i(t)\}) \geq l$, то

$$\{x : r_{i,-l} \leq_{\mathcal{C}} x <_{\mathcal{C}} r_{i,-l+1}\} \subset \mathrm{dom}(\Theta(\mathcal{S})).$$

Пусть структура $\mathcal{S}$ изоморфна $\mathcal{A}_i$. Тогда ясно, что $\Gamma(\mathcal{S})$ E_0-эквивалентно β_i, и в силу этого имеем

- значение $\mathrm{card}(\{t \in \omega : \Gamma(\mathcal{S})(t) \neq \beta_i(t)\})$ конечно, следовательно, $P_i^{\Theta(\mathcal{S})}$ содержит изоморфную копию порядка $1 + \eta$;
- при $j \neq i$ значение $\mathrm{card}(\{t \in \omega : \Gamma(\mathcal{S})(t) \neq \beta_j(t)\})$ бесконечно, а значит, $P_j^{\Theta(\mathcal{S})}$ содержит копию η.

Заключаем, что $\Theta(\mathcal{S}) \cong \mathcal{B}_i$. Отсюда нетрудно получить, что Θ есть X-tc-вложение из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{K}_{st}$, причем оракул X можно выбрать следующим образом. По лемме 4 отображение Γ является Y-вычислимым для некоторого $Y \in 2^\omega$, поэтому можно взять $X := Y \oplus \bigoplus_{i\in\omega}\beta_i$. Теперь, применяя предложение 7, из свойства (4) получаем

$$\mathcal{A}_j \models (\psi_i^{st})^* \ \Leftrightarrow \ j = i,$$

причем каждая формула $(\psi_i^{st})^*$ является бесконечным X-вычислимым Σ_2-предложением.

(iii)$\Rightarrow$(i). Пусть $(\psi_i)_{i\in\omega}$ – последовательность формул из условия (iii). Без ограничения общности можно считать, что

$$\psi_i = \exists \bar{x}^i \bigwedge_{j\in\omega} \forall \bar{y}^{i,j} \xi_{i,j}(\bar{x}^i, \bar{y}^{i,j}),$$

где $\xi_{i,j}$ – бескванторные L-формулы.

Пусть $\mathcal{F}$ – конечная L-структура такая, что $\mathrm{dom}(\mathcal{F}) \subset \omega$. Будем говорить, что пара $(\mathcal{F}, \bar{a})$ *совместима* с формулой ψ_i, если $\bar{a}$ – набор из $\mathcal{F}$, длина которого совпадает с длиной $\bar{x}^i$, и при этом для любых $j \le \max(\mathrm{dom}(\mathcal{F}))$ и $\bar{b}$ из $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$

$$\mathcal{F} \models \xi_{i,j}(\bar{a}, \bar{b}).$$

Поскольку $\mathcal{A}_i \models \psi_i$, нетрудно получить, что найдется набор $\bar{a}^*$ из $\mathcal{A}_i$, такой что для любой конечной подструктуры $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_i$, удовлетворяющей $\bar{a}^* \in \mathcal{F}$, пара $(\mathcal{F}, \bar{a}^*)$ совместима с ψ_i.

С другой стороны, если $j \ne i$, то $\mathcal{A}_j \not\models \psi_i$. Значит, для любого набора $\bar{a}$ из $\mathcal{A}_j$ найдется конечная подструктура $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_j$ такая, что $\bar{a} \in \mathcal{F}$, и при этом, если $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H} \subset \mathcal{A}_j$, то пара $(\mathcal{H}, \bar{a})$ несовместима с ψ_i.

Построим распознающее устройство $\mathbf{M}\colon 2^{<\omega} \to HS(\mathfrak{K})$ следующим образом. Пусть σ – конечная бинарная строка. Через $\mathcal{F}_\sigma$ обозначим конечную L-структуру, закодированную посредством σ.

- Если существуют $\bar{a} \in \mathcal{F}_\sigma$ и $i \le |\sigma|$ такие, что $(\mathcal{F}_\sigma, \bar{a})$ совместимо с ψ_i, то выбираем такую пару $(\bar{a}, i)$, имеющую наименьший гёделевский номер. Полагаем $\mathbf{M}(\sigma) := i$.
- В противном случае задаем $\mathbf{M}(\sigma) := ?$.

Из рассуждения, приведенного выше, нетрудно вывести следующее: если структура $\mathcal{S}$ изоморфна $\mathcal{A}_i$, то найдется такая конечная строка σ_0, являющаяся начальным сегментом в бесконечной строке $\beta^{\mathcal{S}}$, кодирующей $\mathcal{S}$, что $\mathbf{M}(\tau) = i$ для всех τ, удовлетворяющих $\sigma_0 \subseteq \tau \subset \beta^{\mathcal{S}}$. Отсюда получаем, что функция $\mathbf{M}$ успешно распознает семейство $\mathfrak{K}$. Теорема 5 доказана. $\square$

3. Тьюрингова сложность распознающих функций

Анализируя доказательство теоремы 5, можно получить некоторые оценки для тьюринговой сложности распознающих функций.

Предложение 8. *Пусть $X \in 2^\omega$ и пусть $(\mathcal{A}_i)_{i\in\omega}$ – равномерно X-вычислимая последовательность X-вычислимых L-структур такая, что $\mathcal{A}_i \not\cong \mathcal{A}_j$ при $i \ne j$. Если семейство $\mathfrak{K} = \{\mathcal{A}_i : i \in \omega\}$ распознаваемо, то $\mathfrak{K}$ можно распознать при помощи $X^{(3)}$-вычислимой функции $\mathbf{M}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ – L-структура и $\bar{a}$ – набор из $\mathcal{S}$. Через $\mathrm{type}_\forall(\mathcal{S}, \bar{a})$ обозначим следующее множество формул:

$$\mathrm{type}_\forall(\mathcal{S}, \bar{a}) = \{\theta(\bar{x}) : \theta \text{ – } \forall\text{-формула},\ \mathcal{S} \models \theta(\bar{a})\}.$$

Из распознаваемости семейства $\mathfrak{K}$ (см. п. (iii) теоремы 5) вытекает, что существует последовательность бесконечных формул $(\psi_i)_{i\in\omega}$ такая, что

- $\mathcal{A}_i \models \psi_i$ и $\mathcal{A}_j \not\models \psi_i$ при $j \neq i$;
- каждая ψ_i равна $\exists \bar{x}^i \bigwedge_{\theta\in V_i} \theta(\bar{x}^i)$ для некоторых набора $\bar{c}^i \in \mathcal{A}_i$ и множества $\forall$-формул $V_i \subseteq \mathrm{type}_\forall(\mathcal{A}_i, \bar{c}^i)$.

В силу этого можно считать, что $V_i = \mathrm{type}_\forall(\mathcal{A}_i, \bar{c}^i)$, т. е.

$$\psi_i = \exists \bar{x}^i \bigwedge_{\theta\in\mathrm{type}_\forall(\mathcal{A}_i,\bar{c}^i)} \theta(\bar{x}^i). \tag{5}$$

Теперь анализ доказательства перехода (iii)$\Rightarrow$(i) в теореме 5 показывает, что для построения распознающей функции $\mathbf{M}$ достаточно найти последовательность наборов $(\bar{c}^i)_{i\in\omega}$ такую, что $\bar{c}^i \in \mathcal{A}_i$, и для любых $j \neq i$ и $\bar{d} \in \mathcal{A}_j$

$$\mathrm{type}_\forall(\mathcal{A}_j, \bar{d}) \neq \mathrm{type}_\forall(\mathcal{A}_i, \bar{c}^i). \tag{6}$$

Условие (6) является $\Sigma^0_2(X)$-условием (равномерно по $i, j, \bar{c}^i, \bar{d}$). Более сложное условие

$$(\forall j \neq i)(\forall \bar{d} \in \mathcal{A}_j)[\mathrm{type}_\forall(\mathcal{A}_j, \bar{d}) \neq \mathrm{type}_\forall(\mathcal{A}_i, \bar{c}^i)] \tag{7}$$

является $\Pi^0_3(X)$-условием (равномерно по $i, \bar{c}^i$). Значит, искомую последовательность $(\bar{c}^i)_{i\in\omega}$ можно построить $X^{(3)}$-вычислимым образом: в качестве $\bar{c}^i$ выбираем кортеж из $\mathcal{A}_i$ с наименьшим номером, удовлетворяющий (7).

Следовательно, последовательность бесконечных формул $(\psi_i)_{i\in\omega}$ из (5) можно выбрать $X^{(3)}$-вычислимой. Заключаем, что распознающую функцию $\mathbf{M}\colon 2^{<\omega} \to HS(\mathfrak{K})$ можно сделать $X^{(3)}$-вычислимой. $\square$

Для случая конечных распознаваемых семейств известны более точные оценки.

Теорема 9 ([12]).

(a) *Пусть $X \in 2^\omega$ и пусть $(\mathcal{A}_i)_{i\leq n}$ – конечная последовательность X-вычислимых L-структур такая, что $\mathcal{A}_i \not\cong \mathcal{A}_j$ при $i \neq j$. Если семейство $\mathfrak{K} = \{\mathcal{A}_i : i \leq n\}$ распознаваемо, то $\mathfrak{K}$ можно распознать при помощи X'-вычислимой функции $\mathbf{M}$ (теорема 3.1 в [12]).*

(b) *Существует пара вычислимых структур $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$ такая, что соответствующее семейство $\mathfrak{K} = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ распознаваемо, но при этом $\mathfrak{K}$ не распознаваемо посредством вычислимой функции (теорема 4.1 в [12]).*

4. Приложения теоремы 5

Синтаксическое описание распознаваемости, полученное в теореме 5 (п. (iii)), позволяет доказать следующие результаты о естественных классах алгебраических структур.

Предложение 10 ([11, предложение 4]). *Пусть $\mathfrak{K}$ – семейство бесконечных булевых алгебр. Если $\mathfrak{K}$ содержит две неизоморфные алгебры, то семейство $\mathfrak{K}$ нераспознаваемо.*

Теорема 11 ([11, предложение 5 и теорема 5]).

(a) *Пусть $n \geq 2$. Существует распознаваемое семейство вычислимых линейных порядков $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n\}$ такое, что $\mathcal{L}_i$ попарно неизоморфны.*

(b) *Не существует распознаваемого семейства линейных порядков $\mathfrak{K}$, содержащего бесконечно много попарно неизоморфных структур.*

Также теорема 5 позволяет строить примеры распознаваемых семейств.

Предложение 12. *Существует вычислимое семейство $\mathfrak{K} = \{\mathcal{A}_i : i \in \omega\}$ вычислимых абелевых групп без кручения ранга 1, распознаваемое при помощи вычислимой функции* $\mathbf{M}$.

Доказательство. Для $i \in \omega$ через p_i обозначим i-е простое число в порядке возрастания. В качестве группы $\mathcal{A}_i$ можно выбрать подгруппу в $(\mathbb{Q}, +)$, порожденную множеством

$$\left\{\frac{1}{p_{j_1}^{t_1} \cdot p_{j_2}^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_{j_n}^{t_n}} : n \geq 1,\ j_k \neq i,\ t_k \in \omega\right\}.$$

Зададим $\exists\forall$-предложение

$$\psi_i := \exists x \forall y (p_i \cdot y \neq x).$$

В силу $1/p_i \notin \mathcal{A}_i$ получаем, что 1 не делится на p_i в группе $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_i \models \psi_i$. С другой стороны, при $j \neq i$ выполнено следующее: если $x \in \mathcal{A}_j$, то x/p_i также лежит в $\mathcal{A}_j$. Значит, $\mathcal{A}_j \not\models \psi_i$.

Согласно теореме 5 построенное семейство групп $\mathfrak{K}$ является распознаваемым. Кроме того, анализ доказательства перехода (iii)$\Rightarrow$(i) в теореме (аналогичный предложению 8) показывает, что можно построить вычислимую распознающую функцию $\mathbf{M}\colon 2^{<\omega} \to HS(\mathfrak{K})$. □

Другие примеры распознаваемых семейств структур, принадлежащих естественным алгебраическим классам, можно найти в [11, § 4.1].

5. Распознаваемость и отношение Id

Некоторые естественные борелевские отношения эквивалентности E на пространстве Кантора 2^ω также тесно связаны с синтаксическими свойствами структур (аналогично теореме 5). В данном разделе установим следующий результат для тождественного отношения Id.

Теорема 13. *Пусть $\mathfrak{K} = \{\mathcal{A}_i : i \in \omega\}$ – семейство счетных L-структур такое, что $\mathcal{A}_i \not\cong \mathcal{A}_j$ при $i \neq j$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *существует непрерывное отображение $\Gamma\colon LD(\mathfrak{K}) \to 2^\omega$ такое, что для любых $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in LD(\mathfrak{K})$*

$$\mathcal{S} \cong \mathcal{T} \ \Leftrightarrow\ \Gamma(\mathcal{S}) = \Gamma(\mathcal{T});$$

(b) *существует семейство $\exists$-предложений Ξ со следующими свойствами:*

  (b.1) *для любой формулы $\xi \in \Xi$ существует формула $\psi \in \Xi$ такая, что для любого i $\mathcal{A}_i \models (\xi \leftrightarrow \neg\psi)$;*

  (b.2) *если $i \neq j$, то существует предложение $\xi \in \Xi$ такое, что $\mathcal{A}_i \models \xi$ и $\mathcal{A}_j \models \neg\xi$.*

Отметим, что условие (a) теоремы 13 является *более слабым* условием, чем Id-распознаваемость: для Id-распознаваемости необходимо, чтобы область определения отображения Γ была равна всему пространству 2^ω.

Доказательство. (a)$\Rightarrow$(b). Пусть Γ – непрерывное отображение из п. (a). Зафиксируем оракул $Y \in 2^\omega$ такой, что отображение Γ является Y-вычислимым. Для $i \in \omega$ через β_i обозначим бесконечную строку $\Gamma(\mathcal{A}_i)$. Заметим следующее: если $\mathcal{S} \in LD(\mathfrak{K})$ и $\mathcal{S} \cong \mathcal{A}_i$, то $\Gamma(\mathcal{S}) = \beta_i$.

Построим вспомогательное семейство счетных неориентированных графов $\mathfrak{K}_G = \{G_i : i \in \omega\}$. Граф G_i состоит из следующих конечных компонент связности: для $l \in \omega$

- если $\beta_i(l) = 0$, то добавляем в G_i один цикл длины $2l+3$;
- если $\beta_i(l) = 1$, то кладем в G_i один цикл длины $2l+4$.

Для $i \neq j$ зададим $\exists$-предложение $\xi^{st}_{i,j}$ следующим образом. Находим наименьшее l такое, что $\beta_i(l) \neq \beta_j(l)$. Тогда $\xi^{st}_{i,j}$ говорит о том, что “граф содержит цикл длины $2l+3+\beta_i(l)$”. Нетрудно проверить, что семейство $\exists$-формул

$$\Xi_{st} := \{\xi^{st}_{i,j} : i \neq j\} \tag{8}$$

удовлетворяет свойствам (b.1) и (b.2). Действительно, для любого $k \in \omega$ выполнено $G_k \models (\xi^{st}_{i,j} \leftrightarrow \neg\xi^{st}_{j,i})$. Кроме того, $G_i \models \xi^{st}_{i,j}$ и $G_j \models \neg\xi^{st}_{i,j}$ при $i \neq j$.

Для оракула $X := Y \oplus \bigoplus_{i\in\omega} \beta_i$ построим X-tc-вложение Θ из класса $\mathfrak{K}$ в класс $\mathfrak{K}_G$. Зададим вспомогательный вычислимый граф H следующим образом: для каждого числа $m \geq 3$ граф H содержит в точности один цикл длины m. Для данной счетной L-структуры $\mathcal{S}$, изоморфной структуре из семейства $\mathfrak{K}$, граф $\Theta(\mathcal{S})$ зададим следующим образом:

- $\Theta(\mathcal{S})$ есть подструктура графа H;
- если $\Gamma(\mathcal{S})(l) = 0$, то $\Theta(\mathcal{S})$ содержит цикл длины $2l+3$; в противном случае добавляем в $\Theta(\mathcal{S})$ цикл длины $2l+4$.

Нетрудно заметить следующее: если $\mathcal{S} \cong \mathcal{A}_i$, то $\Gamma(\mathcal{S}) = \beta_i$ и $\Theta(\mathcal{S}) \cong G_i$. Заключаем, что $\Theta\colon \mathfrak{K} \leq^X_{tc} \mathfrak{K}_G$.

В силу предложения 7 формула $(\xi^{st}_{i,j})^*$ является X-вычислимым бесконечным Σ_1-предложением, поэтому можно считать, что она имеет вид:

$$(\xi^{st}_{i,j})^* = \bigvee_{k\in\omega} \exists \bar{y}^{i,j,k} \varphi_{i,j,k}(\bar{y}^{i,j,k}),$$

где формулы $\varphi_{i,j,k}$ бескванторные. Выберем индекс k^* такой, что $\mathcal{A}_i \models \exists \bar{y}^{i,j,k^*} \varphi_{i,j,k^*}(\bar{y}^{i,j,k^*})$. Зададим конечное $\exists$-предложение

$$\theta_{i,j} := \exists \bar{y}^{i,j,k^*} \varphi_{i,j,k^*}(\bar{y}^{i,j,k^*}).$$

Покажем, что семейство $\Xi := \{\theta_{i,j} : i \neq j\}$ удовлетворяет условиям (b.1) и (b.2).

В силу предложения 7 из свойств семейства Ξ_{st}, заданного в (8), получаем, что для любого $k \in \omega$ выполнено

$$\mathcal{A}_k \models ((\xi^{st}_{i,j})^* \leftrightarrow \neg(\xi^{st}_{j,i})^*).$$

Отсюда непосредственно вытекает $\mathcal{A}_k \models (\theta_{i,j} \leftrightarrow \neg\theta_{j,i})$. Кроме того, при $i \neq j$ имеем $\mathcal{A}_i \models \theta_{i,j}$, $\mathcal{A}_j \models \neg(\xi^{st}_{i,j})^*$ и $\mathcal{A}_j \models \neg\theta_{i,j}$. Заключаем, что семейство формул Ξ удовлетворяет нужным условиям.

(b)$\Rightarrow$(a). Пусть $\Xi = \{\xi_l : l \in \omega\}$ – семейство $\exists$-предложений из п. (b). Без ограничения общности можно считать, что $\xi_l = \exists \bar{x}^l \theta_l(\bar{x}^l)$, где формулы θ_l бескванторные.

Построим непрерывное отображение $\Gamma\colon LD(\mathfrak{K}) \to 2^\omega$. Пусть $\mathcal{S} \in LD(\mathfrak{K})$. Зададим бесконечную строку $\Gamma(\mathcal{S})$ побитово. Пусть $l \in \omega$. Для формулы ξ_l находим формулу ξ_m такую, что $\mathcal{A}_k \models (\xi_l \leftrightarrow \neg\xi_m)$ для всех $k \in \omega$. В силу изоморфности $\mathcal{S}$ некоторой структуре из $\mathfrak{K}$ заключаем, что найдется (наименьшее) $t \in \omega$, для которого выполнен в точности один из двух случаев:

1) $\mathcal{S} \upharpoonright_t \models \xi_l$; в этом случае задаем $\Gamma(\mathcal{S})(l) := 1$,

2) $\mathcal{S} \upharpoonright_t \models \xi_m$; тогда задаем $\Gamma(\mathcal{S})(l) := 0$.

Нетрудно показать, что отображение Γ является X-вычислимым для некоторого оракула X: действительно, для построения $\Gamma(\mathcal{S})$ достаточно знать семейство Ξ и уметь находить по данному ξ_l соответствующую формулу ξ_m.

Если $\mathcal{S} \cong \mathcal{T}$, то $\mathcal{A}_k \models (\xi_l \leftrightarrow \neg\xi_m)$ для всех k вытекает $\Gamma(\mathcal{S}) = \Gamma(\mathcal{T})$. Пусть $\mathcal{S} \cong \mathcal{A}_i$ и $\mathcal{T} \cong \mathcal{A}_j$ для некоторых $i \neq j$. Тогда существует $l \in \omega$ со свойством $\mathcal{A}_i \models \xi_l$ и $\mathcal{A}_j \models \neg\xi_l$, следовательно, $\Gamma(\mathcal{S})(l) = 1$ и $\Gamma(\mathcal{T})(l) = 0$. Получаем $\Gamma(\mathcal{S}) \neq \Gamma(\mathcal{T})$.

Заключаем, что построенное отображение Γ удовлетворяет условиям п. (a). Теорема 13 доказана. □

Дополнительные результаты о топологических свойствах Id-распознаваемости и ее связи с распознаваемостью, имеющей конечное число ошибок, можно найти в работе [14].

6. Комбинаторные борелевские отношения эквивалентности

В данном разделе приведем обзор результатов о некоторых известных комбинаторных отношениях эквивалентности. Для $\alpha \in 2^\omega$ и $m \in \omega$ через $\alpha^{[m]}$ обозначаем m-й столбец строки α, т. е. для $i \in \omega$

$$\alpha^{[m]}(i) = \alpha(\langle m, i \rangle).$$

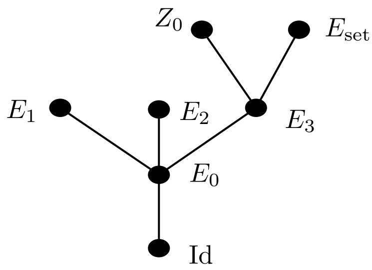

Рис. 1. Степени эквивалентностей относительно непрерывной сводимости

Пусть $\alpha, \beta \in 2^\omega$. Будем рассматривать следующие отношения эквивалентности на пространстве Кантора:

- отношение E_0 из (2);
- $\alpha\, E_1\, \beta$ в том и только том случае, когда для почти всех $m \in \omega$ верно $\alpha^{[m]} = \beta^{[m]}$;
- $\alpha\, E_2\, \beta$ в том и только том случае, когда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha \bigtriangleup \beta)(k)}{k+1} < \infty,$$

где $\alpha \bigtriangleup \beta$ – симметрическая разность α и β;
- $\alpha\, E_3\, \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha^{[m]}\, E_0\, \beta^{[m]}$ для всех $m \in \omega$;
- $\alpha\, E_{\mathrm{set}}\, \beta$ тогда и только тогда, когда $\{\alpha^{[m]} : m \in \omega\} = \{\beta^{[m]} : m \in \omega\}$;
- $\alpha\, Z_0\, \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha \bigtriangleup \beta$ имеет асимптотическую плотность 0, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{card}(\{i \le k : (\alpha \bigtriangleup \beta)(i) = 1\})}{k+1} = 0.$$

Известно (см., например, [26]), что степени относительно непрерывной сводимости для рассматриваемых отношений эквивалентности расположены следующим образом: см. рис. 1. Кроме того, соответствующая диаграмма для сводимости по Борелю $\le_B$ выглядит точно также (например, отношения E_1 и E_2 $\le_B$-несравнимы).

В работе [13] введены следующие сводимости, измеряющие «силу распознаваемости» для отношений эквивалентности:

Определение 14 ([13, определение 3.3])**.** Пусть E и F – отношения эквивалентности на пространстве Кантора 2^ω.

(a) Говорим, что E Learn$^\omega$-*сводится* к F (обозначается через $E \le^\omega_{\mathrm{Learn}} F$), если любое счетное E-распознаваемое семейство $\mathfrak{K}$ также является и F-распознаваемым.

(b) Отношение E Learn$^{<\omega}$-*сводится* к F (обозначается через $E \le^{<\omega}_{\mathrm{Learn}} F$), если любое конечное E-распознаваемое семейство $\mathfrak{K}$ также является F-распознаваемым.

Ясно, что $E \le^\omega_{\mathrm{Learn}} F$ влечет $E \le^{<\omega}_{\mathrm{Learn}} F$. Из рис. 1 и замечания 3 можно вывести серию простых фактов: например, отношение E_0 Learn$^\omega$-сводится к E_1.

Для рассматриваемых нами отношений эквивалентности их степени $\mathrm{Learn}^{<\omega}$-сводимости полностью описаны в [13]. Как обычно, через ω^* обозначаем порядковый тип отрицательных целых чисел, через ζ – порядковый тип всех целых чисел.

Теорема 15 ([13]).
(a) *Пара вычислимых линейных порядков* $\{\omega, \omega^*\}$ *является* E_0*-распознаваемой, но не является* Id*-распознаваемой (заметим, что этот факт следует из теорем* 5 *и* 13*). Следовательно,* $\mathrm{Id} <^{<\omega}_{\mathrm{Learn}} E_0$.
(b) *Следующие отношения* $\mathrm{Learn}^{<\omega}$*-эквивалентны:* E_0, E_1, E_2, E_3, Z_0.
(c) *Пара вычислимых линейных порядков* $\{\omega, \zeta\}$ *является* E_{set}*-распознаваемой, но не является* E_0*-распознаваемой. Следовательно,* $E_0 <^{<\omega}_{\mathrm{Learn}} E_{\mathrm{set}}$.

Для Learn^{ω}-сводимости в настоящее время описаны степени всех рассматриваемых отношений за исключением Z_0.

Теорема 16 ([13]).
(a) *Следующие отношения* Learn^{ω}*-эквивалентны:* E_0, E_1, E_2.
(b) *Существует вычислимая последовательность вычислимых структур* $(\mathcal{A}_i)_{i\in\omega}$ *такая, что* $\mathcal{A}_i \not\cong \mathcal{A}_j$ *при* $i \neq j$*, и при этом семейство* $\mathfrak{K} = \{\mathcal{A}_i : i \in \omega\}$ *является* E_3*-распознаваемым, но не является* E_0*-распознаваемым* ([13, теорема 5.2])*. Следовательно,* $E_0 <^{\omega}_{\mathrm{Learn}} E_3$.

Из теорем 15 и 16 вытекает

Следствие 17. $\mathrm{Id} <^{\omega}_{\mathrm{Learn}} E_0 \equiv^{\omega}_{\mathrm{Learn}} E_1 \equiv^{\omega}_{\mathrm{Learn}} E_2 <^{\omega}_{\mathrm{Learn}} E_3 <^{\omega}_{\mathrm{Learn}} E_{set}$.

Также в [13] получен синтаксический критерий E_3-распознаваемости. Отметим, что его формулировка схожа с формулировкой теоремы 13 об отношении Id.

Теорема 18 ([13, теорема 5.4]). *Пусть* $\mathfrak{K} = \{\mathcal{A}_i : i \in \omega\}$ *– семейство счетных* L*-структур такое, что* $\mathcal{A}_i \not\cong \mathcal{A}_j$ *при* $i \neq j$*. Семейство* $\mathfrak{K}$ *является* E_3*-распознаваемым в том и только том случае, когда существует счетное семейство бесконечных* Σ_2*-предложений* Ξ *со следующими свойствами:*

- *для любой формулы* $\xi \in \Xi$ *существует формула* $\psi \in \Xi$ *такая, что для любого* i *выполнено* $\mathcal{A}_i \models (\xi \leftrightarrow \neg\psi)$;
- *если* $i \neq j$*, то существует предложение* $\xi \in \Xi$ *такое, что* $\mathcal{A}_i \models \xi$ *и* $\mathcal{A}_j \models \neg\xi$.

Список литературы

[1] H. Putnam, *Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski*, J. Symb. Logic **30** (1), 49–57 (1965).

[2] E.M. Gold, *Language identification in the limit*, Inf. Control **10** (5), 447–474 (1967). DOI: https://doi.org/10.1016/S0019-9958(67)91165-5

[3] S. Jain, D. Osherson, J.S. Royer, A. Sharma, *Systems that learn: An introduction to learning theory*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1999.

[4] S. Lange, T. Zeugmann, S. Zilles, *Learning indexed families of recursive languages from positive data: A survey*, Theor. Comput. Sci. **397** (1–3), 194–232 (2008). DOI: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2008.02.030

[5] T. Zeugmann, S. Zilles, *Learning recursive functions: A survey*, Theor. Comput. Sci. **397** (1–3), 4–56 (2008). DOI: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2008.02.021

[6] F. Stephan, Y. Ventsov, *Learning algebraic structures from text*, Theor. Comput. Sci. **268** (2), 221–273 (2001). DOI: https://doi.org/10.1016/S0304-3975(00)00272-3

[7] W. Merkle, F. Stephan, *Trees and learning*, J. Comput. Syst. Sci. **68** (1), 134–156 (2004). DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcss.2003.08.001

[8] V. S. Harizanov, F. Stephan, *On the learnability of vector spaces*, J. Comput. Syst. Sci. **73** (1), 109–122 (2007). DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcss.2006.09.001

[9] Z. Gao, F. Stephan, G. Wu, A. Yamamoto, *Learning families of closed sets in matroids*, in: M. J. Dinneen, B. Khoussainov, A. Nies (eds.), Computation, Physics and Beyond – International Workshop on Theoretical Computer Science, WTCS 2012 (Lect. Notes Comput. Sci. **7160**), Springer, Berlin, 120–139 (2012). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-27654-5_10

[10] E. Fokina, T. Kötzing, L. San Mauro, *Limit learning equivalence structures*, Proc. Mach. Learn. Res. (PMLR) **98**, 383–403 (2019).

[11] N. Bazhenov, E. Fokina, L. San Mauro, *Learning families of algebraic structures from informant*, Inf. Comput. **275**, article id 104590 (2020). DOI: https://doi.org/10.1016/j.ic.2020.104590

[12] N. Bazhenov, L. San Mauro, *On the Turing complexity of learning finite families of algebraic structures*, J. Log. Comput. **31** (7), 1891–1900 (2021). DOI: https://doi.org/10.1093/logcom/exab044

[13] N. Bazhenov, V. Cipriani, L. San Mauro, *Learning algebraic structures with the help of Borel equivalence relations*, Theor. Comput. Sci. **951**, article id 113762 (2023).

DOI: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2023.113762

[14] N. Bazhenov, V. Cipriani, L. San Mauro, *Calculating the mind change complexity of learning algebraic structures*, in: U. Berger, J.N.Y. Franklin, F. Manea, A. Pauly (eds.), Revolutions and Revelations in Computability, 18th Conference on Computability in Europe, CiE 2022 (Lect. Notes Comput. Sci. **13359**), Springer, Cham, 1–12 (2022).

[15] Р.И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Казан. матем. о-во, Казань, 2000.

[16] С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, *Конструктивные модели*, Научн. кн., Новосибирск, 1999.

[17] C.J. Ash, J.F. Knight, *Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy* (Stud. Logic Found. Math. **144**), Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2000.

[18] S. Gao, *Invariant descriptive set theory*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.

[19] C. Glymour, *Inductive inference in the limit*, Erkenntnis, **22**, 23–31 (1985).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-017-1456-3_2

[20] E. Martin, D. Osherson, *Elements of scientific inquiry*, MIT Press, Cambridge, 1998.

[21] V. Kanovei, *Borel equivalence relations: Structure and classification*, AMS, Providence R.I., 2008.

[22] G. Hjorth, *Borel equivalence relations*, in: M. Foreman, A. Kanamori (eds.), Handbook of set theory, Springer, Heidelberg, 297–332 (2010).

[23] L.A. Harrington, A.S. Kechris, A. Louveau, *A Glimm–Effros dichotomy for Borel equivalence relations*, J. Amer. Math. Soc. **3** (4), 903–928 (1990).
DOI: https://doi.org/10.2307/1990906

[24] У. Калверт, Д. Камминс, Д.Ф. Найт, С. Миллер, *Сравнение классов конечных структур*, Алгебра и логика **43** (6), 666–701 (2004).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/al103

[25] J.F. Knight, S. Miller, M. Vanden Boom, *Turing computable embeddings*, J. Symb. Log. **72** (3), 901–918 (2007).

[26] S. Coskey, J.D. Hamkins, R. Miller, *The hierarchy of equivalence relations on the natural numbers under computable reducibility*, Computability, **1** (1), 15–38 (2012).
DOI: https://doi.org/10.3233/COM-2012-004

Николай Алексеевич Баженов
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: bazhenov@math.nsc.ru

Volume 1, Issue 3
pp. 3–21 (2023)

UDC 510.54
MSC 03C57, 03E15, 68Q32

On learning for families of algebraic structures

N.A. Bazhenov

Abstract. We survey the recent results on algorithmic learning for families of countable algebraic structures. Within this framework, at each step a learner obtains a finite amount of data about a given countable structure S (which is supposed to be learned), and then the learner outputs a conjecture describing the isomorphism type of S. If the sequence of conjectures converges to the correct answer, then the learning procedure is successful. The paper discusses the results connecting learnability with syntactic properties of structures S. We also give some results on the new approach to learnability which uses equivalence relations on the Cantor space.

Keywords: algorithmic learning theory, inductive inference, computable structure, infinitary formulas, Borel equivalence relation.

References

[1] H. Putnam, *Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski*, J. Symb. Logic **30** (1), 49–57 (1965).

[2] E.M. Gold, *Language identification in the limit*, Inf. Control **10** (5), 447–474 (1967).
DOI: https://doi.org/10.1016/S0019-9958(67)91165-5

[3] S. Jain, D. Osherson, J.S. Royer, A. Sharma, *Systems that learn: An introduction to learning theory*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1999.

[4] S. Lange, T. Zeugmann, S. Zilles, *Learning indexed families of recursive languages from positive data: A survey*, Theor. Comput. Sci. **397** (1–3), 194–232 (2008).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2008.02.030

[5] T. Zeugmann, S. Zilles, *Learning recursive functions: A survey*, Theor. Comput. Sci. **397** (1–3), 4–56 (2008).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2008.02.021

[6] F. Stephan, Y. Ventsov, *Learning algebraic structures from text*, Theor. Comput. Sci. **268** (2), 221–273 (2001).
DOI: https://doi.org/10.1016/S0304-3975(00)00272-3

Acknowledgements. The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2022-281 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

Received: 28 September 2022. Accepted: 06 June 2023. Published: 18 October 2023.

[7] W. Merkle, F. Stephan, *Trees and learning*, J. Comput. Syst. Sci. **68** (1), 134–156 (2004). DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcss.2003.08.001

[8] V. S. Harizanov, F. Stephan, *On the learnability of vector spaces*, J. Comput. Syst. Sci. **73** (1), 109–122 (2007).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcss.2006.09.001

[9] Z. Gao, F. Stephan, G. Wu, A. Yamamoto, *Learning families of closed sets in matroids*, in: M. J. Dinneen, B. Khoussainov, A. Nies (eds.), Computation, Physics and Beyond – International Workshop on Theoretical Computer Science, WTCS 2012 (Lect. Notes Comput. Sci. **7160**), Springer, Berlin, 120–139 (2012).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-27654-5_10

[10] E. Fokina, T. Kötzing, L. San Mauro, *Limit learning equivalence structures*, Proc. Mach. Learn. Res. (PMLR) **98**, 383–403 (2019).

[11] N. Bazhenov, E. Fokina, L. San Mauro, *Learning families of algebraic structures from informant*, Inf. Comput. **275**, article id 104590 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.ic.2020.104590

[12] N. Bazhenov, L. San Mauro, *On the Turing complexity of learning finite families of algebraic structures*, J. Log. Comput. **31** (7), 1891–1900 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1093/logcom/exab044

[13] N. Bazhenov, V. Cipriani, L. San Mauro, *Learning algebraic structures with the help of Borel equivalence relations*, Theor. Comput. Sci. **951**, article id 113762 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2023.113762

[14] N. Bazhenov, V. Cipriani, L. San Mauro, *Calculating the mind change complexity of learning algebraic structures*, in: U. Berger, J.N.Y. Franklin, F. Manea, A. Pauly (eds.), Revolutions and Revelations in Computability, 18th Conference on Computability in Europe, CiE 2022 (Lect. Notes Comput. Sci. **13359**), Springer, Cham, 1–12 (2022).

[15] R. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1987. ISBN: 3-540-15299-7

[16] S.S. Goncharov, Yu.L. Ershov, *Constructive Models*, Springer, New York, 2000.

[17] C.J. Ash, J.F. Knight, *Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy* (Stud. Logic Found. Math. **144**), Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2000.

[18] S. Gao, *Invariant descriptive set theory*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.

[19] C. Glymour, *Inductive inference in the limit*, Erkenntnis, **22**, 23–31 (1985).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-017-1456-3_2

[20] E. Martin, D. Osherson, *Elements of scientific inquiry*, MIT Press, Cambridge, 1998.

[21] V. Kanovei, *Borel equivalence relations: Structure and classification*, AMS, Providence R.I.,

2008.

[22] G. Hjorth, *Borel equivalence relations*, in: M. Foreman, A. Kanamori (eds.), Handbook of set theory, Springer, Heidelberg, 297–332 (2010).

[23] L.A. Harrington, A.S. Kechris, A. Louveau, *A Glimm–Effros dichotomy for Borel equivalence relations*, J. Amer. Math. Soc. **3** (4), 903–928 (1990).
DOI: https://doi.org/10.2307/1990906

[24] W. Calvert, D. Cummins, J.F. Knight, S. Miller, *Comparing Classes of Finite Structures*, Algebra and Logic **43** (6), 374–392 (2004).
DOI: https://doi.org/10.1023/B:ALLO.0000048827.30718.2c

[25] J.F. Knight, S. Miller, M. Vanden Boom, *Turing computable embeddings*, J. Symb. Log. **72** (3), 901–918 (2007).

[26] S. Coskey, J.D. Hamkins, R. Miller, *The hierarchy of equivalence relations on the natural numbers under computable reducibility*, Computability, **1** (1), 15–38 (2012).
DOI: https://doi.org/10.3233/COM-2012-004

Nikolay Alekseevich Bazhenov
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: bazhenov@math.nsc.ru

Том 1, Выпуск 3 УДК 515.122
Стр. 22–32 (2023) MSC 54C35, 54D10

О пространствах непрерывных функций. III

Ю.Л. Ершов, М.В. Швидефски

Аннотация. Для топологических T_0-пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ пространство $\mathbb{Y}$ является H-собранным тогда и только тогда, когда пространство непрерывных функций $\mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, наделенное конкретной топологией $\mathcal{T}$, является H-собранным.

Ключевые слова: c-компактное пространство, пространство непрерывных функций, собранное пространство, T_0-пространство.

Введение

Настоящая работа является продолжением [1, 2]. В [1] была изучена взаимосвязь различных свойств топологических пространств для T_0-пространства $\mathbb{Y}$ и пространства непрерывных функций $\mathbb{C}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, наделенного топологией поточечной сходимости. Полученные в [1] результаты были обобщены в [2] для определенных топологий на пространстве $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ непрерывных отображений из T_0-пространства $\mathbb{X}$ в T_0-пространство $\mathbb{Y}$. Здесь мы обобщаем некоторые результаты из [2] и рассматриваем общее свойство H-собранности, введенное в [3].

Теорема 18 является нашим основным результатом. В разделе 4 мы предлагаем несколько приложений этого результата.

За всеми понятиями и обозначениями, которые не определены здесь, мы отсылаем читателя к монографии первого автора [4], а также к работам [1, 2].

1. Топологии на $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$

Доказательство следующего утверждения не представляет сложностей.

Лемма 1. *Пусть $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ – T_0-пространства. Если топология $\mathcal{T}$ на $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ такова, что $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_A(\leq_{\mathcal{P}})$, то отношения $\leq_{\mathcal{P}}$ и $\leq_{\mathcal{T}}$ совпадают.*

Рассмотрим отображение

$$\xi\colon \mathbb{Y} \to C(\mathbb{X}, \mathbb{Y}); \quad \xi\colon y \mapsto \xi_y, \quad \text{где } \xi_y(x) = y \text{ для всех } x \in X.$$

Благодарности. Работа выполнена авторами в рамках госзадания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2022-0012.

Поступила: 07.07.2023. Принята: 26.09.2023. Опубликована: 18.10.2023.

Лемма 2 ([2, Lemma 2])**.** *Пусть* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ – T_0*-пространства. Тогда* $\mathcal{T}_A(\subseteq)^\sharp \subseteq \mathcal{T}_A(\leq_{\mathcal{P}})$.

Лемма 3 ([2, Lemma 3])**.** *Пусть* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ – T_0*-пространства. Если топология* $\mathcal{T}$ *на* $C(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *такова, что* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}_A(\subseteq)^\sharp$, *то* ξ *является гомеоморфным вложением* $\mathbb{Y}$ *в* $\mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Всюду далее мы пишем $\xi_{\mathcal{T}}$ вместо ξ для каждой топологии $\mathcal{T}$ на $C(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, для которой отображение ξ непрерывно.

Для T_0-пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$, для элемента $x \in X$ и для топологии $\mathcal{T}$ на $C(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ рассмотрим следующее отображение:

$$\zeta_{x,\mathcal{T}}\colon \mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \to \mathbb{Y}, \quad \zeta_{x,\mathcal{T}}\colon f \mapsto f(x).$$

Лемма 4. *Пусть* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ – T_0*-пространства и пусть* $x \in X$. *Если* $\mathcal{T}$ – *топология на* $C(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *такая, что* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$, *то отображение* $\zeta_{x,\mathcal{T}}$ *непрерывно.*

Доказательство. Предположим, что $U \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ и $f \in \zeta^{-1}_{x,\mathcal{T}}(U)$. Тогда $\zeta_{x,\mathcal{T}}(f) = f(x) \in U$, отсюда получаем $f \in V_{x,U} \in \mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$. Чтобы установить $\zeta^{-1}_{x,\mathcal{T}}(U) \in \mathcal{T}$, достаточно доказать $V_{x,U} \subseteq \zeta^{-1}_{x,\mathcal{T}}(U)$. Действительно, если $g \in V_{x,U}$, то $\zeta_{x,\mathcal{T}}(g) = g(x) \in U$, поэтому $g \in \zeta^{-1}_{x,\mathcal{T}}(U)$, что и требовалось. □

За следующими фактами мы отсылаем читателя к главам 6 и 15 в [4], а также к разделам 5.3–5.4 в [5] и разделу II-4 в [6].

Предложение 5. *Пусть* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ *являются* T_0*-пространствами.*

(1) *Если топология* $\mathcal{T}_0$ *является собственной, а топология* $\mathcal{T}_1$ *является допустимой на* $C(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, *то* $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_1$.

(2) *Если* $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_1$, *а* $\mathcal{T}_1$ *является собственной топологией на* $C(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, *то* $\mathcal{T}_0$ *также является собственной топологией на* $C(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

(3) *Если* $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_1$, *а* $\mathcal{T}_0$ *является допустимой топологией на* $C(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, *то* $\mathcal{T}_1$ *также является допустимой топологией на* $C(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

(4) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{T}_*$ *и* $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$.

(5) *Естественная топология* $\mathcal{T}_*$ *совпадает с наибольшей собственной топологией на* $C(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

За следующим утверждением мы отсылаем читателя к [7] и к [4, теорема 6.2.1], см. также [5, Theorem 5.4.4].

Теорема 6. *Следующие условия равносильны для* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$.

(1) $\langle \mathcal{T}(\mathbb{X}); \subseteq \rangle$ *является непрерывным ч.у. множеством.*

(2) $\langle \mathcal{T}(\mathbb{X}), \mathcal{T}_S(\subseteq) \rangle$ *является* α*-пространством.*

(3) *Для произвольного* T_0*-пространства* $\mathbb{Y}$ *существует правильная топология на* $C(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

(4) *Существует правильная топология на* $C(\mathbb{X},\mathbb{S})$.

Топологическое пространство $\mathbb{X}$, которое удовлетворяет эквивалентным условиям теоремы 6, называется *c-компактным пространством.* Топологическое пространство $\mathbb{X}$ *локально компактно*, если для каждого $x \in X$ и каждого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ с условием $x \in U$ существуют компактное множество $K \subseteq X$ и открытое множество $V \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ такие, что $x \in V \subseteq K \subseteq U$.

За следующим утверждением мы отсылаем к [8], к [6, Lemma II-4.2], а также к [4, теорема 6.3.3] и к [5, Proposition 5.4.20].

Предложение 7. *Пусть $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ являются T_0-пространствами.*

(1) *Если пространство $\mathbb{X}$ c-компактно, то $\mathcal{C} = \mathcal{I} = \mathcal{T}_*$ и эта топология является правильной на $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.*

(2) *Если пространство $\mathbb{X}$ локально компактно, то $\mathcal{K} = \mathcal{C} = \mathcal{I} = \mathcal{T}_*$ и эта топология является правильной на $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.*

(3) *Если $\mathbb{X}$ является α^*-пространством, то $\mathcal{P} = \mathcal{K} = \mathcal{C} = \mathcal{I} = \mathcal{T}_*$ и эта топология является правильной на $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.*

Следствие 8. *Для c-компактного пространства $\mathbb{X}$ и T_0-пространства $\mathbb{Y}$ правильная топология на $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ определена предбазой открытых множеств вида*

$$V_{U,W} = \big\{ f \in C(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \mid U \prec f^{-1}(W) \big\},$$

где $\varnothing \neq U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ и $\varnothing \neq W \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$.

Доказательство следующего утверждения проводится непосредственно; это утверждение содержится в предложении 3.2 в [9], см. также [2, Proposition 15].

Предложение 9. *Пусть $\mathbb{X}$ является c-компактным пространством и пусть $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}(\mathbb{X})$ образует аддитивный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$. Если открытые множества $U, U', V_0, \ldots, V_n \in \mathcal{B}$, $n < \omega$, таковы, что $U \prec U' \prec V_0 \cup \ldots \cup V_n$, то существуют $W_0, \ldots, W_n \in \mathcal{B}$ такие, что выполняется*

$$W_i \prec V_i \text{ для всех } i \leqslant n \text{ и } U \subseteq W_0 \cup \ldots \cup W_n \subseteq U'.$$

2. H-собранные пространства

Для топологического T_0-пространства $\mathbb{X}$ рассмотрим следующие семейства подмножеств в X:

- $\mathsf{I}(\mathbb{X})$ – множество всех непустых неприводимых подмножеств в X;
- $\mathsf{S}(\mathbb{X})$ – множество всех одноэлементных подмножеств в X;
- $\mathsf{D}(\mathbb{X})$ – множество всех непустых направленных вверх подмножеств в X;
- $\mathsf{WF}(\mathbb{X})$ – множество всех непустых вполне фильтрованных подмножеств в X;
- $\mathsf{R}(\mathbb{X})$ – множество всех непустых подмножеств Рудина в X;

- $\mathsf{I}^b(\mathbb{X})$ - множество всех непустых ограниченных неприводимых подмножеств в X;
- $\mathsf{D}^b(\mathbb{X})$ - множество всех непустых ограниченных направленных вверх подмножеств в X;
- $\mathsf{WF}^b(\mathbb{X})$ - множество всех непустых вполне фильтрованных ограниченных подмножеств в X;
- $\mathsf{R}^b(\mathbb{X})$ - множество всех непустых ограниченных подмножеств Рудина в X.

Определение 10 ([3]). Ковариантный функтор $\mathsf{H}\colon \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{Set}$ такой, что $\mathsf{S}(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{H}(\mathbb{X}) \subseteq 2^X$, а для каждого пространства $\mathbb{Y} \in \mathbf{Top}_0$ и каждого непрерывного отображения $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ справедливо $\mathsf{H}(f)(A) = f(A) \in \mathsf{H}(\mathbb{Y})$ для всех $A \in \mathsf{H}(\mathbb{X})$, называется *системой подмножеств.*

Система подмножеств H называется *I-системой*, если $\mathsf{H}(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{I}(\mathbb{X})$ для любого пространства $\mathbb{X} \in \mathbf{Top}_0$.

Следствие 11. *Если* $\mathsf{X} \in \{\mathsf{S}, \mathsf{D}, \mathsf{D}^b, \mathsf{WF}, \mathsf{WF}^b, \mathsf{R}, \mathsf{R}^b, \mathsf{I}, \mathsf{I}^b\}$, *то* X *является I-системой.*

Для системы подмножеств H полагаем $\mathsf{H}_c(\mathbb{X}) = \{\mathrm{cl}_{\mathbb{X}}\, A \mid A \in \mathsf{H}(\mathbb{X})\}$.

Определение 12 ([3]). Пусть H является системой подмножеств. T_0-пространство $\mathbb{X}$ называется H-*собранным*, если $\mathsf{H}_c(\mathbb{X}) = \mathsf{S}_c(\mathbb{X})$.

Следующее утверждение имеет простое доказательство, см. [3, Proposition 4.26].

Лемма 13. *Пусть* H *является системой подмножеств* [*I-системой соответственно*]. *Если* $\mathbb{X}$ *является ретрактом* H-*собранного пространства* $\mathbb{Y}$, *то* $\mathbb{X}$ *также является* H-*собранным.*

Доказательство. Согласно предположению существуют непрерывное сюръективное отображение $r\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ и гомеоморфное вложение $e\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ такие, что $re = \mathrm{id}_{\mathbb{X}}$. Пусть $A \in \mathsf{H}(\mathbb{X})$; тогда $e(A) \in \mathsf{H}(\mathbb{Y})$. Согласно нашему предположению, найдется $y \in Y$ с условием $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}}\, e(A) = {\downarrow} y$. Непосредственно проверяется, что $r(y)$ является предельной точкой для множества $re(A) = A$. Более того, поскольку $r\big(\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}}\, e(A)\big) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{X}}\, re(A) = \mathrm{cl}_{\mathbb{X}}\, A$, мы получаем $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}}\, A = {\downarrow} r(y)$. □

3. H-собранность пространств непрерывных функций

Предложение 14. *Пусть* H *является системой подмножеств* [*I-системой соответственно*]. *Пусть* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ *являются T_0-пространствами и пусть топология* $\mathcal{T}$ *на* $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *такова, что* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_A(\subseteq)^\sharp$. *Если пространство* $\mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H-*собранным, то пространство* $\mathbb{Y}$ *также* H-*собранно.*

Доказательство. Согласно лемме 3 $\xi_{\mathcal{T}}$ является гомеоморфным вложением $\mathbb{Y}$ в $\mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Для фиксированного элемента $x \in X$ отображение $\zeta_{x,\mathcal{T}}\colon \mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \to \mathbb{Y}$ непрерывно по лемме 4. Более того, для каждого $y \in Y$ имеем $\zeta_{x,\mathcal{T}}\xi_{\mathcal{T}}(y) = \zeta_{x,\mathcal{T}}(\xi_y) = \xi_y(x) = y$, поэтому пространство $\mathbb{Y}$ является ретрактом пространства $\mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Требуемое заключение вытекает из леммы 13. □

Предложение 15. *Пусть* H *является* I*-системой. Для* T_0*-пространств* $\mathbb{X}$ *и* $\mathbb{Y}$ *имеют место следующие утверждения.*

(1) *Если* $\mathbb{Y}$ *является* H*-собранным, то* $\mathbb{C}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *также является* H*-собранным.*

(2) *Если* $\mathbb{X}$ c*-компактно, а* $\mathbb{Y}$ *является* H*-собранным, то* $\mathbb{C}_{\mathcal{I}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *также является* H*-собранным.*

Доказательство. Всюду далее в этом доказательстве мы считаем, что $\mathcal{T} \in \{\mathcal{P},\mathcal{I}\}$. Согласно лемме 2 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_A(\subseteq)^\sharp \subseteq \mathcal{T}(\leq_{\mathcal{P}})$. В силу леммы 1 отсюда следует, что отношения $\leq_{\mathcal{T}}$ и $\leq_{\mathcal{P}}$ совпадают.

Пусть $F \in \mathsf{H}\big(\mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\big)$; в этом случае для произвольного $x \in X$ имеем $F(x) = \{f(x) \mid f \in F\} = \zeta_{x,\mathcal{T}}(F) \in \mathsf{H}(\mathbb{Y})$. H-собранность пространства $\mathbb{Y}$ влечет, что для любого $x \in X$ существует $g(x) \in Y$ такой, что $\downarrow g(x) = \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} F(x)$. Мы покажем, что отображение $g\colon X \to Y$ непрерывно. Действительно, пусть $x \in g^{-1}(U)$ для некоторого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Тогда $g(x) \in U$, поэтому $f(x) \in U$ для некоторого $f \in F$. Предположим, что $x' \in f^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$; другими словами, $f(x') \in U$. Поскольку $f(x') \leq g(x')$, мы заключаем, что $g(x') \in U$. Следовательно, $x \in f^{-1}(U) \subseteq g^{-1}(U)$, и поэтому $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Это и доказывает непрерывность g.

Так как отношения $\leq_{\mathcal{T}}$ и $\leq_{\mathcal{P}}$ совпадают, мы делаем вывод, что $F \subseteq \downarrow g$, откуда $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}} F \subseteq \downarrow g$. Для установления H-собранности пространства $\mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ достаточно показать, что g является предельной точкой для F в топологии $\mathcal{T}$. Действительно, пусть $g \in V \in \mathcal{T}$.

Рассмотрим первый случай, когда $\mathcal{T} = \mathcal{P}$. По определению топологии поточечной сходимости существуют $x_0,\ldots,x_n \in X$ и $U_0,\ldots,U_n \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ такие, что $g \in V_{x_0,U_0} \cap \ldots \cap V_{x_n,U_n} \subseteq V$. Таким образом, $g(x_i) \in U_i$ для всех $i \leqslant n$. Поскольку $g(x_i)$ является предельной точкой для множества $F(x_i)$, мы заключаем, что $F \cap V_{x_i,U_i} \neq \varnothing$ для всех $i \leqslant n$. Следовательно, $F \cap V_{x_0,U_0} \cap \ldots \cap V_{x_n,U_n} \neq \varnothing$, так как множество F неприводимо. Поэтому $F \cap V \neq \varnothing$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathcal{T} = \mathcal{I}$. Сначала мы докажем одно вспомогательное

Утверждение 16. Если $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ и $W \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ таковы, что $g \in V_{U,W}$, то существует $f \in F$ с условием $f \in V_{U,W}$.

Доказательство. Прежде всего мы утверждаем, что

$$g^{-1}(W) = \bigcup\big\{f^{-1}(W) \mid f \in F\big\}.$$

Действительно, если $x \in f^{-1}(W)$ для некоторого $f \in F$, то $g(x) \geq f(x) \in W$, отсюда $g(x) \in W$. Обратно, если $g(x) \in W$, то $f(x) \in W$ для некоторого $f \in F$, так как $g(x)$ является предельной точкой в $\mathbb{Y}$ для множества $F(x)$.

Далее, включение $g \in V_{U,W}$ означает, что $U \prec g^{-1}(W) = \big\{f^{-1}(W) \mid f \in F\big\}$. Следовательно, найдутся $f_0,\ldots,f_k \in F$ такие, что $U \prec f_0^{-1}(W) \cup \ldots \cup f_k^{-1}(W)$. Так как пространство $\mathbb{X}$ c-компактно, то $\mathcal{T}(\mathbb{X})$ является α-пространством в топологии Скотта по теореме 6.

Поэтому существует $U' \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ такое, что

$$U \prec U' \prec f_0^{-1}(W) \cup \ldots \cup f_k^{-1}(W).$$

Полагая $\mathcal{B} = \mathcal{T}(\mathbb{X})$ и применяя предложение 9, мы получаем, что существуют открытые множества $S_0, \ldots, S_k \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ такие, что

$$S_i \prec f_i^{-1}(W) \text{ для всех } i \leqslant k \text{ и } U \subseteq S_0 \cup \ldots \cup S_n \subseteq U'.$$

Для каждого $i \leqslant k$ имеем $S_i \prec f_i^{-1}(W)$, поэтому $f_i \in V_{S_i,W} \in \mathcal{I}$ для всех $i \leqslant k$. Это означает, что $f_i \in F \cap V_{S_i,W} \neq \varnothing$ для всех $i \leqslant k$. Следовательно, $F \cap V_{S_0,W} \cap \ldots \cap V_{S_n,W} \neq \varnothing$, так как множество F неприводимо.

Для того, чтобы установить $F \cap V_{U,W} \neq \varnothing$, достаточно показать включение $V_{S_0,W} \cap \ldots \cap V_{S_n,W} \subseteq V_{U,W}$. Действительно, если $h \in V_{S_0,W} \cap \ldots \cap V_{S_n,W}$, то $h \in V_{S_i,W}$ для каждого $i \leqslant k$. Отсюда $S_i \prec h^{-1}(W)$ для всех $i \leqslant k$. Таким образом,

$$\begin{aligned} h^{-1}(W) &\in \operatorname{int}_{\mathcal{T}(\mathbb{X})} {\uparrow} S_0 \cap \ldots \cap \operatorname{int}_{\mathcal{T}(\mathbb{X})} {\uparrow} S_k \subseteq \operatorname{int}_{\mathcal{T}(\mathbb{X})} \big({\uparrow} S_0 \cap \ldots \cap {\uparrow} S_k\big) \\ &= \operatorname{int}_{\mathcal{T}(\mathbb{X})} {\uparrow}(S_0 \cup \ldots \cup {\uparrow} S_k). \end{aligned}$$

Следовательно, $U \subseteq S_0 \cup \ldots \cup S_k \prec h^{-1}(W)$, откуда получаем $h \in V_{U,W}$. Что и требовалось доказать. □

Рассмотрим теперь общий случай. Согласно следствию 8 существуют открытые множества $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ и $W_0, \ldots, W_n \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ такие, что $g \in V_{U_0,W_0} \cap \ldots \cap V_{U_n,W_n} \subseteq V$. По утверждению 16 существуют $f_0, \ldots, f_n \in F$ такие, что $f_i \in F \cap V_{U_i,W_i} \neq \varnothing$ для всех $i \leqslant n$. Таким образом, $F \cap V_{U_0,W_0} \cap \ldots \cap V_{U_n,W_n} \neq \varnothing$, поскольку множество F неприводимо. Отсюда получаем $F \cap V \neq \varnothing$, что и требовалось. □

Замечание 17. Утверждение предложения 15(1) было установлено в [3, Theorem 4.28]. Более сильное утверждение, чем утверждение предложения 15(2), было анонсировано в [10, Corollary 4.25]. Однако доказательство этого более сильного утверждения в [10] содержит пробел.

Теорема 18. *Пусть* H *является* I*-системой. Для* T_0*-пространства* $\mathbb{Y}$ *равносильны следующие утверждения.*

(1) $\mathbb{Y}$ *является* H*-собранным.*

(2) $\mathbb{C}_{\mathcal{I}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H*-собранным для каждого c-компактного пространства* $\mathbb{X}$*.*

(3) $\mathbb{C}_{\mathcal{I}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H*-собранным для некоторого* [*c-компактного*] *пространства* $\mathbb{X}$*.*

(4) $\mathbb{C}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H*-собранным для каждого* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$*.*

(5) $\mathbb{C}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H*-собранным для некоторого* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$*.*

(6) $\mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H*-собранным для некоторого* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$ *и некоторой топологии* $\mathcal{T}$ *на* $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *с условием* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_A(\subseteq)^\sharp$*.*

Доказательство. Утверждение (1) влечет утверждения (2) и (4) в силу предложения 15. Далее, утверждение (2) влечет (3), утверждение (4) влечет (5), а каждое из утверждений (3) и (5) влечет (6) тривиальным образом. Наконец, утверждение (6) влечет (1) по предложению 14. □

4. Приложения

Следствие 19. *Пусть* H *– произвольная* I*-система из семейства*

$$\left\{\mathsf{D}, \mathsf{D}^b, \mathsf{WF}, \mathsf{WF}^b, \mathsf{R}, \mathsf{R}^b, \mathsf{I}, \mathsf{I}^b\right\}.$$

Для T_0*-пространства* $\mathbb{Y}$ *равносильны следующие утверждения.*

(1) $\mathbb{Y}$ *является* H*-собранным.*

(2) $\mathbb{C}_{\mathcal{I}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H*-собранным для каждого с-компактного пространства* $\mathbb{X}$*.*

(3) $\mathbb{C}_{\mathcal{I}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H*-собранным для некоторого [с-компактного] пространства* $\mathbb{X}$*.*

(4) $\mathbb{C}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H*-собранным для каждого* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$*.*

(5) $\mathbb{C}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H*-собранным для некоторого* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$*.*

(6) $\mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H*-собранным для некоторого* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$ *и некоторой топологии* $\mathcal{T}$ *на* $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *такой, что* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_A(\subseteq)^\sharp$*.*

Замечание 20. Следствие 19 обобщает теоремы 9 и 12 из [2], см. также [11].

В работе [10] были поставлены следующие вопросы.

Вопрос 21 ([10, Question 4.19])**.** Для T_0-пространства $\mathbb{X}$ и H-собранного пространства $\mathbb{Y}$ является ли пространство непрерывных функций $\mathbb{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ H-собранным?

Вопрос 22 ([10, Question 4.20])**.** Для T_0-пространства $\mathbb{X}$ и собранного [вполне фильтрованного] пространства $\mathbb{Y}$ является ли пространство $\mathbb{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ собранным [вполне фильтрованным соответственно]?

Из предложения 7(2) и теоремы 18 следует, что справедливо такое

Следствие 23. *Пусть* H *является* I*-системой. Для* T_0*-пространства* $\mathbb{Y}$ *следующие условия равносильны.*

(1) $\mathbb{Y}$ *является* H*-собранным.*

(2) $\mathbb{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H*-собранным для каждого локально компактного пространства* $\mathbb{X}$*.*

(3) $\mathbb{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H*-собранным для некоторого [локально компактного] пространства* $\mathbb{X}$*.*

(4) $\mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *является* H*-собранным для некоторого* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$ *и некоторой топологии* $\mathcal{T}$ *на* $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *с условием* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_A(\subseteq)^\sharp$*.*

Список литературы

[1] Yu.L. Ershov, M.V. Schwidefsky, *On function spaces*, Сиб. электрон. матем. изв. **17**, 999–1008 (2020).
DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.074

[2] Yu.L. Ershov, M.V. Schwidefsky, *On function spaces.* II, Сиб. электрон. матем. изв. **19** (2), 815–834 (2022).
DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2021.19.069

[3] Xiaoquan Xu, *On H-sober spaces and H-sobrifications of T_0-spaces*, Topology Appl. **289**, article no. 107548 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107548

[4] Ю.Л. Ершов, *Топология для дискретной математики*, Изд-во СО РАН, Новосибирск, 2020.

[5] J. Goubault-Larrecq, *Non-Hausdorff Topology and Domain Theory: Selected Topics in Point-Set Topology*, New Math. Monogr. **22**, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781139524438

[6] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *Continuous Lattices and Domains*, Encyclopedia Math. Appl. **93**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511542725

[7] B.J. Day, J.M. Kelly, *On topological quotient maps preserved by pullbacks or products*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **67** (3), 553–558 (1970).
DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004100045850

[8] B. Banaschewski, *Essential extensions of T_0-spaces*, General Topol. Appl. **7** (3), 233–246 (1977).
DOI: https://doi.org/10.1016/S0016-660X(77)80001-9

[9] T. Bice, *Grätzer–Hofmann–Lawson–Jung–Sünderhauf duality*, Algebra Universalis **82** (2), article no. 35 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00012-021-00729-2

[10] Meng Bao, Xiaoyuan Zhang, Xiaoquan Xu, *On function spaces related to H-sober spaces*, preprint.
URL: https://www.researchgate.net/publication/359335792

[11] Beng Liu, Qingguo Li, Weng Kin Ho, *On function spaces related to d-spaces*, Topology Appl. **300**, article no. 107757 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107757

Юрий Леонидович Ершов
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: ershov@math.nsc.ru

Марина Владимировна Швидефски
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
E-mail: m.schwidefsky@g.nsu.ru

Volume 1, Issue 3 UDC 515.122
pp. 22–32 (2023) MSC 54C35, 54D10

On function spaces. III

Yu.L. Ershov, M.V. Schwidefsky

Abstract. For topological T_0-spaces $\mathbb{X}$ and $\mathbb{Y}$, we prove that the space $\mathbb{Y}$ is H-sober if and only if the function space $\mathbb{C}_{\mathcal{T}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ endowed with a certain topology $\mathcal{T}$ is H-sober.

Keywords: core-compact space, function space, sober space, T_0-space.

References

[1] Yu.L. Ershov, M.V. Schwidefsky, *On function spaces*, Sib. Electron. Math. Rep. **17**, 999–1008 (2020).
DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.074

[2] Yu.L. Ershov, M.V. Schwidefsky, *On function spaces.* II, Sib. Electron. Math. Rep. **19** (2), 815–834 (2022).
DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2021.19.069

[3] Xiaoquan Xu, *On H-sober spaces and H-sobrifications of T_0-spaces*, Topology Appl. **289**, article no. 107548 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107548

[4] Yu.L. Ershov, *Topology for discrete mathematics*, Publishing House SB RAS, Novosibirsk, 2020 [in Russian].

[5] J. Goubault-Larrecq, *Non-Hausdorff Topology and Domain Theory: Selected Topics in Point-Set Topology*, New Math. Monogr. **22**, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781139524438

[6] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *Continuous Lattices and Domains*, Encyclopedia Math. Appl. **93**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511542725

[7] B.J. Day, J.M. Kelly, *On topological quotient maps preserved by pullbacks or products*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **67** (3), 553–558 (1970).
DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004100045850

Acknowledgements. The research was carried out in the framework of the state contract of Sobolev Institute of Mathematics, project no. FWNF-2022-0012.

Received: 07 July 2023. Accepted: 26 September 2023. Published: 18 October 2023.

[8] B. Banaschewski, *Essential extensions of T_0-spaces*, General Topol. Appl. **7** (3), 233–246 (1977).
DOI: https://doi.org/10.1016/S0016-660X(77)80001-9

[9] T. Bice, *Grätzer–Hofmann–Lawson–Jung–Sünderhauf duality*, Algebra Universalis **82** (2), article no. 35 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00012-021-00729-2

[10] Meng Bao, Xiaoyuan Zhang, Xiaoquan Xu, *On function spaces related to H-sober spaces*, preprint.
URL: https://www.researchgate.net/publication/359335792

[11] Beng Liu, Qingguo Li, Weng Kin Ho, *On function spaces related to d-spaces*, Topology Appl. **300**, article no. 107757 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107757

Ershov Yurii Leonidovich
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: ershov@math.nsc.ru

Schwidefsky Marina Vladimirovna
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: m.schwidefsky@g.nsu.ru

Том 1, Выпуск 3
Стр. 33–45 (2023)

УДК 510.54, 510.57
MSC 03D45, 03D25

Нумерации в допустимых множествах над эквивалентностями

И.Ш. Калимуллин, В.Г. Пузаренко

Аннотация. Строится серия примеров допустимых множеств $\mathbb{A}$, в которых семейство всех $\mathbb{A}$-в.п. множеств не имеет ни негативной, ни позитивной вычислимых $\mathbb{A}$-нумераций.

Ключевые слова: нумерация, разрешимая нумерация, позитивная нумерация, негативная нумерация, вычислимая нумерация, допустимое множество.

Одним из классических результатов теории вычислимости является теорема Фридберга [1] о существовании вычислимой нумерации без повторений семейства всех вычислимо перечислимых множеств. Такие нумерации называются *однозначными* или, принимая во внимание процитированный результат, *фридберговыми* и примечательны тем, что образуют минимальные элементы относительно сводимости всех нумераций рассматриваемого множества. В настоящей статье вместо семейства всех в.п. множеств рассматриваются семейства $\Sigma(\mathbb{A})$ всех Σ-подмножеств (или $\mathbb{A}$-в.п. подмножеств) допустимых множеств $\mathbb{A}$. Согласно результатам работы [2] теорему Фридберга нельзя перенести на семейства вида $\Sigma(\mathbb{A})$; более того, в [2,3] построены примеры допустимых множеств $\mathbb{A}$, у которых семейства $\Sigma(\mathbb{A})$ не имеют разрешимых или даже позитивных вычислимых нумераций. В [4] найдены семейства вида $\Sigma(\mathbb{A})$, обладающие позитивными, но не обладающие негативными вычислимыми нумерациями. Допустимым множеством для упомянутого выше результата служит наследственно конечная надстройка над позитивным напарником отношения эквивалентности, разбивающего основное множество на бесконечное число бесконечных классов. Основным результатом настоящей статьи является обоснование того, что наследственно конечная надстройка над негативным напарником не обладает двойственным свойством. Более точно, наследственно конечная надстройка $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$ над негативным напарником $\mathfrak{A}^-$ отношения эквивалентности не имеет ни позитивной, ни негативной вычислимых $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$-нумераций семейства $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-))$.

Благодарности. Работа И.Ш. Калимуллина поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 23-21-00181) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944). Работа В.Г. Пузаренко поддержана проектом FWNF-2022-0012 (Классификационные вопросы синтаксиса и семантики логических систем).

Поступила: 25.05.2023. Принята: 26.09.2023. Опубликована: 18.10.2023.

Пусть A – бесконечное множество и пусть R_A – отношение эквивалентности на нем, разбивающее данное множество на бесконечное число бесконечных классов. Пусть также

$$A^+ = \{\{a_1, a_2\} \mid R_A(a_1, a_2),\ a_1 \neq a_2\},\ \ A^- = \{\{a_1, a_2\} \mid \neg R_A(a_1, a_2)\}.$$

Определим далее структуры, свойствам которых будет посвящена настоящая работа.

1) $\mathfrak{B} = \langle B, R_B\rangle$, где B – бесконечное множество (ее теорию будем обозначать через T);
2) $\mathfrak{B}^+ = \langle B \uplus B^+, Q_B^+\rangle$, где $Q_B^+ = \{\langle a, b, c\rangle \in B^2 \times B^+ \mid c = \{a, b\}\}$ и B – универсум $\mathfrak{B}$ (ее теорию будем обозначать через T_+);
3) $\mathfrak{B}^- = \langle B \uplus B^-, Q_B^-\rangle$, где $Q_B^- = \{\langle a, b, c\rangle \in B^2 \times B^- \mid c = \{a, b\}\}$ и B – универсум $\mathfrak{B}$ (ее теорию будем обозначать через T_-).

Как обычно, модели выше будут рассматриваться с точностью до изоморфизма, и в наследственно конечных надстройках над ними их элементы не будут иметь дополнительной теоретико-множественной структуры. Отметим, что теории выше не зависят от выбора бесконечных множеств (другими словами, модели, указанные в каждом пункте выше, элементарно эквивалентны), что вытекает из счетной категоричности данных структур. Более того, наследственно конечные надстройки над моделями из одного и того же вышеперечисленного класса будут элементарно эквивалентными (см. § 3.4 [5]).

В работах [2, 4] установлено следующее утверждение.

Теорема 1. *Для модели $\mathfrak{A}$ справедливы следующие условия:*

1) *если $\mathfrak{A} \models \mathrm{T}$, то существует разрешимая вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$-нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A}))$, однако не существует однозначной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$-нумерации данного семейства;*
2) *если $\mathfrak{A} \models \mathrm{T}_+$, то существует позитивная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$-нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A}))$, однако не существует негативной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$-нумерации данного семейства.*

Целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Если $\mathfrak{A} \models \mathrm{T}_-$, то $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ не имеет ни позитивных, ни негативных вычислимых $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$-нумераций семейства $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A}))$.*

Основные сведения из теории нумераций можно найти в [6], из теории допустимых множеств – в [5, 7], из классической вычислимости – в [8], а из теории конструктивных моделей – в [9,10]. Дополнительная информация о нумерациях на допустимых множествах содержится в [11, 12]. Часто символом $\rightleftharpoons$ будем обозначать равенство по определению. Все наши рассмотрения будут касаться наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$ над моделью $\mathfrak{A}^- \models \mathrm{T}_-$.

Часто в обозначениях будем отождествлять модели с их универсумами.

Пусть M – множество; тогда $HF_0(M) \rightleftharpoons \varnothing$,

$$HF_{n+1}(M) \rightleftharpoons \mathcal{P}_\omega(HF_n(M) \cup M),\ HF(M) \rightleftharpoons \bigcup_{n\in\omega} HF_n(M)$$

(здесь $\mathcal{P}_\omega(X)$ – множество всех конечных подмножеств множества X). Множество a называется *наследственно конечным* над M, если $a \in HF(M)$. Пусть $\mathfrak{M}$ – модель чисто предикатной сигнатуры σ, заданная на множестве M. В этом случае на $HF(M) \cup M$ можно задать модель $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ сигнатуры $\sigma \uplus \{U^1, \in^2, \varnothing\}$ (называемую *наследственно конечной надстройкой над* $\mathfrak{M}$) так, что сигнатурные символы из σ будут интерпретироваться так же, как и на $\mathfrak{M}$, символы $\varnothing$ и $\in$ – как пустое множество и отношение принадлежности соответственно, а U будет интерпретироваться как M, элементы которого будут называться *праэлементами.*

Под $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-вычислимыми ($\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-в.) и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-вычислимо перечислимыми ($\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-в.п.) отношениями будем понимать соответственно Δ- и Σ-предикаты на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Семейства всех $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-в. и всех $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-в.п. множеств будем обозначать как $\Delta(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ и $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ соответственно. Все формулы в настоящем абзаце будут рассматриваться в сигнатуре $\sigma \uplus \{U, \in, \varnothing\}$. Класс Δ_0-*формул* – наименьший класс, содержащий атомарные формулы и замкнутый относительно логических связок $\neg$, $\to$, $\wedge$, $\vee$, а также ограниченной квантификации ($\forall y \in x$ и $\exists y \in x$). Класс Σ-*формул* – наименьший класс, содержащий Δ_0-формулы и замкнутый относительно логических связок $\wedge$, $\vee$, ограниченной квантификации ($\forall y \in x$ и $\exists y \in x$), а также квантора существования ($\exists x$). Σ-*предикатами* называются отношения, определимые Σ-формулами (возможно, с параметрами). Δ-*предикаты* – Σ-предикаты, дополнениями которых также являются Σ-предикаты.

Через $\mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ будем обозначать множество ординалов данной наследственно конечной надстройки, которое используется в конструкциях как совокупность ω натуральных чисел. Через sp будем обозначать одноместную Σ-операцию *носителя* ($\mathrm{sp}(x) = \{u \in \mathrm{TC}(\{x\}) \mid \mathrm{U}(u)\}$), где $\mathrm{TC}(a)$ – транзитивное замыкание “множества” a (см. I.6 [7]).

Пусть X – множество; под *кортежем* или *набором* будем понимать

$$\overrightarrow{x} \rightleftharpoons \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle \in X^n,$$

где $n \in \omega$ (в этом случае его *длина* $\mathrm{lh}(\overrightarrow{x})$ будет равняться n). Если, к тому же, f – функция, заданная на X, то под $f(\overline{x})$ будем понимать кортеж $\langle f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})\rangle$. Пустой кортеж, т. е. элемент X^0, будем обозначать λ.

Как и в [12, 13], Σ-предикаты будем задавать так называемыми вычислимыми дизъюнкциями. Зафиксируем сильно вычислимую последовательность термов $\{t_m\}_{m\in\omega}$ сигнатуры $\{\varnothing, \cup^2, \{\cdot\}^1\}$ и связанную с ней сильно вычислимую последовательность групп перестановок $\{\mathfrak{S}_m\}_{m\in\omega}$, удовлетворяющие следующим условиям (здесь и далее $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u})$ – длина кортежа $\overrightarrow{u}$; под местностью терма t_m будем понимать его *реальную* местность, т. е.

фактическое количество переменных, участвующих в построении терма, обозначаемую в дальнейшем n_m, где $m \in \omega$):

1) если $\overrightarrow{u}$ – набор элементов из $\mathfrak{M}$ и t_m – терм местности $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u})$, то $t_m(\overrightarrow{u}) \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$;
2) каков бы ни был элемент $a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, найдутся набор $\overrightarrow{u}$ попарно различных элементов из $\mathfrak{M}$ и терм t_m местности $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u})$, для которых будет выполняться равенство $a = t_m(\overrightarrow{u})$;
3) для каждого $m \in \omega$ группа $\mathfrak{S}_m$ содержит только перестановки множества $\{l \in \omega : l < n_m\}$;
4) данное представление является почти однозначным, а именно, выполняется следующее для всех $m_0, m_1 \in \omega$ и наборов $\overrightarrow{u_0}$, $\overrightarrow{u_1}$ попарно различных элементов из $\mathfrak{M}$ (причем местность терма t_{m_i} совпадает с $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u_i})$, $i = 0, 1$):
   - если $t_{m_0}(\overrightarrow{u_0}) = t_{m_1}(\overrightarrow{u_1})$, то $m_0 = m_1$;
   - $t_{m_0}(\overrightarrow{u_0}) = t_{m_0}(\overrightarrow{u_1})$, если и только если $\overrightarrow{u_0} = \pi(\overrightarrow{u_1})$ для некоторой перестановки $\pi \in \mathfrak{S}_{m_0}$ (условиями (3), (4) группа $\mathfrak{S}_m$ определяется однозначно);
5) последовательность $\{t_p\}_{p\in\omega}$ термов будет *сильно вычислимой* в том смысле, что по каждой паре, состоящей из числа $p \in \omega$ и кортежа $\overrightarrow{u} = \langle u_i | i \in \omega,\ i < n_p\rangle$ попарно различных элементов из $\mathfrak{M}$, можно найти и притом эффективно конечное множество $F_p \subseteq \omega$ пар вида $\langle k, \overrightarrow{u}'\rangle$ (здесь $k \in \omega$, а кортеж $\overrightarrow{u}'$ будет иметь длину n_k, образовывать который будут некоторые попарно различные элементы из $\mathfrak{M}$, участвующие в построении кортежа $\overrightarrow{u}$), удовлетворяющее равенству $t_p(\overrightarrow{u}) = \{t_k(\overrightarrow{u}') | \langle k, \overrightarrow{u}'\rangle \in F_p\}$ (нетрудно построить терм сигнатуры $\{\{\cdot\}, \cup, \varnothing\}$, соответствующий правой части равенства). Более того, конечное множество F_p будет задаваться сильным индексом в классическом понимании. Будем также считать, что $t_0(m) = m (\in \mathfrak{M})$, $t_1(\lambda) = \varnothing$ и, в этих случаях, $F_0 = F_1 = \varnothing$.

С помощью Σ-рекурсии (§ 2.5 [5]) доказывается, что соответствие

$$\langle k, \overrightarrow{m}\rangle (\in \mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M})) \times \mathfrak{M}^{n_k}) \mapsto t_k(\overrightarrow{m}),$$

где $\overrightarrow{m}$ пробегает наборы длины n_k попарно различных элементов из $\mathfrak{M}$, является Σ-функцией, причем определяющая ее график Σ-формула (сигнатуры $\{\mathrm{U}, \in, \varnothing\}$) может быть задана без параметров и не будет зависеть от выбора $\mathfrak{M}$.

Так как любой элемент наследственно конечной надстройки над моделью задается подходящими натуральным числом, определяющим номер терма, и набором праэлементов, будем считать, что параметрами любой наперед заданной Σ-формулы сигнатуры σ^* на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ служат праэлементы.

Справедлива (см., например, [13]):

Теорема 3. *Пусть σ – сигнатура. Тогда существует двойная вычислимая последовательность A_n^Φ множеств, состоящих из геделевых номеров $\exists$-формул сигнатуры σ, удовлетворяющая следующему условию: если $\mathfrak{M}$ – модель сигнатуры σ и $\Phi(x_0, y_0, \ldots, y_k)$ –*

Σ-формула сигнатуры $\sigma \uplus \{U^1, \in^2, \varnothing\}$, то имеет место равенство

$$\{a \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(a, s_0, \ldots, s_k)\} = \\ \{t_m(\overrightarrow{u}) \mid m \in \omega,\, \mathfrak{M} \models \varphi(\overrightarrow{u}, s_0, \ldots, s_k) \text{ для некоторой } \varphi \in A^{\Phi}_m\}$$

для любых s_0, …, s_k из $\mathfrak{M}$.

Имеет место и в некотором смысле обратное утверждение.

Теорема 4. *Пусть σ – сигнатура и A_n – вычислимая последовательность множеств, состоящих из геделевых номеров $\exists$-формул сигнатуры σ. Тогда*

$$\{t_m(\overrightarrow{u}) \mid m \in \omega,\, \mathfrak{M} \models \varphi(\overrightarrow{u}, s_0, \ldots, s_k) \text{ для некоторой } \varphi \in A_m\}$$

будет Σ-подмножеством $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, для любых модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ и элементов s_0, …, s_k из $\mathfrak{M}$. Более того, номер Σ-формулы, его определяющей, эффективно находится по вычислимой последовательности и не зависит от модели $\mathfrak{M}$.

Наследственно конечные надстройки служат ключевыми объектами исследований в настоящей работе. И в дальнейшем, если не оговорено особо, под допустимыми множествами можно подразумевать именно представителей данного класса.

Отметим [12], что любое формульное подмножество $B \subseteq M^n$ на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ (с параметрами из $\mathfrak{M}$) будет формульным на $\mathfrak{M}$ (с теми же параметрами), если $\mathfrak{M}$ имеет счетно категоричную теорию.

Напомним теперь основные понятия теории нумераций на допустимых множествах. Пусть $\mathbb{A}$ – допустимое множество и пусть S – множество произвольной природы; отображение ν, заданное на некотором Σ-множестве структуры $\mathbb{A}$ и действующее на S, называется $\mathbb{A}$-*нумерацией* множества S (в этом случае будем обозначать $\rho\nu = S$ – область значений, а $\delta\nu$ – область задания ν). $\mathbb{A}$-нумерация ν называется *всюду определенной*, если $\delta\nu$ совпадает с носителем допустимого множества $\mathbb{A}$. Как обычно, на множестве $\delta\nu$ определяется отношение η_ν эквивалентности следующим образом:

$$\eta_\nu = \{\langle a; b\rangle \in (\delta\nu)^2 \mid \nu(a) = \nu(b)\}.$$

$\mathbb{A}$-нумерация ν называется

- *позитивной*, если η_ν – Σ-предикат на $\mathbb{A}$;
- *негативной*, если $(\delta\nu)^2 \setminus \eta_\nu$ – Σ-предикат на $\mathbb{A}$;
- *разрешимой*, если она позитивна и негативна одновременно;
- *однозначной*, если η_ν совпадает с отношением равенства на $\delta\nu$.

Далее, пусть $S \subseteq \Sigma(\mathbb{A})$; тогда Γ^*_ν определим следующим образом:

$$\Gamma^*_\nu \leftrightharpoons \{\langle a; b\rangle \mid a \in \delta\nu,\, b \in \nu(a)\}.$$

$\mathbb{A}$-нумерацию ν будем называть *вычислимой*, если $\Gamma^*_\nu \in \Sigma(\mathbb{A})$. Семейство S будем называть $\mathbb{A}$-*вычислимым*, если оно имеет хотя бы одну вычислимую $\mathbb{A}$-нумерацию. Из существования универсального Σ-предиката (см. [5]) вытекает, что семейство $\Sigma(\mathbb{A})$ является $\mathbb{A}$-вычислимым. Как заявлено выше, основной целью настоящей работы является обсуждение проблемы существования в допустимых множествах вычислимых представлений семейства всех вычислимо перечислимых множеств, удовлетворяющих дополнительным условиям.

Из предложения 1.1 [11] вытекает, что рассмотрение непустой *частичной* позитивной (негативной, разрешимой) вычислимой $\mathbb{A}$-нумерации не расширяет объем понятия соответствующей *всюду определенной* $\mathbb{A}$-нумерации.

Напомним отрицательное условие работы [4], которое (точнее, само доказательство) будет активно использоваться ниже.

Предложение 5 (см. предложение 2 [4])**.** *Не существует негативной вычислимой* $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^+)$-*нумерации семейства* $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^+))$, *где* $\mathfrak{A}^+ \models \mathrm{T}_+$.

Предложение 6. *Не существует позитивной вычислимой* $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$-*нумерации семейства* $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-))$, *где* $\mathfrak{A}^- \models \mathrm{T}_-$.

Доказательство. Фактически носит двойственный характер к доказательству предложения 2 [4]. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathfrak{A}^-$ счетна. Допустим, что позитивная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$-нумерация существует (скажем, ν_1, причем $\Gamma^*_{\nu_1}$ и η_{ν_1} определимы соответственно Σ-формулами $\Phi_0(x, y, \overrightarrow{s})$ и $\Phi_1(x, y, \overrightarrow{s})$ с параметрами $\overrightarrow{s}$ из A). В силу термальности множества A^- над A, можно считать, что параметры лежат в A, и $\delta\nu_1 \subseteq HF(A) \cup A$. Возьмем класс эквивалентности $[a]_{R_A} = \{x \mid R_A(a, x)\}$, не содержащий параметров. Пусть $x_0 \in HF(A) \cup A$ таков, что $\nu_1(x_0) = A \setminus [a]_{R_A}$. Возможны два случая.

1. $\mathrm{sp}(x_0) \cap [a]_R = \varnothing$. Выберем автоморфизм f структуры $\mathfrak{A}^-$, действующий тождественно на множестве $\mathrm{sp}(x_0) \cup \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ и переводящий класс $[a]_{R_A}$ на некоторый другой класс $[b]_{R_A}$ (как нетрудно понять, также не пересекающийся с $\mathrm{sp}(x_0) \cup \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$). Данный автоморфизм единственным образом продолжается до автоморфизма $f^\#$ структуры $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$, причем будет выполняться условие $f^\#(a) = \{f^\#(z) \mid z \in a\}$. Тогда $x_0 = f^\#(x_0)$ и, следовательно,

$$A \setminus [a]_{R_A} = \nu_1(x_0) = \nu_1(f^\#(x_0)) = A \setminus [f^\#(a)]_{R_A} = A \setminus [b]_{R_A},$$

противоречие.

2. $\mathrm{sp}(x_0) \cap [a]_{R_A} \neq \varnothing$. Выберем автоморфизм f структуры $\mathfrak{A}^-$, действующий тождественно на множестве $(\mathrm{sp}(x_0) \cup \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})) \setminus [a]_{R_A}$ и переводящий класс $[a]_{R_A}$ на себя так, чтобы выполнялось соотношение

$$(\mathrm{sp}(x_0) \cap f(\mathrm{sp}(x_0))) \cap [a]_{R_A} = \varnothing.$$

Как и прежде, данный автоморфизм единственным образом продолжается до автоморфизма $f^\#$ структуры $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$. Тогда $\nu_1(x_0) = A \setminus [a]_{R_A} = \nu_1(f^\#(x_0))$ и, следовательно,

$\langle x_0, f^{\#}(x_0)\rangle \in \eta_{\nu_1}$, т. е. $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-) \models \Phi_1(x_0, f^{\#}(x_0), \overrightarrow{s})$. Пусть A_1, A_2 – бесконечные множества, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $A_1 \uplus A_2 = [a]_{R_A}$,
2) $\mathrm{sp}(x_0) \cap [a]_{R_A} \subseteq A_1$,
3) $f(\mathrm{sp}(x_0)) \cap [a]_{R_A} \subseteq A_2$.

Рассмотрим структуру $\mathfrak{B}$, основным множеством которой является

$$B = (A \uplus A^-) \uplus \{\{z_1, z_2\} \mid z_1 \in A_1,\ z_2 \in A_2\},$$

на котором задано тернарное отношение

$$Q_A^- \cup \{\langle x, y, z\rangle \mid z = \{x, y\},\ \langle x, y\rangle \in (A_1 \times A_2) \cup (A_2 \times A_1)\}$$

(снова предполагаем, что $\mathfrak{B}$ рассматривается с точностью до изоморфизма). Отметим, что, с одной стороны, $\mathfrak{A}^- \leqslant \mathfrak{B}$; с другой стороны, $\mathfrak{A}^-$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны. Из первого соотношения получаем

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{B}) \models \Phi_1(x_0, f^{\#}(x_0), \overrightarrow{s}). \tag{1}$$

Используя второе соотношение, фиксируем изоморфизмы f_0 и f_1 из $\mathfrak{A}^-$ на $\mathfrak{B}$, тождественные на $\mathrm{sp}(x_0) \cup \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ и $\mathrm{sp}(f^{\#}(x_0)) \cup \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ соответственно. Пусть $f_0^{\#}$ и $f_1^{\#}$ – единственные продолжения f_0, f_1 до изоморфизмов между $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$. Тогда имеем

$$\begin{gathered} z \in A \setminus [a]_{R_A} \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-) \models \Phi_0(x_0, z, \overrightarrow{s}) \Leftrightarrow \\ \mathbb{HF}(\mathfrak{B}) \models \Phi_0(f_0^{\#}(x_0), f_0^{\#}(z), f_0^{\#}(\overrightarrow{s})) \Leftrightarrow \\ \mathbb{HF}(\mathfrak{B}) \models \Phi_0(x_0, f_0^{\#}(z), \overrightarrow{s}) \Leftrightarrow \\ f_0^{\#}(z) \in f_0^{\#}(A \setminus [a]_{R_A}) = A \setminus A_1. \end{gathered}$$

Кроме того,

$$\begin{gathered} z \in A \setminus [a]_{R_A} \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-) \models \Phi_0(f^{\#}(x_0), z, \overrightarrow{s}) \Leftrightarrow \\ \mathbb{HF}(\mathfrak{B}) \models \Phi_0(f_1^{\#}(f^{\#}(x_0)), f_1^{\#}(z), f_1^{\#}(\overrightarrow{s})) \Leftrightarrow \\ \mathbb{HF}(\mathfrak{B}) \models \Phi_0(f^{\#}(x_0), f_1^{\#}(z), \overrightarrow{s}) \Leftrightarrow \\ f_1^{\#}(z) \in f_1^{\#}(A \setminus [a]_{R_A}) = A \setminus A_2. \end{gathered}$$

Таким образом, пришли к противоречию с (1). Пусть теперь $\mathfrak{A}^-$ несчетна. Допустим, что позитивная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$-нумерация существует (скажем, ν, причем Γ_ν^* и η_ν определимы Σ-формулами соответственно $\Phi_0(x, y, \overrightarrow{s})$ и $\Phi_1(x, y, \overrightarrow{s})$ с параметрами $\overrightarrow{s}$ из A). Как и в доказательстве предложения 2 [4], фиксируем счетную структуру $(\mathfrak{A}_0, \overrightarrow{s})$, для которой $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}_0, \overrightarrow{s}) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-, \overrightarrow{s})$. В силу счетной категоричности $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}^-)$ по доказанному выше заключаем, что не существует позитивной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}_0)$-нумерации семейства

$\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A}_0))$. Однако

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-) \models \forall a \exists b \forall c (U(a,c) \leftrightarrow \Phi_0(b,c,\overrightarrow{s}))\wedge$$
$$\wedge \forall a \forall b[(\exists c \Phi(a,c,\overrightarrow{s}) \wedge \forall c(\Phi_0(a,c,\overrightarrow{s}) \leftrightarrow \Phi_0(b,c,\overrightarrow{s}))) \to \Phi_1(a,b,\overrightarrow{s})],$$

где U – универсальный Σ-предикат. Следовательно, эта же формула истинна и в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}_0)$. Пришли к противоречию. □

Перейдем к доказательству несуществования негативного представления $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-))$ в наследственно конечной надстройке над $\mathfrak{A}^- \models \mathrm{T}_-$. Так как A^- термально представимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$ элементами из $HF(A) \cup A$, можно считать, что Σ-подмножества $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$ закодированы именно элементами из $HF(A) \cup A$. Эффективно также сопоставим элементам из $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$ элементы из $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ следующим образом:

$$\nu(x) \leftrightharpoons \begin{cases} x, & \text{если } x \in A; \\ \{u,v\}, & \text{если } Q(u,v,x); \\ \{\langle n, v_{\pi(0)}, v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}\rangle | \pi \in S_n\}, & \text{если } x = t_n(u_0,u_1,\ldots,u_k), \\ & v_i = \nu(u_i),\ 0 \leqslant i \leqslant k,\ k \in \omega. \end{cases}$$

Из свойств последовательности $\{t_n\}_{n\in\omega}$ термов вытекает, что ν разнозначна. Более точно, инъективное отображение ν является всюду определенной Σ-функцией, действующей в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$. Введенная таким образом кодировка позволяет закодировать семейство $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-))$ с помощью $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$-в.п. подмножеств $HF(A) \cup A$, а в силу следующей леммы определенного подсемейства $\mathcal{S} \subseteq \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A})) \cap \mathcal{P}(\rho\nu)$ семейства $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$-в.п. множеств.

Лемма 7. *По любой $\exists$-формуле φ сигнатуры модели $\mathfrak{A}^-$, истинной на непустом кортеже элементов из A, эффективно строится эквивалентная ей бескванторная формула φ' сигнатуры модели $\mathfrak{A}$ (а именно, $\mathfrak{A}^- \models \varphi(\overrightarrow{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi'(\overrightarrow{a})$ для всех $\overrightarrow{a} \in A^{<\omega}$), в которую предикатный символ R_A входит только негативно. Верно и обратное.*

Доказательство проводится индукцией по построению формулы φ с применением свойства разрешимости счетно категоричной теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, удовлетворяющей элиминации кванторов.

В самом деле, сначала в рамках настоящего доказательства предположим наличие двух сортов переменных: принимающих только значения из A (скажем, $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$) и принимающих только значения из A^- (скажем, $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$). Пусть для определенности формула φ имеет вид $\exists \overrightarrow{y} \bigwedge \Psi_0$, где Ψ_0 состоит из атомарных формул сигнатуры $\{Q^3, \approx\}$ и/или их отрицаний (при этом формула может быть и не совместимой). Приведем сначала эквивалентности для конъюнктов, содержащих переменные второго сорта (будем считать, что u_0 входит свободно в φ):

- $\exists v_1(\psi \wedge (v_0 \approx v_1)) \equiv [\psi]^{v_1}_{v_0}$;
- $\exists v_0(\psi \wedge (v_0 \approx v_0)) \equiv \exists v_0 \psi$;

- $\exists v_0\psi \equiv \psi$, где v_0 не входит свободно в ψ;
- $\exists v_0(v_0 \approx v_0) \equiv (u_0 \approx u_0)$;
- $\neg(v_0 \approx v_1) \equiv \exists u_1\exists u_2\exists u_3\exists u_4((Q(u_1,u_2,v_0) \wedge Q(u_3,u_4,v_1)) \wedge ((\neg(u_1 \approx u_2)\wedge$ $\neg(u_3 \approx u_4)) \wedge ((\neg(u_1 \approx u_3) \wedge \neg(u_1 \approx u_4)) \vee (\neg(u_2 \approx u_3) \wedge \neg(u_2 \approx u_4)))))$;
- $\neg(u_1 \approx v_0) \equiv \neg(v_0 \approx u_1) \equiv (u_1 \approx u_1)$;
- $(u_1 \approx v_0) \equiv (v_0 \approx u_1) \equiv \neg(u_1 \approx u_1)$;
- $Q(v_0,x,y) \equiv Q(x,v_0,y) \equiv \neg(u_0 \approx u_0)$, где x, y – любые переменные;
- $\neg Q(v_0,x,y) \equiv \neg Q(x,v_0,y) \equiv (u_0 \approx u_0)$, где x, y – любые переменные;
- $Q(u_1,u_1,v_0) \equiv \neg(u_1 \approx u_1)$, $\neg Q(u_1,u_1,v_0) \equiv (u_1 \approx u_1)$;
- $\neg Q(u_1,u_2,v_0) \equiv \exists u_3\exists u_4((Q(u_3,u_4,v_0) \wedge \neg(u_3 \approx u_4)) \wedge ((\neg(u_3 \approx u_1) \wedge \neg(u_3 \approx u_2))\vee$ $(\neg(u_4 \approx u_1) \wedge \neg(u_4 \approx u_2))))$;
- $(Q(u_1,u_2,v_0) \wedge Q(u_3,u_4,v_0)) \equiv (Q(u_1,u_2,v_0) \wedge ((((u_1 \approx u_3) \vee (u_1 \approx u_4))\wedge$ $((u_2 \approx u_3) \vee (u_2 \approx u_4))) \wedge (((u_1 \approx u_3) \vee (u_2 \approx u_3)) \wedge ((u_1 \approx u_4) \vee (u_2 \approx u_4)))))$;
- $\exists v_0(\psi \wedge Q(u_1,u_2,v_0)) \equiv (\psi \wedge \exists v_0 Q(u_1,u_2,v_0))$, где v_0 не входит свободно в ψ;
- $\exists v_0 Q(u_1,u_2,v_0) \equiv \neg R_A(u_1,u_2)$.

Вышеприведенные эквивалентности позволяют избавиться от вхождений переменных второго сорта и перейти к $\exists$-формулам сигнатуры $\{R_A,\approx\}$ только от переменных первого сорта, в которые предикатный символ R_A входит только негативно. Далее, наличие бесконечного количества бесконечных классов позволяет удалить конъюнкты, содержащие связанные переменные первого сорта.

В обратную сторону, следует снова воспользоваться последней равносильностью из предложенного выше списка. □

Предложение 8. *Не существует негативной вычислимой* $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$*-нумерации семейства* $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-))$*, если* $\mathfrak{A}^- \models \mathrm{T}_-$.

Доказательство. Случай несчетной структуры рассматривается, как выше, поэтому ограничимся только рассмотрением случая счетной структуры $\mathfrak{A}^-$. Допустим, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$ имеет негативную вычислимую $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$-нумерацию семейства $\mathcal{S}$, указанного выше (скажем, ν_0, т. е. $\Gamma^*_{\nu_0}$ и $(\delta\nu_0)^2\backslash\eta_{\nu_0}$ определимы Σ-формулами $\Phi_0(y_0,y_1,\overrightarrow{s})$ и $\Phi_1(y_0,y_1,\overrightarrow{s})$ соответственно, причем $\delta\nu_0 \subseteq HF(A)\cup A$ и набор $\overrightarrow{s}$ попарно различных элементов из A участвуют в качестве параметров Σ-формул для вышеупомянутых предикатов).

Выберем сначала элемент s_0 так, чтобы он не был R_A-эквивалентным никакому элементу из набора $\overrightarrow{s}$; затем возьмем x_0 и x_1 так, чтобы выполнялись условия $\nu_0(x_0) = \{u \mid (\neg R_A(u,s_0) \vee (u \approx s_0))\} \cup \{t_n(\overrightarrow{u}) \mid \top,\, n>0\}$, $\nu_0(x_1) = \{t_n(\overrightarrow{u}) \mid \top,\, n\in\omega\}$. Далее, возьмем элемент x_2 такой, что

$$\nu_0(x_2) = \{u \mid (\neg R_A(u,s_0) \vee ((u \approx s_0) \vee (u \approx s_1)))\} \cup \{t_n(\overrightarrow{u}) \mid \top,\, n>0\},$$

где s_1 выбирается так, чтобы он был R_A-эквивалентным s_0, но при этом $s_1 \notin \mathrm{sp}(x_0\cup x_1)$.

Докажем сначала, что $s_0 \in \mathrm{sp}(x_0)$. Действительно, если бы это было не так, то существовал бы автоморфизм f на $\mathfrak{A}^-$, действующий тождественно на множестве $(A \setminus [s_0]_{R_A}) \cup \mathrm{sp}(x_0)$, для которого выполнялось бы условие $f(s_0) \neq s_0$. Используя продолжение $f^\#$ на $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^-)$ автоморфизма f, заключаем, что $\nu_0(x_0) = \{u \mid (\neg R_A(u, s_0) \vee (u \approx f(s_0)))\} \cup \{t_n(\overrightarrow{u}) \mid \top,\ n > 0\}$, противоречие.

Аналогично доказывается, что $\{s_0, s_1\} \subseteq \mathrm{sp}(x_2)$. Те же рассуждения используем для того, чтобы выбрать в качестве x_1 элемент такой, что $\mathrm{sp}(x_1) \subseteq (A \setminus [s_0]_{R_A})$. Кроме того, можно добиться также чтобы выполнялось соотношение $\mathrm{sp}(x_0) \cap \mathrm{sp}(x_2) \cap [s_0]_{R_A} = \{s_0\}$.

Далее, построим модель $\mathfrak{B}$ такую, что $\mathfrak{A}^- \leqslant \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}^- \simeq \mathfrak{B}$. Для этого разобьем $[s_0]_{R_A}$ на два бесконечных множества A_0 и A_1 (т. е. $[s_0]_{R_A} = A_0 \uplus A_1$) следующим образом:

1) $\mathrm{sp}(x_0) \cap [s_0]_{R_A} \subseteq A_0$ (напомним, что $s_0 \in \mathrm{sp}(x_0)$);

2) $(\mathrm{sp}(x_2) \cap [s_0]_{R_A}) \setminus \{s_0\} \subseteq A_1$ (отметим, что в этом случае $s_1 \in A_1$).

В этой ситуации добавим в носитель модели $\mathfrak{A}^-$ множество $\{\{u, v\} \mid u \in A_0,\ v \in A_1\}$. Тем самым, модель $\mathfrak{B}$ отличается только тем, что класс $[s_0]_{R_A}$ разбивается на два непересекающихся класса A_0 и A_1: остальные классы остаются прежними. Так как $\mathfrak{A}^- \leqslant \mathfrak{B}$, имеем

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{B}) \models \forall u(((\neg R_A(u, s_0) \vee (u \approx s_0)) \to \Phi_0(x_2, u, \overrightarrow{s})),$$
$$\mathbb{HF}(\mathfrak{B}) \models \forall \overrightarrow{u} \in A^{n_k} \Phi_0(x_2, t_k(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{s})$$

для всех $k \in \omega \setminus \{0\}$, а также соотношение

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{B}) \models (\Phi_1(x_0, x_2, \overrightarrow{s}) \wedge \Phi_1(x_1, x_2, \overrightarrow{s})).$$

Для завершения остается взять изоморфизм g между $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}^-$, действующий тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \cup \mathrm{sp}(x_0 \cup x_1)$. Тогда $\{\langle x_0, g^\#(x_2)\rangle, \langle x_1, g^\#(x_2)\rangle\} \subseteq (\delta\nu_0)^2 \setminus \eta_{\nu_0}$, но выполняется хотя бы одно из условий: $\nu_0(g^\#(x_2)) = \nu_0(x_0)$ или $\nu_0(g^\#(x_2)) = \nu_0(x_1)$. Последнее вытекает из того, что $\mathrm{sp}(g^\#(x_2)) \cap [s_0]_{R_A} = \{s_0\}$. Таким образом, пришли к противоречию. $\square$

Список литературы

[1] R.M. Friedberg, *Three theorems on recursive enumeration.* I*: Decomposition.* II*: Maximal set.* III*: Enumeration without duplication*, J. Symbolic Logic, **23** (3), 309–316 (1958), DOI: https://doi.org/10.2307/2964290.

[2] В.Г. Пузаренко, *О разрешимых вычислимых $\mathbb{A}$-нумерациях*, Алгебра и логика **41** (5), 568–584 (2002).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/al197

[3] В.Г. Пузаренко, *К вычислимости на специальных моделях*, Сиб. матем. журн. **46** (1), 185–208 (2005).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/smj951

[4] И.Ш. Калимуллин, В.Г. Пузаренко, М.Х. Файзрахманов, *Позитивные нумерации в допустимых множествах*, Сиб. матем. журн. **61** (3), 607–621 (2020).
DOI: https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.309.

[5] Ю.Л. Ершов, *Определимость и вычислимость*, Научн. кн., Новосибирск, 1996.

[6] Ю.Л. Ершов, *Теория нумераций*, Наука, М., 1977.

[7] J. Barwise, *Admissible sets and structures*, Springer, 1975.

[8] Р.И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Изд-во Казан. матем. о-ва, Казань, 2000.

[9] Ю.Л. Ершов, *Проблемы разрешимости и конструктивные модели*, Наука, М., 1980.

[10] С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, *Конструктивные модели*, Научн. кн., Новосибирск, 1999.

[11] В.Г. Пузаренко, *Обобщенные нумерации и определимость поля* $\mathbb{R}$ *в допустимых множествах*, Вестн. НГУ: сер. матем. мех., инф. **3** (2), 107–117 (2003).

[12] В.Г. Пузаренко, *О вычислимости над моделями разрешимых теорий*, Алгебра и логика **39** (2), 170–197 (2000).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/al272

[13] Yu.L. Ershov, V.G. Puzarenko, A.I. Stukachev, $\mathbb{HF}$-*Computability*, Computability in Context: Computation and Logic in the Real World (ed. S Barry Cooper and Andrea Sorbi), 169–242 (2011).
DOI: https://doi.org/10.1142/p577.

Калимуллин Искандер Шагитович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: ikalimul@gmail.com

Пузаренко Вадим Григорьевич
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: vagrig@math.nsc.ru
Новосибирский Государственный Университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: v.puzarenko@g.nsu.ru

Volume 1, Issue 3
pp. 33–45 (2023)

UDC 510.54, 510.57
MSC 03D45, 03D25

Numberings in the admissible sets over equivalence relations

I.Sh. Kalimullin, V.G. Puzarenko

Abstract. The paper contains a series of examples of admissible sets $\mathbb{A}$ in which the family of all $\mathbb{A}$-c.e. sets has neither negative, nor positive computable $\mathbb{A}$-numbeings.

Keywords: numberings, decidable numberings, positive numberings, negative numberings, computable numberings, admissible sets.

References

[1] R.M. Friedberg, *Three theorems on recursive enumeration.* I*: Decomposition.* II*: Maximal set.* III*: Enumeration without duplication*, J. Symbolic Logic **23** (3), 309–316 (1958). DOI: https://doi.org/10.2307/2964290.

[2] V.G. Puzarenko, *Decidable Computable $\mathbb{A}$-numberings*, Algebra and logic **41** (5), 314–322 (2002). DOI: https://doi.org/10.1023/A:102093180

[3] V.G. Puzarenko, *Computability in special models*, Sib. Math. J. **46** (1), 148–165 (2005). DOI: https://doi.org/10.1007/s11202-005-0016-z

[4] I.Sh. Kalimullin, V.G. Puzarenko, M.K. Faizrakhmanov, *Positive Numberings in Admissible Sets*, Sib. Math. J. **61** (3), 478–489 (2020). DOI: https://doi.org/10.1134/S003744662003009X.

[5] Yu.L. Ershov, *Definability and Computability*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[6] Yu.L. Ershov, *Theory of Numberings*, Nauka, M., 1977 (in Russian).

[7] J. Barwise, *Admissible Sets and Structures*, Springer, 1975.

[8] R. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

Acknowledgements. The work of I.Sh. Kalimullin is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 22-21-20024) and performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2023-944). The work of V.G. Puzarenko is supported by project FWNF-2022-0012 (Classification Aspects of Syntax and Semantic of Logical Systems).

Received: 25 May 2023. Accepted: 26 September 2023. Published: 18 October 2023.

[9] Yu.L. Ershov. *Decidability Problems and Constructive Models*, Nauka, M., 1980 [in Russian].

[10] Yu.L. Ershov, S.S. Goncharov, *Constructive Models*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[11] V.G. Puzarenko, *Generalized Enumerations and Definability of the field* $\mathbb{R}$ *in Admissible Sets*, Vestnik NGU: ser. mat., mech., inf. **3** (2), 107–117 (2003) [in Russian].

[12] V.G. Puzarenko, *On computability over models of decidable theories*, Algebra and logic, **39** (2), 98–113 (2000).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02681664

[13] Yu.L. Ershov, V.G. Puzarenko, A.I. Stukachev, $\mathbb{HF}$-*Computability*, Computability in Context: Computation and Logic in the Real World (ed. S Barry Cooper and Andrea Sorbi), 169–242 (2011).
DOI: https://doi.org/10.1142/p577.

Kalimullin Iskander Shagitovich
Kazan Federal University,
Volga Region Mathematical Center,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: ikalimul@gmail.com

Puzarenko Vadim Grigorevich
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: vagrig@math.nsc.ru
Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: v.puzarenko@g.nsu.ru

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, 46–58

Том 1, Выпуск 3 | УДК 512.815.4
Стр. 46–58 (2023) | MSC 42C15, 13A50

Инварианты на классах эквивалентности жестких фреймов

В.В. Севостьянова

Аннотация. Рассматривается унитарная эквивалентность с точностью до перестановки векторов на множестве фреймов конечномерного пространства. Изучаются функции, постоянные на перестановочно унитарных классах эквивалентности фреймов Парсеваля. В случае вещественного поля приводится набор инвариантов, который разделяет такие классы эквивалентности в общем положении. При доказательстве этого результата описывается алгоритм, позволяющий по значениям инвариантов восстановить фреймы Парсеваля с точностью до перестановочно унитарной эквивалентности.

В процессе получения основного результата найдены алгебраически независимые образующие поля инвариантов для действия симметрической группы на пространстве симметрических матриц.

Ключевые слова: жесткие фреймы, унитарная эквивалентность, перестановочно унитарная эквивалентность, орбиты, симметрическая группа, поле инвариантов.

Введение

Фреймы конечномерных пространств становятся предметом активных исследований алгебраистов и аналитиков, а также специалистов по цифровой обработке сигналов [1–3]. Можно привести два эквивалентных определения фрейма. Пусть n и d – натуральные числа, $n \geqslant d$, и пусть $\mathbb{F}$ обозначает поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Конечный фрейм* в d-мерном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}^d$ над полем $\mathbb{F}$ – это произвольный полный набор векторов: $\operatorname{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \mathbb{H}^d$. Таким образом обобщается определение базиса, так как не требуется линейная независимость векторов.

Дадим формальное определение фрейма. Набор векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ называется *фреймом* для вещественного или комплексного $\mathbb{H}^d$, если существуют константы $0 < a \leqslant b < \infty$ такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^d$,

$$a\|\mathbf{x}\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\langle \mathbf{x}, \varphi_j \rangle|^2 \leqslant b\|\mathbf{x}\|^2.$$

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

Поступила: 27.09.2022. Принята: 06.06.2023. Опубликована: 18.10.2023.

Здесь скалярные произведения сопряженно-линейны по *первому* аргументу и линейны по второму, т. е.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_j \overline{\mathbf{x}(j)} \mathbf{y}(j).$$

Приведенные выше определения фрейма эквивалентны [4].

Каждый набор векторов и, в частности, фрейм порождают несколько операторов. Оператором *синтеза* для конечного набора векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ из $\mathbb{H}^d$ называется $\mathbf{\Phi} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{H}^d$, $\mathbf{\Phi x} := \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbf{x}(j)\varphi_j$, где $\mathbf{x}(j)$ – j-я координата вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$. Матрица оператора синтеза $\mathbf{\Phi}$ представляет собой $d \times n$-матрицу, столбцами которой являются векторы $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ фрейма. Оператором *анализа* называется оператор, сопряженный к оператору синтеза: $\mathbf{\Phi}^* : \mathbb{H}^d \to \mathbb{F}^n$, для которого $(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{y})(j) = \langle \varphi_j, \mathbf{y} \rangle$, $j = 1, \ldots, n$.

Для отдельно взятого вектора $\{\varphi_j\}$, $j = 1, \ldots, n$, операторы синтеза и анализа определяются так:

$$\varphi_j : \mathbb{F} \to \mathbb{H}^d,\ \varphi_j\, x = x\, \varphi_j; \quad \varphi_j^* : \mathbb{H}^d \to \mathbb{F},\ \varphi_j^*\, \mathbf{y} = \langle \varphi_j, \mathbf{y} \rangle.$$

Композиция операторов анализа и синтеза определяет оператор Грама $\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ с соответствующей $n \times n$-матрицей, у которой $(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi})(i, j) = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$. Хорошо известно, что последовательности $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ из $\mathbb{H}^d$ и $\{\widehat{\varphi}_j\}_{j=1}^n$ из $\widehat{\mathbb{H}^d}$ имеют одинаковые матрицы Грама тогда и только тогда, когда существует унитарный оператор $\mathbf{U} : \mathbb{H}^d \to \widehat{\mathbb{H}^d}$ такой, что $\mathbf{U}\varphi_j = \widehat{\varphi}_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

Перестановка операторов задает *фреймовый оператор*

$$\mathbf{\Phi\Phi}^* : \mathbb{H}^d \to \mathbb{H}^d, \quad \mathbf{\Phi\Phi}^*\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \mathbf{y} \rangle \varphi_j.$$

Если фреймовые границы равны между собой ($a = b$), то фреймовый оператор $\mathbf{\Phi\Phi}^* = a\mathbf{I}$, и представление вектора $\mathbf{x}$ становится особенно простым:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \varphi_i \rangle \varphi_i,\ \mathbf{x} \in \mathbb{H}^d.$$

Такие фреймы называются *жесткими* или *a-жесткими.* 1-жесткие фреймы называются *фреймами Парсеваля* или *нормализованными* жесткими фреймами.

Вопросы классификации фреймов по классам эквивалентности неоднократно поднимались в литературе [2, 3, 5]. Например, в работе [6] изучена проективно унитарная эквивалентность фреймов. Настоящая работа посвящена инвариантам на классах, унитарно эквивалентных с точностью до перестановки фреймов Парсеваля. В класс перестановочно унитарно эквивалентных фреймов входят фреймы, у которых матрицы Грама одинаковы, и фреймы совпадают с точностью до перестановки векторов. В вещественном случае приводится набор инвариантов, который разделяет такие классы эквивалентности в общем положении. В качестве промежуточного результата при решении этой задачи найдены алгебраически независимые образующие поля инвариантов действия симметрической группы на пространстве симметрических матриц.

1. Класс унитарно эквивалентных фреймов

Пусть $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ – фрейм Парсеваля в своей линейной оболочке. Его фреймовый оператор $\mathbf{\Phi\Phi}^* = \mathbf{I}$. Рассмотрим матрицу Грама этого фрейма.

Теорема 1. *Квадратная матрица* $\mathbf{G}$ *порядка* n *является матрицей Грама для фрейма Парсеваля* $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ *пространства span* $\left(\{\varphi_j\}_{j=1}^n\right)$ *с размерностью, равной рангу* $\mathbf{G}$, *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{G}$ *является матрицей ортогонального проектирования, т. е.* $\mathbf{G} = \mathbf{G}^* = \mathbf{G}^2$. *При этом*

$$d = \operatorname{rank}(\mathbf{G}) = \operatorname{Tr}(\mathbf{G}) = \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|^2.$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Представляя матрицу Грама в виде композиции операторов анализа и синтеза, имеем

$$\mathbf{G}^2 = (\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi})(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}) = \mathbf{\Phi}^*(\mathbf{\Phi\Phi}^*)\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^*\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Phi} = \mathbf{G}.$$

Самосопряженность $\mathbf{G}$ очевидна.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathbf{G}$ – квадратная матрица порядка n, и $\mathbf{G} = \mathbf{G}^* = \mathbf{G}^2$. Рассморим столбцы матрицы $\mathbf{G}$, обозначим их $\varphi_i = \mathbf{G}\mathbf{e}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, где $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ – стандартный ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{H}^n$. Если $\mathbf{f} \in \operatorname{span}\left(\{\varphi_j\}_{j=1}^n\right)$, то $\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f}$ и

$$\mathbf{f} = \mathbf{G}\left(\sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{G}\mathbf{f}, \mathbf{e}_i\rangle\, \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{f}, \mathbf{G}\mathbf{e}_i\rangle\, \mathbf{G}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{f}, \varphi_i\rangle\, \varphi_i,$$

т. е. $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ является фреймом Парсеваля в $\operatorname{span}\left(\{\varphi_j\}_{j=1}^n\right)$. Матрицей Грама этого фрейма оказывается матрица $\mathbf{G}$. Размерность пространства $\operatorname{span}\left(\{\varphi_j\}_{j=1}^n\right)$ определяется рангом матрицы $\mathbf{G}$.

Для матрицы ортогонального проектирования ранг совпадает с ее следом, что обосновывает последнее равенство в формулировке теоремы. □

На множестве фреймов можно ввести различные классы эквивалентности.

Определение 2. Два фрейма $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ называются *унитарно эквивалентными*, если существует унитарное преобразование $\mathbf{U}$, переводящее векторы одного фрейма в векторы другого: $\psi_i = \mathbf{U}\varphi_i\ \forall i = 1, \ldots, n$.

Поскольку унитарное преобразование сохраняет скалярное произведение, матрицы Грама унитарно эквивалентных фреймов совпадают. Верно и обратное утверждение: если матрицы Грама двух систем векторов совпадают, то эти системы унитарно эквивалентны. Таким образом, в частности, фреймы Парсеваля унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их матрицы Грама совпадают.

Заметим также, что класс фреймов Парсеваля инвариантен относительно унитарных преобразований. Действительно, фреймовый оператор $\mathbf{S}_{\mathbf{U\Phi}}$ векторов $\{\mathbf{U}\varphi_i\}_{i=1}^n$ равен $\mathbf{S}_{\mathbf{U\Phi}} = \mathbf{U\Phi}(\mathbf{U\Phi})^* = \mathbf{UIU}^* = \mathbf{I}$.

Фрейм Парсеваля $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, рассматриваемый как $d \times n$-матрица Φ с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$, определяется уравнениями $\Phi\Phi^* = \mathbf{I}$. Поэтому множество фреймов Парсеваля с n векторами в $\mathbb{F}^d$ можно рассматривать как аффинное многообразие в $\mathbb{F}^{dn}$. Будем обозначать его через $\mathcal{X}_{d,n}$ (подробнее о многообразии $\mathcal{X}_{d,n}$ см. [1]). В этом случае можно говорить о левом действии унитарной группы Ли $\mathrm{U}(d)$ на $\mathcal{X}_{d,n}$:

$$\Phi \in \mathcal{X}_{d,n} \mapsto \mathbf{U}\Phi, \ \ \mathbf{U} \in \mathrm{U}(d).$$

Тогда класс унитарно эквивалентных фреймов – орбита такого действия. Поскольку матрицы Грама $\Phi^*\Phi$ для фреймов Парсеваля $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ являются матрицами ортогонального проектирования, рассмотрим множество $\mathrm{Gr}(d,n)$ таких ортогональных проекций. Тогда отображение

$$\omega : \mathcal{X}_{d,n} \to \mathrm{Gr}(d,n), \quad \Phi \mapsto \Phi^*\Phi \tag{1}$$

сюръективно и инварианто относительно $\mathrm{U}(d)$-действия. Скалярные произведения $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$, $i, j = 1, \ldots, n$, являются инвариантами левого $\mathrm{U}(d)$-действия на $\mathcal{X}_{d,n}$ и однозначно определяют матрицу Грама, а следовательно, и $\mathrm{U}(d)$-орбиту. Таким образом, любой прообраз при отображении ω – орбита действия группы $\mathrm{U}(d)$. Другими словами, эпиморфизм ω вместе с многообразием $\mathrm{Gr}(d,n)$ является геометрическим фактором (о факторах по действиям линейно-редуктивных групп см. [7]).

Теорема 3. *Поле инвариантов $\mathbb{F}(\mathcal{X}_{d,n})^{\mathrm{U}(d)}$ левого действия унитарной группы Ли на многообразии $\mathcal{X}_{d,n}$ порождается скалярными произведениями $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$, $i \leqslant j$.*

2. Инварианты действия симметрической группы на пространстве симметрических матриц

Класс унитарно эквивалентных фреймов определяется порядком, в котором расположены векторы фрейма. Например, фреймы Парсеваля с матрицами синтеза

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не являются унитарно эквивалентными, достаточно сравнить их матрицы Грама.

Обозначим через S_n симметрическую группу перестановок длины n.

Определение 4. Будем говорить, что два фрейма Парсеваля $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ *унитарно эквивалентны с точностью до перестановки*, или *перестановочно унитарно эквивалентны*, если существует перестановка $\sigma \in S_n$, для которой фреймы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_{\sigma(i)}\}_{i=1}^n$ унитарно эквивалентны.

Заметим вновь, что класс всех фреймов Парсеваля инвариантен и относительно перестановочно унитарной эквивалентности. Если перестановка σ меняет местами векторы φ_i и φ_j фрейма $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ с матрицей Грама $\mathbf{G}$, то в новой матрице Грама $\mathbf{G}'$ поменяются местами строки и столбцы с номерами i и j.

Рассмотрим действие симметрической группы S_n на множестве ортогональных проекций $\mathrm{Gr}(d,n)$:

$$\mathbf{G} \mapsto A_\sigma^t \mathbf{G} A_\sigma, \ \mathbf{G} \in \mathrm{Gr}(d,n), \ \sigma \in S_n, \tag{2}$$

где A_σ – матричное представление перестановки σ, при котором для $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ матрица A_σ содержит единицы на пересечении строк i и столбцов j_i, $i = 1, \dots, n$, и нули в остальных клетках. Прообразы орбит S_n-действия при отображении ω – перестановочно унитарные классы эквивалентности, т. е. для фрейма Φ с матрицей Грама $\Phi^*\Phi$ и соответствующей орбитой $\Omega_\Phi = S_n \cdot (\Phi^*\Phi)$ перестановочно унитарный класс эквивалентности фрейма Φ состоит из следующих фреймов Парсеваля:

$$\omega^{-1}(\Omega_\Phi) = \coprod_{\mathbf{G} \in \Omega_\Phi} \omega^{-1}(\mathbf{G}).$$

Продолжим действие (2) до представления в кольце регулярных функций $\mathbb{F}\big[\mathrm{Gr}(d,n)\big]$ и в поле рациональных функций $\mathbb{F}\big(\mathrm{Gr}(d,n)\big)$:

$$f(\mathbf{G}) \mapsto f(A_\sigma \mathbf{G} A_\sigma^t), \ \sigma \in S_n.$$

Нашей целью будет изучить инварианты действия симметрической группы в случае, когда $\mathbb{R}$ – основное поле. Рассмотрим формальную симметрическую матрицу

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1,n} & x_{2,n} & \dots & x_{n,n} \end{pmatrix},$$

в клетках которой стоят вещественные переменные $x_{i,j}$. Описанное S_n-действие (2) естественно продолжить с $\mathrm{Gr}(d,n)$ на векторное пространство симметрических $n \times n$-матриц $\mathcal{M}$, в этом случае кольцо регулярных функций $\mathbb{R}[\mathcal{M}]$ – кольцо многочленов $\mathbb{R}[x_{i,j}]_{i \leqslant j}$ от $n(n+1)/2$ переменных, а $\mathbb{R}(\mathcal{M})$ – поле рациональных функций от переменных $x_{i,j}$, $i \leqslant j$.

Выпишем некоторые S_n-инварианты на $\mathcal{M}$. Поскольку действие симметрической группы переставляет элементы матрицы $\mathbf{G} \in \mathcal{M}$, стоящие на диагонали, инвариантами, очевидно, будут симметрические полиномы от диагональных элементов матрицы $\mathbf{G}$. Поскольку каждый симметрический полином однозначно представим в виде полинома от элементарных симметрических функций, обозначим через

$$\begin{aligned}
&s_1 = x_{1,1} + x_{2,2} + \ldots + x_{n,n},\\
&s_2 = x_{1,1}x_{2,2} + \ldots + x_{n-1,n-1}x_{n,n},\\
&\ldots,\\
&s_n = x_{1,1}x_{2,2}\ldots x_{n,n}
\end{aligned}$$

первую серию S_n-инвариантов. Пусть $N = n(n-1)/2$ – число переменных $x_{i,j}$, для которых $i < j$. Так как рассматривается пространство симметрических матриц, считаем $x_{2,1} = x_{1,2}$. Рассмотрим многочлены, которые, очевидно, также инвариантны относительно произвольной перестановки индексов в правых частях:

$$\begin{aligned}
&t_1 = x_{1,2} + x_{1,3} + \ldots + x_{n-1,n},\\
&t_2 = (x_{1,1}x_{2,2})x_{1,2} + (x_{1,1}x_{3,3})x_{1,3} + \ldots + (x_{n-1,n-1}x_{n,n})x_{n-1,n},\\
&\ldots\\
&t_N = (x_{1,1}x_{2,2})^{N-1}x_{1,2} + (x_{1,1}x_{3,3})^{N-1}x_{1,3} + \ldots + (x_{n-1,n-1}x_{n,n})^{N-1}x_{n-1,n}.
\end{aligned}$$

Пусть $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{n+N}$ – отображение, которое каждой симметрической матрице $\mathbf{G} = (g_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}$ ставит в соответствие набор значений $(s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_N)$ на этой матрице.

Теорема 5. *В пространстве симметрических матриц $\mathcal{M}$ найдется непустая открытая по Зарисскому окрестность U, при ограничении на которую отображение π – эпиморфизм. Кроме того, прообраз любой точки из $\pi(U)$ – орбита действия симметрической группы S_n.*

Доказательство. Выберем набор $(s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_N) \in \mathbb{F}^{n+N}$. Опишем алгоритм, позволяющий восстановить по выбранному набору симметрическую матрицу $\mathbf{G} = (g_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}$ из прообраза при отображении π. Если известны значения симметрических функций $s_1, \ldots, s_n$, то диагональные элементы $g_{1,1}, \ldots, g_{n,n}$ в $\mathbf{G}$ определяются однозначно с точностью до порядка следования. Упорядочим найденные $g_{1,1}, \ldots, g_{n,n}$. Далее, рассмотрим неоднородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases}
t_1 = x_{1,2} + x_{1,3} + \ldots + x_{n-1,n},\\
t_2 = (g_{1,1}g_{2,2})x_{1,2} + (g_{1,1}g_{3,3})x_{1,3} + \ldots + (g_{n-1,n-1}g_{n,n})x_{n-1,n},\\
\ldots\\
t_N = (g_{1,1}g_{2,2})^{N-1}x_{1,2} + (g_{1,1}g_{3,3})^{N-1}x_{1,3} + \ldots + (g_{n-1,n-1}g_{n,n})^{N-1}x_{n-1,n}
\end{cases}$$

от N переменных $x_{i,j}$, $i < j$. Данная система имеет единственное решение, если определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ g_{1,1}g_{2,2} & g_{1,1}g_{3,3} & \dots & g_{n-1,n-1}g_{n,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_{1,1}g_{2,2})^{N-1} & (g_{1,1}g_{3,3})^{N-1} & \dots & (g_{n-1,n-1}g_{n,n})^{N-1} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, что выполняется при условии $g_{i,i}g_{j,j} \neq g_{k,k}g_{l,l}$ при любых i, j, k, l таких, что $(i, j) \neq (k, l)$. Указанное выше открытое множество U определим следующим образом:

$$U = \{\mathbf{G} \in \mathcal{M} : \ g_{i,i}g_{j,j} \neq g_{k,k}g_{l,l} \ \text{ при любых } (i, j) \neq (k, l)\}.$$

Тогда для любой точки $(s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_N) \in \pi(U)$ существует такая симметрическая матрица $\mathbf{G}$, что $\pi(\mathbf{G}) = (s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_N)$, причем матрица $\mathbf{G}$ из прообраза $\pi^{-1}(s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_N)$ восстанавливается однозначно с точностью до перестановки строк и столбцов. Последнее означает, что прообраз при отображении π любой точки из $\pi(U)$ – это в точности S_n-орбита в $\mathcal{M}$. □

Теорема 6. *Поле инвариантов* $\mathbb{R}(\mathcal{M})^{S_n}$ *– поле рациональных функций от полиномов* $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_N$*. В частности, полиномы* $s_1, \dots, s_n$*,* $t_1, \dots, t_N$ *алгебраически независимы.*

Доказательство. Теорема 5 утверждает, что инварианты $s_1, \dots, s_n$, $t_1, \dots, t_N$ разделяют орбиты любых двух неэквивалентных точек из плотного в $\mathcal{M}$ открытого подмножества, т. е. разделяют орбиты в общем положении. Тогда по лемме 2.1 из [8] инварианты $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_N$ порождают поле инвариантов $\mathbb{R}(\mathcal{M})^{S_n}$.

Для завершения доказательства осталось показать, что полиномы $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_N$ алгебраически независимы. В силу того, что прообразы точек ограничения π на всюду плотное открытое подмножество U совпадают с орбитами группы S_n, степень трансцендентности поля инвариантов представима в следующем виде:

$$\operatorname{degtr} \mathbb{R}(\mathcal{M})^{S_n} = \dim \mathcal{M} - m,$$

где $m = \max \dim\ (S_n \cdot \mathbf{G})$ – максимальная размерность орбиты. Поскольку группа S_n конечна, то любая орбита конечна и, следовательно, $m = 0$, тогда

$$\operatorname{degtr} \mathbb{R}(\mathcal{M})^{S_n} = n + N$$

и, значит, инварианты $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_N$ алгебраически независимы. □

Теорема 6 показывает, что поле инвариантов $\mathbb{R}(\mathcal{M})^{S_n}$ свободно и изоморфно полю вещественных рациональных функций от $n+N$ переменных. В терминах теории инвариантов доказанная теорема утверждает, что отображение $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{n+N}$ задает рациональный фактор пространства $\mathcal{M}$ по группе S_n [7].

3. Инварианты на перестановочно унитарных классах эквивалентности

Матрицы Грама фреймов Парсеваля $\mathrm{Gr}(d,n)$ образуют аффинное подмногообразие в векторном пространстве симметрических матриц $\mathcal{M}$. Действительно, из теоремы 1 следует, что многообразие $\mathrm{Gr}(d,n)$ для фреймов Парсеваля в пространстве размерности d определяется равенством $\mathbf{G} = \mathbf{G}^* = \mathbf{G}^2$ и условием, что ранг $n \times n$-матрицы $\mathbf{G}$ равен d. Значит, многообразие $\mathrm{Gr}(d,n)$ замкнуто в $\mathcal{M}$.

Многообразие фреймов Парсеваля $\mathcal{X}(d,n)$ инвариантно относительно правого действия унитарной группы Ли $\mathrm{U}(n)$:

$$\Phi \in \mathcal{X}(d,n) \mapsto \Phi\mathbf{U},\ \ \mathbf{U} \in \mathrm{U}(n).$$

Действительно, $(\Phi\mathbf{U})(\Phi\mathbf{U})^* = \Phi(\mathbf{U}\mathbf{U}^*)\Phi^* = \Phi\Phi^* = \mathbf{I}$.

Покажем, что группа $\mathrm{U}(n)$ действует на $\mathcal{X}(d,n)$ транзитивно. Для этого воспользуемся конструкцией дополнения по Наймарку к фрейму (см. [3]):

Теорема 7. *Для любого фрейма Парсеваля* $\mathbf{\Phi} = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ *в* d*-мерном пространстве* $\mathrm{span}\big(\mathbf{\Phi}\big)$ *существует* дополнение по Наймарку*, т. е. фрейм Парсеваля* $\mathbf{\Psi} = \{\psi_i\}_{i=1}^n$ *в* $(n-d)$*-мерном пространстве* $\mathrm{span}\big(\mathbf{\Psi}\big)$*, для которого выполняются свойства*

a) *если* $\mathbf{\Psi}$ *– оператор синтеза фрейма* $\{\psi_i\}_{i=1}^n$*, то* $\mathbf{\Psi}^*\mathbf{\Psi} = \mathbf{I}_{\mathbb{F}^n} - \mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}$*;*

b) $\mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}^* = \mathbf{0}$.

Пусть Φ_1 и Φ_2 – два фрейма Парсеваля, а Ψ_1 и Ψ_2 – соответствующие им дополнения по Неймарку. Из теоремы 7 следует

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Psi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Psi_1 \end{pmatrix}^* = \mathbf{I}_{\mathbb{F}^n} = \begin{pmatrix} \Phi_2 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_2 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}^*.$$

Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Psi_1 \end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} \Phi_2 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \Phi_1^*\Phi_2 + \Psi_1^*\Psi_2,$$

являющуюся унитарной, действительно:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}\mathbf{U}^* &= (\Phi_1^*\Phi_2 + \Psi_1^*\Psi_2)(\Phi_2^*\Phi_1 + \Psi_2^*\Psi_1) \\ &= \Phi_1^*(\Phi_2\Phi_2^*)\Phi_1 + \Phi_1^*(\Phi_2\Psi_2^*)\Psi_1 + \Psi_1^*(\Psi_2\Phi_2^*)\Phi_1 + \Psi_1^*(\Psi_2\Psi_2^*)\Psi_1 \\ &= \Phi_1^*\Phi_1 + \Psi_1^*\Psi_1 = \mathbf{I}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \Phi_2 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Psi_1 \end{pmatrix}\mathbf{U}$$

и, значит, $\Phi_2 = \Phi_1\mathbf{U}$.

Итак, группа $\mathrm{U}(n)$ действует на $\mathcal{X}(d,n)$ транзитивно, следовательно, многообразие $\mathcal{X}(d,n)$ неприводимо и гладко. Продолжим действие $\mathrm{U}(n)$ на матрицы Грама фреймов Парсеваля:

$$\mathbf{G} = \Phi^*\Phi \in \mathrm{Gr}(d,n) \mapsto (\Phi\mathbf{U})^*(\Phi\mathbf{U}) = \mathbf{U}^*(\Phi^*\Phi)\mathbf{U} = \mathbf{U}^*\mathbf{G}\mathbf{U},\ \mathbf{U} \in \mathrm{U}(n).$$

Отображение (1) является сюъективным, следовательно, из транзитивности действия $\mathrm{U}(n)$ на $\mathcal{X}(d,n)$ следует транзитивность действия $\mathrm{U}(n)$ на $\mathrm{Gr}(d,n)$. В результате получаем, что замкнутое многообразие $\mathrm{Gr}(d,n)$ гладкое и неприводимое.

Теорема 8. *Поле инвариантов $\mathbb{R}\big(\mathrm{Gr}(d,n)\big)^{S_n}$ порождается образами многочленов $s_1,\ldots,$ s_n, $t_1,\ldots,t_N$ при эпиморфизме $\mathbb{R}[\mathcal{M}] \to \mathbb{R}[\mathrm{Gr}(d,n)]$, индуцированном естественным вложением $\mathrm{Gr}(d,n) \hookrightarrow \mathcal{M}$.*

Доказательство. Рассмотрим ограничение отображения π на $\mathrm{Gr}(d,n)$:

$$\pi|_{\mathrm{Gr}(d,n)} = \pi' : \mathrm{Gr}(d,n) \to \mathbb{R}^{n+N}.$$

Пересечение $W = \mathrm{Gr}(d,n) \cap U$ для открытой окрестности U из доказательства теоремы 5, – матрицы Грама из $\mathrm{Gr}(d,n)$, для которых все возможные пары произведений диагональных элементов попарно различны. Покажем, что W – плотное в $\mathrm{Gr}(d,n)$. Предположим противное, пусть на неприводимом многообразии $\mathrm{Gr}(d,n)$ для некоторых чисел $i<j$, $k<l$ таких, что $(i,j) \neq (k,l)$, выполняется

$$x_{i,i}x_{j,j} = x_{k,k}x_{l,l}. \tag{3}$$

Тогда, поскольку многообразие $\mathrm{Gr}(d,n)$ симметрично относительно произвольной перестановки индексов, на $\mathrm{Gr}(d,n)$ выполняются равенства (3) для любых $i<j$, $k<l$ таких, что $(i,j) \neq (k,l)$. Например, $x_{1,1}x_{2,2} = x_{1,1}x_{3,3}$. Поскольку в матрицах Грама диагональные элементы систем ненулевых векторов отличны от нуля, $x_{2,2} = x_{3,3}$. Получаем, что все $x_{i,i}$ равны на многообразии $\mathrm{Gr}(d,n)$. Последнее определяет множество унитарно эквивалентных равномерных фреймов Парсеваля, т. е. фреймов Парсеваля, у которых все нормы векторов равны, а такое множество образует гораздо более узкий класс, чем $\mathrm{Gr}(d,n)$. Таким образом, никакое из равенств (3) не обращается в тождество на неприводимом многообразии $\mathrm{Gr}(d,n)$. Значит, W – непустое открытое подмножество в многообразии $\mathrm{Gr}(d,n)$. Тогда для любой точки из $\pi'(W)$ прообраз этой точки при отображении π' – в точности орбита действия симметрической группы. Получаем, что инварианты $s_1,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_N$, рассматриваемые как регулярные функции на множестве матриц $\mathrm{Gr}(d,n)$, разделяют S_n-орбиты в общем положении в $\mathrm{Gr}(d,n)$, и, значит, поле инвариантов S_n-действия на $\mathrm{Gr}(d,n)$ также порождается этими инвариантами. $\square$

Заметим, что на $\mathrm{Gr}(d,n)$ инварианты $s_1,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_N$ уже не будут алгебраически независимыми, для этого достаточно заметить, что для матрицы Грама $\mathbf{G} = (g_{i,j})_{i,j}$

фрейма Парсеваля, например, выполняется

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n} g_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} ||\varphi_i||^2 = d.$$

Вопрос о всех определяющих соотношениях в $\mathrm{Gr}(d,n)$ на инвариантах $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_N$ остается открытым.

Теорема 9. *Поле рациональных функций, постоянных на перестановочно унитарных классах эквивалентности фреймов Парсеваля, порождается регулярными функциями на* $\mathcal{X}(d,n)$ *вида*

$$s_i\big(||\varphi_1||, \ldots, ||\varphi_n||\big),\ i = 1, \ldots, n,$$
$$t_j\big(\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle, \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle, \ldots, \langle\varphi_n,\varphi_n\rangle\big),\ j = 1, \ldots, N.$$

В частности, данные полиномы в общем положении разделяют перестановочно унитарные классы эквивалентности фреймов Парсеваля.

Доказательство. Рассмотрим композицию отображений

$$\mathcal{X}(d,n) \xrightarrow{\omega} \mathrm{Gr}(d,n) \xrightarrow{\pi'} \mathbb{R}^{n+N}.$$

Прообраз открытого множества $W \subset \mathrm{Gr}(d,n)$ при отображении ω есть открытое множество в $\mathcal{X}(d,n)$. Тогда ограничение морфизма $\pi' \circ \omega$ на открытое подмножество $\omega^{-1}(W)$ – эпиморфизм, причем прообраз любой точки из $\pi'(W)$ при отображении $\pi' \circ \omega$ – перестановочно унитарный класс эквивалентности, и любой перестановочно унитарный класс эквивалентности из открытого подмножества $\omega^{-1}(W)$ однозначно определяется значениями инвариантов $(s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_N)$ на соответствующей матрице Грама.

Эпиморфизм ω индуцирует вложение $\omega^* : \mathbb{R}[\mathrm{Gr}(d,n)] \hookrightarrow \mathbb{R}[\mathcal{X}(d,n)]$:

$$f(x_{i,j})_{i \leqslant j} \mapsto f\big(\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle\big)_{i \leqslant j}.$$

Образы полиномов $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_N$ при вложении ω^* разделяют перестановочно унитарные классы эквивалентности в общем положении, следовательно, порождают поле рациональных функций, постоянных на этих классах эквивалентности. □

Список литературы

[1] S.F.D. Waldron, *An Introduction to Finite Tight Frames*, Birkhäuser, Boston, 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4815-2

[2] M. Fickus, J. Jasper, E.J. King, D.G. Mixon, *Equiangular tight frames that contain regular simplices*, Linear Algebra Appl. **555**, 98–138 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.06.004

[3] S.Ya. Novikov, *Equiangular Tight Frames with Simplices and with Full Spark in* R^d, Lobachevskii J. Math. **42** (1), 155–166 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221010200

[4] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, 2002.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-25613-9

[5] М.Н. Истомина, А.Б. Певный, *О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес-Бенц*, Матем. просв., сер. 3 **11**, 105–112 (2007).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/mp221

[6] A. Abdollahi, H. Najafi, *Frame Graphs*, Linear Multilinear Algebra, **66** (6) (2018), 1229–1243.
DOI: https://doi.org/10.1080/03081087.2017.1347135

[7] Х. Крафт, *Геометрические методы в теории инвариантов*, Мир, М., 1987.

[8] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, *Теория инвариантов*, Итоги науки и техн. Сер. Совр. проб. матем., фунд. иссл. **55**, ВИНИТИ, М., 137–309, 1989.
URL: https://www.mathnet.ru/rus/intf158

Виктория Владимировна Севостьянова
Самарский национальный исследовательский университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Ак. Павлова, д. 1, г. Самара, 443011, Россия,
e-mail: berlua@mail.ru

Volume 1, Issue 3 UDC 512.815.4
pp. 46–58 (2023) MSC 42C15, 13A50

Invariants of equivalence classes of tight frames

V.V. Sevostyanova

Abstract. We observe the unitary equivalence up to reordering on the set of tight frames in a finite-dimensional space. We show that Parseval frames in $\mathbb{R}^n$ in general position are unitarily equivalent up to permutation if and only if certain permutational unitary invariants are equal. This is proved by giving an algorithm to recover a Parseval frame up to permutational unitary equivalence from a some subset of these invariants.

The main result is proved by using the action of the symmetric group on the space of symmetric matrices. More precisely, we show algebraically independent generators of the field of invariants for this action.

Keywords: tight frames, unitary equivalence, unitarily equivalence up to reordering, orbits, symmetric group, field of invariants.

References

[1] S.F.D. Waldron, *An Introduction to Finite Tight Frames*, Birkhäuser, Boston, 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4815-2

[2] M. Fickus, J. Jasper, E.J. King, D.G. Mixon, *Equiangular tight frames that contain regular simplices*, Linear Algebra Appl. **555**, 98–138 (2018). DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.06.004

[3] S.Ya. Novikov, *Equiangular Tight Frames with Simplices and with Full Spark in R^d*, Lobachevskii J. Math. **42** (1), 155–166 (2021). DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221010200

[4] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, 2002. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-25613-9

[5] М.Н. Истомина, А.Б. Певный, *О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес-Бенц*, Матем. просв., сер. 3 **11**, 105–112 (2007). URL: https://www.mathnet.ru/rus/mp221

[6] A. Abdollahi, H. Najafi, *Frame Graphs*, Linear and Multilinear Algebra, **66** (6) (2018), 1229–1243. DOI: https://doi.org/10.1080/03081087.2017.1347135

Acknowledgements. The work is performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2023-944).

Received: 27 September 2022. Accepted: 06 June 2023. Published: 18 October 2023.

[7] H. Kraft, *Geometric methods in invariant theory*, Mir, M., 1987 [in Russian].

[8] E.B. Vinberg, V.L. Popov, *Invariant theory*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr. **55**, VINITI, M., 137–309, 1989 [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/intf158

Victoria Vladimirovna Sevostyanova
Samara National Research University,
Volga Region Mathematical Center,
1 Akad. Pavlova str., Samara, 443011, Russia,
e-mail: berlua@mail.ru

Том 1, Выпуск 3 УДК 517.53, 517.574
Стр. 59–76 (2023) MSC 30D15, 31A05

Субгармонические дополнения к теоремам Бёрлинга–Мальявена. I. О мультипликаторе

Б.Н. Хабибуллин, Е.Г. Кудашева

Аннотация. Теорема Бёрлинга–Мальявена о мультипликаторе и различные ее версии дают несколько вариантов условий на функцию f на вещественной оси $\mathbb{R}$, при которых эту функцию можно умножить на ограниченную на $\mathbb{R}$ целую функцию h сколь угодно малого экспоненциального типа >0 так, что произведение fh ограничено на $\mathbb{R}$. Мы рассматриваем новую версию для функций $f=\exp(u-M)$, где u и M – пара субгармонических функций конечного типа с конечными логарифмическими интегралами по $\mathbb{R}$.

Ключевые слова: целая функция экспоненциального типа, субгармоническая функция конечного типа, мультипликатор, класс Картрайт.

Введение и основной результат

Одноточечные множества $\{x\}$ часто записываем без фигурных скобок, т. е. просто как x. Так, $\mathbb{N}_0:=0\cup\mathbb{N}=\{0,1,\dots\}$ для множества $\mathbb{N}:=\{1,2,\dots\}$ *натуральных чисел.* Через $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ обозначаем соответственно *комплексную плоскость* и *действительную прямую,* часто рассматриваемую ниже как *вещественную ось* $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, с *расширением* двумя «бесконечными значениями» $-\infty:=\inf\mathbb{R}\notin\mathbb{R}$, $+\infty:=\sup\mathbb{R}\notin\mathbb{R}$, неравенствами $-\infty\leqslant x\leqslant+\infty$ для любого $x\in\overline{\mathbb{R}}$ и порядковой топологией с базой открытых множеств из открытых интервалов $(a,b):=\bigl\{x\in\overline{\mathbb{R}}\bigm| a<x<b\bigr\}$ при $a<b$, а также $[-\infty,b):=(-\infty,b)\cup-\infty$ и $(a,+\infty]:=(a,+\infty)\cup+\infty$. Символом 0, кроме нуля, могут обозначаться *нулевые* функции, меры и прочее, а через $-\infty$ или $+\infty$ – и функции, тождественно равные $-\infty$ или $+\infty$. Если $a\in\overline{\mathbb{R}}$ или $a\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ – *расширенная числовая* функция, то $a^+:=\sup\{a,0\}$ – *положительная часть* соответственно числа или функции a, а для подмножества $A\subset\overline{\mathbb{R}}$ полагаем $A^+:=\bigl\{a^+\bigm| a\in A\bigr\}$. Например, $\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$ – *положительная полуось* с *расширением* $\overline{\mathbb{R}}^+=\mathbb{R}^+\cup+\infty$.

Для голоморфной на $\mathbb{C}$, или *целой,* функции f

$$\operatorname{type}_f:=\limsup_{z\to\infty}\frac{\ln^+|f(z)|}{|z|}\in\overline{\mathbb{R}}^+ \tag{1}$$

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Поступила: 17.10.2022. Принята: 06.06.2023. Опубликована: 18.10.2023.

– величина ее верхнего типа при порядке 1, или далее просто *тип* целой функции f. Если при этом $\operatorname{type}_f \in \mathbb{R}^+$, то функция f называется *целой функцией экспоненциального типа* [1–4], хотя так же широко распространен и термин «целая функция конечной степени» [5, 6]. Интеграл от функции $v\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$

$$J[v] := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(x)}{1+x^2} \,\mathrm{d}\, x \tag{2}$$

часто называют *логарифмическим интегралом* [7–9] функции v.

Теорема Бёрлинга–Мальявена о мультипликаторе ([4, 6–12])**.** *Пусть функция* $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$ *или же совпадает с сужением на* $\mathbb{R}$ *функции* $\ln|F|$, *где* $F \neq 0$ *– целая функция экспоненциального типа. Если логарифмический интеграл* $J[u^+]$ *конечен, то для любого числа* $c > 0$ *существует такая ограниченная на* $\mathbb{R}$ *целая функция* h *экспоненциального типа* $\operatorname{type}_h \leqslant c$, *что имеет место неравенство*

$$u(x) + \ln\bigl|h(x)\bigr| \leqslant 0 \quad \textit{при всех } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

В случае $u = \ln|f|$ неравенство (3) чаще и более традиционно записывают как $|fh| \leqslant 1$ на $\mathbb{R}$, что, по-видимому, и обусловило название этого замечательного результата как теоремы о мультипликаторе, т. е. множителе h, «гасящем рост» f до ограниченности произведения fh на $\mathbb{R}$. Мы дополним эту теорему некоторой новой версией, в которой основную роль играют субгармонические функции.

Для расширенной числовой функции u на $\mathbb{C}$ величина

$$\operatorname{type}[u] := \limsup_{z\to\infty} \frac{u^+(z)}{|z|} \in \overline{\mathbb{R}} \tag{4}$$

(верхний) – *тип* (роста) функции u *при порядке* 1 (около $+\infty$) [1, 2, 5, 13], [14, 2.1], или просто *тип* функции u без упоминания порядка 1 далее. Функции u конечного типа, если $\operatorname{type}[u] \in \mathbb{R}^+$. Например, для (1) имеем $\operatorname{type}_f = \operatorname{type}\bigl[\ln|f|\bigr]$.

Далее $D_z(r) := \bigl\{w \in \mathbb{C} \bigm| |w-z| < r\bigr\}$ и $\overline{D}_z(r) := \bigl\{w \in \mathbb{C} \bigm| |w-z| \leqslant r\bigr\}$, а также $\partial\overline{D}_z(r) := \overline{D}_z(r) \setminus D_z(r)$ – соответственно *открытый* и *замкнутый круги,* а также *окружность радиуса* $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$ *с центром* $z \in \mathbb{C}$, $\mathbb{D} := D_0(1)$ и $\overline{\mathbb{D}} := \overline{D}_0(1)$, а также $\partial\overline{\mathbb{D}} := \partial\overline{D}_0(1)$ – соответственно *открытый* и *замкнутый единичные круги,* а также *единичная окружность* в $\mathbb{C}$. Через $\mathbb{C}^{\mathrm{up}} := \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| \operatorname{Im} z > 0\bigr\}$ и $\mathbb{C}^{\overline{\mathrm{up}}} := \mathbb{C}^{\mathrm{up}} \cup \mathbb{R}$ обозначаем *верхние* соответственно *открытую* и *замкнутую полуплоскости,* а через $-\mathbb{C}^{\mathrm{up}}$ и $-\mathbb{C}^{\overline{\mathrm{up}}}$ – соответственно *нижнюю открытую* и *замкнутую полуплоскости* в $\mathbb{C}$.

Сужение функции или меры m на $S \subset \mathbb{C}$ обозначаем через $m\lfloor_S$.

Следуя [15, определение 3], для $d \in \mathbb{R}^+$, полунепрерывной снизу функции $r\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{R}}^+ \setminus 0$

и *гамма-функции* Γ внешнюю меру

$$\mathfrak{m}_d^r \colon S \underset{S\subset\mathbb{C}}{\longmapsto} \inf\left\{\sum_k \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)} r_k^d \;\middle|\; S\subset\bigcup_k \overline{D}_{z_k}(r_k),\ z_k\in\mathbb{C},\ r_k\leqslant r(z_k)\right\} \tag{5}$$

называем *d-мерным обхватом Хаусдорфа переменного радиуса обхвата r*. При этом через *постоянные функции* $r>0$ определяется *d-мерная мера Хаусдорфа*

$$\mathfrak{m}_d \colon S \underset{S\subset\mathbb{C}}{\longmapsto} \lim_{0<r\to 0} \mathfrak{m}_d^r(S) \underset{r>0}{\geqslant} \mathfrak{m}_d^r(S) \geqslant \mathfrak{m}_d^\infty(S),$$

являющаяся регулярной мерой Бореля, и $\mathfrak{m}_d \geqslant \mathfrak{m}_d^r \geqslant \mathfrak{m}_d^t \geqslant \mathfrak{m}_d^\infty$ для любых пар функций $r\leqslant t$. В частности, $\mathfrak{m}_2$ – *плоская мера Лебега на* $\mathbb{C}$, а для любой липшицевой кривой L в $\mathbb{C}$ сужение $\mathfrak{m}_1\big\lfloor_L$ – мера длины дуги на липшицевой кривой L [16, 3.3.4A]. Таким образом, $\mathfrak{m}_1\big\lfloor_{\mathbb{R}}$ – обычная *линейная мера Лебега на* $\mathbb{R}$. Кроме того, 0-мерная мера Хаусдорфа $\mathfrak{m}_0$ множества – это число элементов в нем, а также $\mathfrak{m}_d=\mathfrak{m}_d^r=0$ при любом $d>2$.

Как и в [16, предисловие], расширенная числовая функция *интегрируема* по мере Бореля μ, или *μ-интегрируема,* если интеграл от нее по этой мере корректно определен значением из $\overline{\mathbb{R}}$, и *суммируема* по μ, или *μ-суммируема,* если этот интеграл конечен, т. е. принимает значения из $\mathbb{R}$.

Рассмотрим функцию $r\colon S\to\mathbb{R}^+$. Для произвольной $\mathfrak{m}_1$-интегрируемых функций v на окружностях $\partial D_z\bigl(r(z)\bigr)$ при $z\in S$ можно определить *интегральные средние с переменным радиусом r по окружностям*

$$v^{\circ r}\colon z \underset{z\in S}{\longmapsto} \frac{1}{2\pi r(z)}\int_{\partial\overline{D}_z(r(z))} v \,\mathrm{d}\,\mathfrak{m}_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\bigl(z+r(z)e^{i\theta}\bigr)\,\mathrm{d}\,\theta \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{6}$$

Если функция v определена на объединении кругов

$$S^{\cup r} := \bigcup_{z\in S} \overline{D}_z\bigl(r(z)\bigr) \subset \mathbb{C}, \tag{7}$$

то можем определить ее *точную верхнюю грань по кругам*

$$v^{\vee r}\colon z \underset{z\in S}{\longmapsto} \sup_{\overline{D}_z(r(z))} v \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{8}$$

а также *интегральные средние с переменным радиусом r по кругам*

$$v^{\bullet r}\colon z \underset{z\in S}{\longmapsto} \frac{1}{\pi\bigl(r(z)\bigr)^2}\int_{\overline{D}_z(r(z))} v \,\mathrm{d}\,\mathfrak{m}_2 \tag{9}$$

при $\mathfrak{m}_2$-интегрируемости v на кругах $\overline{D}_z\bigl(r(z)\bigr)$ для $z\in S$.

Для любой функции u, субгармонической на открытой окрестности объединения кругов $S^{\cup r}$ из (7), имеем неравенства [17, теорема 2.6.8]

$$u \leqslant u^{\bullet r} \leqslant u^{\circ r} \leqslant u^{\vee r} \quad \text{на } S. \tag{10}$$

Субгармоническую на $\mathbb{C}$ *функцию* u *конечного типа* $\operatorname{type}[u] < +\infty$ (при порядке 1) с *конечным логарифмическим интегралом* $J[u^+] \overset{(2)}{<} +\infty$ называем *субгармонической функцией класса Картрайт.* В [18, **3**, определение] и [19, 1.3.1] так назывался существенно *более узкий класс* $\mathcal{C}$ субгармонических функций u на $\mathbb{C}$ конечного типа при порядке 1, удовлетворяющих условиям *гармоничности на* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *зеркальной симметричности относительно* $\mathbb{R}$, т. е. $u(z) = u(\bar{z})$ для всех $z \in \mathbb{C}$, а также *с нулевым значением* $u(0) = 0$ *в нуле* и *конечным интегралом*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^+(x)}{x^2} \, \mathrm{d}\, x < +\infty.$$

Целая функция f экспоненциального типа называется *целой функцией класса Картрайт* [2, 5, 6], если $u := \ln|f|$ – субгармоническая функция класса Картрайт, т. е. $J\bigl[\ln^+|f|\bigr] \overset{(2)}{<} +\infty$.

Основным результатом первой части является

Теорема 1. *Если* $r\colon \mathbb{C} \to (0,1]$ *– полунепрерывная снизу функция, для которой*

$$\liminf_{z\to\infty} \frac{\ln r(z)}{\ln|z|} > -\infty, \tag{11}$$

а $u \neq -\infty$ *и* $M \neq -\infty$ *– пара субгармонических функций класса Картрайт, то для любых чисел* $a > \operatorname{type}[u]$, $c > \operatorname{type}[M]$, *и* $d \in (0,2]$ *существует ограниченная на* $\mathbb{R}$ *целая функция* $h \neq 0$ *экспоненциального типа* $\operatorname{type}_h \leqslant c$, *для которой*

$$\bigl(u(z) - M^{\bullet r}(z)\bigr) + \ln\bigl|h(z)\bigr| \leqslant a|\operatorname{Im} z| \quad \textit{при всех } z \in \mathbb{C}, \tag{12}$$

где согласно (10) *функцию* $M^{\bullet r}$ *можно заменить на* $M^{\circ r}$ *или* $M^{\vee r}$ *из* (6)–(8)*. При этом найдется такое исключительное множество* $E_r \subset \mathbb{C}$, *что*

$$u(z) + \ln\bigl|h(z)\bigr| \leqslant M(z) + a|\operatorname{Im} z| \quad \textit{при всех } z \in \mathbb{C} \setminus E_r, \tag{13}$$

и в то же время d*-мерные обхваты Хаусдорфа множества* E_r *переменного радиуса* r *имеют ограничения*

$$\mathfrak{m}_d^r(E_r \cap S) \leqslant \sup_{z\in S} r(z) \quad \textit{для любого } S \subset \mathbb{C}. \tag{14}$$

В частности, при $d := 1$ *найдется исключительное множество* $Y_r \subset \mathbb{R}$, *для которого* *выполнено неравенство*

$$\mathfrak{m}_1\bigl(Y_r \cap (\mathbb{R} \setminus [-y, y])\bigr) \leqslant 2 \sup_{|\operatorname{Im} z|>y} r(z) \qquad \text{для любого } y \in \mathbb{R}^+, \tag{15}$$

а на прямых $\bigl\{x + iy \bigm| x \in \mathbb{R}\bigr\}$, *параллельных* $\mathbb{R}$ *и не проходящих через* iY_r, *имеют место неравенства*

$$u(x+iy) + \ln\bigl|h(x+iy)\bigr| \underset{x\in\mathbb{R}}{\leqslant} M(x+iy) + a|y| \quad \text{при каждом } y \in \mathbb{R} \setminus Y_r. \tag{16}$$

Пример 2. При любом $P \in \mathbb{R}^+$ для непрерывной функции

$$r\colon z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} \frac{1}{(1 + P + |z|)^P} \in (0, 1] \tag{17}$$

имеем (11), поскольку в случае (17) (нижний) предел из (11) равен $-P > -\infty$.

1. Доказательство основного результата

Для функции $u\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ при $\mathfrak{m}_1$-интегрируемости на $\mathbb{R}$ функции

$$u_\pi\colon x \underset{x\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \frac{1}{\pi} \frac{u(x)}{1 + x^2} \tag{18}$$

при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ через *ядро Пуассона*

$$\mathrm{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\colon (z, x) \underset{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \frac{1}{\pi}\left|\operatorname{Im} \frac{1}{z - x}\right| \in \mathbb{R}^+ \tag{19}$$

на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ определен *интеграл Пуассона*

$$\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} u\colon z \underset{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}{\longmapsto} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}(z, x) u(x) \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\operatorname{Im} z| u(x)}{(\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Re} z - x)^2} \,\mathrm{d}\, x \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{20}$$

Допустим, что функция u_π, определенная в (18), $\mathfrak{m}_1$-*суммируема,* т. е. конечен интеграл $J\bigl[|u|\bigr] \in \mathbb{R}$. Тогда интеграл Пуассона (20) определяет гармоническую функцию на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, которая называется *гармоническим продолжением функции* u *на* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, т. е. *вне* $\mathbb{R}$, а если функция u при этом *непрерывна на* $\mathbb{R}$, то функция

$$z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} \begin{cases} \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} u\bigr)(z) & \text{при } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; \\ u(z) & \text{при } z \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{21}$$

непрерывна на $\mathbb{C}$. При $J\bigl[|u|\bigr] \in \mathbb{R}$ и более слабом условии лишь *полунепрерывности сверху* функции u на $\mathbb{R}$ функция (21) *полунепрерывна сверху на* $\mathbb{C}$, поскольку функцию u на $\mathbb{R}$

нетрудно представить как предел убывающей последовательности непрерывных функций u_n с $\mathfrak{m}_1$-суммируемыми на $\mathbb{R}$ функциями $(u_n)_\pi$, определенными в (18). При этом из вида (2) логарифмического интеграла, (19) ядра Пуассона и по определению (20) интеграла Пуассона имеем

$$J[u] = \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u\bigr)(i) = \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u\bigr)(-i). \tag{22}$$

Сдвиг функции v *на* $z_0 \in \mathbb{C}$ и ее *гомотетия с коэффициентом* $k \in \mathbb{R}$ – это соответственно функции $v(\cdot - z_0)\colon z \longmapsto v(z - z_0)$ и $v(k\cdot)\colon z \longmapsto v(kz)$.

Лемма 3. *Если* $u \neq -\infty$ *– субгармоническая функция класса Картрайт, то конечен логарифмический интеграл* $J\bigl[(-u)^+\bigr] \overset{(2)}{<} +\infty$ *от положительной части* $(-u)^+$ *противоположной функции* $-u$*,* $\mathfrak{m}_1$*-суммируема функция* u_π *из* (18) *и*

$$u(z) \underset{z\in\mathbb{C}}{\leqslant} u^{\mathrm{bal}}(z) \underset{z\in\mathbb{C}}{:=} \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u\bigr)(z) + \mathrm{type}[u]|\operatorname{Im} z|, \tag{23b}$$

$$J\bigl[u(\cdot - iy_0)\bigr] \underset{y_0\in\mathbb{R}}{\leqslant} \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u\bigr)\bigl(i + i|y_0|\bigr) + \mathrm{type}[u]|y_0|, \tag{23J}$$

$$J\bigl[u^+(\cdot - iy_0)\bigr] \underset{y_0\in\mathbb{R}}{\leqslant} \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u^+\bigr)\bigl(i + i|y_0|\bigr) + \mathrm{type}[u]|y_0|, \tag{23J$^+$}$$

где $u^{\mathrm{bal}} \neq -\infty$ *из* (23b) *– субгармоническая функция класса Картрайт, гармоническая на* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$*, с совпадающими сужениями* $u^{\mathrm{bal}}\big\lfloor_{\mathbb{R}} = u\big\lfloor_{\mathbb{R}}$ *на* $\mathbb{R}$*.*

В частности, сдвиг субгармонической функции класса Картрайт на любое $z_0 \in \mathbb{C}$ *– субгармоническая функции класса Картрайт, а гомотетия субгармонической функции класса Картрайт с любым коэффициентом* $k \in \mathbb{R}$ *также дает субгармоническую функцию класса Картрайт, или, более детально,*

$$J\bigl[u(k\cdot)\bigr] = \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u\bigr)\bigl(\pm ik\bigr), \quad J\bigl[u^+(k\cdot)\bigr] = \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u^+\bigr)\bigl(\pm ik\bigr). \tag{24}$$

Доказательство. Для субгармонической функции $u \not\equiv -\infty$ действие на нее *оператора Лапласа* $\triangle$ в смысле теории обобщенных функций определяет ее *распределение масс Рисса* $\dfrac{1}{2\pi}\triangle u =: \varDelta_u$. Для любой субгармонической функции u конечного типа согласно [20, предложение 4.1, (4.19)], [21, лемма 2] существует число $C \in \mathbb{R}^+$, с которым имеют место неравенства

$$\max\biggl\{\int_{\mathbb{C}^{\mathrm{up}}\cap((R\overline{\mathbb{D}})\setminus\overline{\mathbb{D}})} \Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{z}\Bigr| \,\mathrm{d}\,\varDelta_u(z), \int_{(-\mathbb{C}^{\mathrm{up}})\cap((R\overline{\mathbb{D}})\setminus\overline{\mathbb{D}})} \Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{z}\Bigr| \,\mathrm{d}\,\varDelta_u(z)\biggr\}$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_1^R \frac{u(x) + u(-x)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x + C \quad \text{при всех } R > 1,$$

где левая часть положительна. Отсюда по представлению $u := u^+ - (-u)^+$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_1^R \frac{(-u)^+(x)+(-u)^+(-x)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_1^R \frac{u^+(x)+u^+(-x)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x + C\\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_1^R \frac{u^+(x)+u^+(-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x + C \leqslant 2J[u^+]+C \quad \text{при всех } R>1,\end{aligned}$$

далее, устремляя в левой части R к $+\infty$, получаем $J\bigl[(-u)^+\bigr] < +\infty$ и

$$J\bigl[|u|\bigr] = J[u^+] + J\bigl[(-u)^+\bigr] < +\infty,$$

т. е. функция u_π из (18) $\mathfrak{m}_1$-суммируема.

В [14, 1.2.2, § 6] для субгармонической функции u конечного типа при $J[u^+] < +\infty$ конструируется *субгармоническое выметание* одновременно из верхней полуплоскости $\mathbb{C}^{\mathrm{up}}$ и нижней полуплоскости $-\mathbb{C}^{\mathrm{up}}$ как субгармоническая функция u^{bal} из (23b), гармоническая на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, а также с совпадающими сужениями $u^{\mathrm{bal}}\lfloor_{\mathbb{R}} = u\lfloor_{\mathbb{R}}$ на $\mathbb{R}$. Далее из (23b) при всех $z\in\mathbb{C}$ и $y_0\in\mathbb{R}$ получаем

$$u(z-iy_0) \overset{(23\mathrm{b})}{\leqslant} (u)^{\mathrm{bal}}(z-iy_0) = \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u\bigr)(z-iy_0) + \operatorname{type}[u]|\operatorname{Im} z - y_0|. \tag{25}$$

Слева в (25) стоит значение в точке z субгармонической функции $u(\cdot - iy_0)$, полученной как сдвиг в точку iy_0 субгармонической функции u. Применение (22) к сдвигу $u(\cdot - iy_0)$ дает соотношения

$$\begin{aligned} J\bigl[u(\cdot - iy_0)\bigr] &\overset{(22)}{=} \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u(\cdot - iy_0)\bigr)(\pm i)\\ &\overset{(25)}{\leqslant} \Bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\Bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\bigl(u(\cdot - iy_0)\bigr) + \operatorname{type}[u]|\operatorname{Im}\cdot - y_0|\Bigr)\Bigr)(\pm i)\\ &\overset{(22)}{=} \Bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\Bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\bigl(u(\cdot - iy_0)\bigr)\Bigr)\Bigr)(\pm i) + \operatorname{type}[u]|y_0|. \end{aligned} \tag{26}$$

Для первого слагаемого в правой части (26) ввиду гармоничности функции $\bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u\bigr)(\cdot - iy_0)$ в нижней полуплоскости $-\mathbb{C}^{\mathrm{up}}$ имеют место равенства

$$\Bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\Bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\bigl(u(\cdot - iy_0)\bigr)\Bigr)\Bigr)(-i) = \Bigl(\bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u\bigr)(\cdot - iy_0)\Bigr)(-i) = \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u\bigr)(-i-iy_0).$$

Последнее равенство, подставленное в правую часть (26), дает

$$J\bigl[u(\cdot - iy_0)\bigr] \overset{(26)}{\leqslant} \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u\bigr)(-i-iy_0) + \operatorname{type}[u]|y_0|,$$

откуда ввиду зеркальной симметрии значений интеграла Пуассона (20) относительно вещественной оси получаем требуемое (23J). Функция u^+ также *субгармоническая*, и очевидно, класса Картрайт с $\operatorname{type}[u^+] \overset{(4)}{=} \operatorname{type}[u]$. Поэтому (23J) влечет за собой (23J$^+$). В частности, сдвиг $u(\cdot - iy_0)$ при любом $y_0 \in \mathbb{R}$ – субгармоническая функция класса Картрайт. Сдвиг $u(\cdot - x_0)$ на $x_0 \in \mathbb{R}$ – тоже субгармоническая функция класса Картрайт, поскольку

$$J\bigl[u^+(\cdot - x)\bigr] \overset{(2)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^+(x-x_0)}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \leqslant J[u^+]\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1+(x-x_0)^2}{1+x^2} < +\infty.$$

Таким образом, сдвиг $u(\cdot - z_0)$ на $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ – субгармоническая функция класса Картрайт как результат последовательного применения двух сдвигов на iy_0 и x_0. Наконец, при гомотетии с коэффициентом $k \neq 0$, используя замену переменной, получаем

$$J\bigl[u(k\cdot)\bigr] \overset{(2)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(kx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|k|u(t)}{k^2+t^2}\,\mathrm{d}\,t \overset{(20)}{=} \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}u\bigr)(\pm ik),$$

а для гомотетии с коэффициентом 0 равенство (24) тривиально. □

Горизонтальную открытую полосу ширины $2b$*, симметричную относительно вещественной оси* $\mathbb{R}$*,* обозначаем через $\operatorname{str}_b := \Bigl\{z \in \mathbb{C} \Bigm| |\operatorname{Im} z| < b\Bigr\}$.

Лемма 4. *При любых* $b \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$ *и* $y \in \mathbb{R}$ *для любой субгармонической функции* $u \neq -\infty$ *класса Картрайт найдется целая функция* $F \neq 0$ *класса Картрайт типа* $\operatorname{type}_F = \operatorname{type}[u]$*, для которой* $\ln\bigl|F\bigr| \geqslant u$ *вне полосы* $iy + \operatorname{str}_b$*, т. е.*

$$u(z) \leqslant \ln\bigl|F(z)\bigr| \quad \text{при } |\operatorname{Im} z - y| \geqslant b. \tag{27}$$

Доказательство. По лемме 3 сдвиг функции не выводит ее из класса Картрайт, поэтому достаточно рассмотреть случай $y = 0$. Пусть $u^{\mathrm{bal}} \geqslant u$ – субгармоническая функция класса Картрайт из (23b). Достаточно построить целую функцию $F \neq 0$ класса Картрайт для u^{bal}, для которой выполнено (27) с u^{bal} вместо u. Вследствие этого можно изначально считать, что *исходная субгармоническая функция* u *класса Картрайт, гармоническая на* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Теперь воспользуемся очень частным случаем одного результата, вытекающего из KKK (Kjellberg–Kennedy–Katifi) аппроксимационного метода [22, 10.5].

Лемма 5 ([22, лемма 10.12], [23, лемма 2.1])**.** *Пусть* u *– субгармоническая функция конечного типа, гармоническая на* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*. Тогда существует такая целая функция* g *экспоненциального типа с нулями только на* $\mathbb{R}$*, что*

$$\ln\bigl|g(z)\bigr| = u(z) + O\Bigl(\ln^+ \frac{1}{|\operatorname{Im} z|}\Bigr) + O(\ln|z|) \quad \text{при } z \to \infty. \tag{28}$$

Для целой функции $g \neq 0$ экспоненциального типа из леммы 5 по соотношению (28) для любого $b \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$ существует $C \in \mathbb{R}^+$, для которого

$$\Bigl|u(z) - \ln\bigl|g(z)\bigr|\Bigr| \overset{(28)}{\leqslant} C\ln\bigl(2 + |z|\bigr) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{str}_b, \tag{29}$$

а также $\mathrm{type}_g = \mathrm{type}[u]$. В частности, из неравенств

$$\ln|g(x - ib)| \overset{(29)}{\leqslant} u(x - ib) + C\ln\bigl(1 + \sqrt{x^2 + b^2}\bigr) \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}$$

согласно лемме 3 следует, что g – целая функция класса Картрайт. При этом из (29) для достаточно большого $N \in \mathbb{N}$ получаем $u(z) \overset{(28)}{\leqslant} \ln\bigl|Nz^N g(z)\bigr|$ при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{str}_b$, отсюда целая функция $F\colon z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} Nz^N g(z)$ и есть требуемая. □

Лемма 6 (очень частный случай [24, основная теорема], [25, теорема 9])**.** *Пусть $M \neq -\infty$ – субгармоническая функция конечного типа на $\mathbb{C}$, полунепрерывная снизу функция $r\colon \mathbb{C} \to (0, 1]$ удовлетворяет условию* (11)*, а также $d \in (0, 2]$. Тогда существуют целая функция $f \neq 0$ экспоненциального типа $\mathrm{type}_f \leqslant \mathrm{type}[M]$ и исключительное множество $E_r \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющее* (14)*, для которых*

$$\ln|f| \overset{(9)}{\leqslant} M^{\bullet r} \quad \text{на } \mathbb{C}, \qquad \ln|f| \leqslant M \quad \text{на } \mathbb{C} \setminus E_r. \tag{30}$$

Лемма 7. *Если в лемме* 6 *функция M класса Картрайт и $d := 1$, то целая функция $f \neq 0$ из* (30) *класса Картрайт типа $\mathrm{type}_f \leqslant \mathrm{type}[M]$, и найдется такое исключительное множество $Y_r \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющее* (15)*, что*

$$\ln\bigl|f(x + iy)\bigr| \underset{x\in\mathbb{R}}{\leqslant} M(x + iy) \quad \text{при каждом } y \in \mathbb{R} \setminus Y_r. \tag{31}$$

Доказательство. При $d := 1$ по определению (5) одномерного обхвата Хаусдорфа с радиусом обхвата r ортогональная проекция $iY_r \subset i\mathbb{R}$ на мнимую ось $i\mathbb{R}$ множества E_r, удовлетворяющего (14), как нетрудно видеть, удовлетворяет соотношениям (15), и при каждом $y \in \mathbb{R} \setminus Y_r$ прямые $\bigl\{x + iy \bigm| x \in \mathbb{R}\bigr\}$ не пересекают множество E_r. Тогда по второму неравенству в (30) получаем (31), отсюда по лемме 3 целая функция f является целой функцией класса Картрайт. □

Доказательство теоремы 1*.* По лемме 4 найдется целая функция $F \neq 0$ класса Картрайт и типа $\mathrm{type}_F \leqslant \mathrm{type}[u]$, для которой выполнено (27) при некотором выборе $0 < b < y \in \mathbb{R}^+$. Рассмотрим строго положительное число

$$q := \frac{1}{2}\min\bigl\{a - \mathrm{type}[u], c - \mathrm{type}[M]\bigr\} > 0. \tag{32}$$

По теореме Бёрлинга – Мальявена существует *ограниченная на $\mathbb{R}$ целая функция $h_F \neq 0$*

экспоненциального типа

$$\operatorname{type}_{h_F} \leqslant q \overset{(32)}{\leqslant} \frac{1}{2}\bigl(a - \operatorname{type}[u]\bigr), \tag{33}$$

для которой целая функция Fh_F экспоненциального типа

$$\operatorname{type}_{Fh_F} \overset{(33)}{\leqslant} \operatorname{type}[u] + \frac{1}{2}\bigl(a - \operatorname{type}[u]\bigr)$$

удовлетворяет неравенствам

$$\ln|F(x)| + \ln\bigl|h_F(x)\bigr| \overset{(3)}{\leqslant} 0 \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}. \tag{34}$$

Отсюда для субгармонической функции $\ln|Fh_F|$ согласно лемме 3 получаем

$$\begin{aligned}\bigl(\ln|Fh_F|\bigr)(z) &\underset{z\in\mathbb{C}}{\overset{(23b)}{\leqslant}} \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \ln|Fh_F|\bigr)(z) + \operatorname{type}\bigl[\ln|Fh_F|\bigr]|\operatorname{Im} z| \\ &\overset{(34),(33)}{\leqslant} \Bigl(\operatorname{type}[u] + \frac{1}{2}\bigl(a - \operatorname{type}[u]\bigr)\Bigr)|\operatorname{Im} z|,\end{aligned}$$

что согласно (27) при $|\operatorname{Im} z - y| \geqslant b$ дает неравенство

$$u(z) + \ln\bigl|h_F(z)\bigr| \leqslant \Bigl(\operatorname{type}[u] + \frac{1}{2}\bigl(a - \operatorname{type}[u]\bigr)\Bigr)|\operatorname{Im} z|. \tag{35}$$

В правой части (35) функция гармоническая на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ и, исходя из выбора чисел $0 < b < y$, неравенство (35), справедливое всюду вне полосы $iy+\operatorname{str}_b \subset \mathbb{C}^{\mathrm{up}}$, можно, используя субгармонический вариант теоремы Фрагмена–Линделёфа для полос, продолжить на все точки $z \in \mathbb{C}$.

По лемме 7 в сочетании с леммой 6 существуют целая функция $f \neq 0$ класса Картрайт типа $\operatorname{type}_f \leqslant \operatorname{type}[M]$ и исключительное множество $E_r \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющее (14), для которых выполнено (30), а при выборе $d := 1$ для некоторого исключительного множества $Y_r \subset \mathbb{R}$ имеем еще и (15) вместе с (31). В силу теоремы Бёрлинга–Мальявена существует ограниченная на $\mathbb{R}$ целая функция $h_f \neq 0$ экспоненциального типа

$$\operatorname{type}_{h_f} \leqslant q \overset{(32)}{=} \frac{1}{2}\min\bigl\{c - \operatorname{type}[M], a - \operatorname{type}[u]\bigr\}, \tag{36}$$

для которой целая функция fh_f экспоненциального типа

$$\operatorname{type}_{fh_f} \overset{(1)}{\leqslant} \operatorname{type}_f + \operatorname{type}_{h_f} \overset{(36)}{\leqslant} \operatorname{type}[M] + q \tag{37}$$

удовлетворяет неравенствам

$$\ln|f(x)| + \ln\bigl|h_f(x)\bigr| \overset{(3)}{\leqslant} 0 \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

При этом домножая, при необходимости, функцию h_f на достаточно малое строго положительное число и сохраняя за произведением прежнее обозначение h_f, можем добиться с сохранением (38) того, что $|h_f|\leqslant 1$ на $\mathbb{R}$. Отсюда по лемме 3, примененной к субгармонической функции $\ln|h_f|$, получаем

$$\ln\bigl|h_f(z)\bigr| \overset{(23b)}{\leqslant} \bigl(\mathcal{P}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\ln|h_f|\bigr)(z)+\operatorname{type}\bigl[\ln|h_f|\bigr]|\operatorname{Im}z| \overset{(36)}{\leqslant} q|\operatorname{Im}z|. \tag{39}$$

Далее, складывая неравенство (35) с первым неравенством в (30) и крайними частями неравенств (39), получаем при всех $z\in\mathbb{C}$ неравенства

$$\begin{aligned}
&u(z)+\ln\bigl|h_F(z)\bigr|+\ln\bigl|f(z)\bigr|+\ln\bigl|h_f(z)\bigr|\\
&\quad\overset{(35),(30),(39)}{\leqslant}\Bigl(\operatorname{type}[u]+\frac12\bigl(a-\operatorname{type}[u]\bigr)\Bigr)|\operatorname{Im}z|+M^{\bullet r}(z)+q|\operatorname{Im}z|\\
&\quad\leqslant M^{\bullet r}(z)+\Bigl(\operatorname{type}[u]+\frac12\bigl(a-\operatorname{type}[u]\bigr)+q\Bigr)|\operatorname{Im}z| \overset{(36)}{\leqslant} M^{\bullet r}(z)+a|\operatorname{Im}z|,
\end{aligned}$$

что для целой функции

$$h:=h_Ffh_f \tag{40}$$

можно записать как неравенство (12) при всех $z\in\mathbb{C}$. При этом функция h ограничена на $\mathbb{R}$ как произведение (40) ограниченной на $\mathbb{R}$ согласно (38) функции fh_f на ограниченную на $\mathbb{R}$ функцию h_F, что отмечено выше перед (33). Наконец, оценка типа целой функции h следует из неравенств

$$\begin{aligned}
\operatorname{type}_h &\overset{(40)}{=} \operatorname{type}_{h_Ffh_f} \overset{(1)}{\leqslant} \operatorname{type}_{h_F}+\operatorname{type}_{fh_f} \overset{(33),(37)}{\leqslant} q+\bigl(\operatorname{type}[M]+q\bigr)\\
&=\operatorname{type}[M]+2q \overset{(32),(36)}{\leqslant} \operatorname{type}[M]+2\cdot\frac12\bigl(c-\operatorname{type}[M]\bigr)=c.
\end{aligned}$$

Таким образом, функция h для (12) с требуемыми свойствами построена. При этом по лемме 6 из второго неравенства для той же функции h имеем (13) и (14). Окончательно, в случае $d:=1$ лемма 7 с неравенствами (31) обеспечивает для h выполнение (15)–(16), и теорема 1 доказана. □

Замечание 8. Во второй части работы намечается более детально исследовать субгармонические функции класса Картрайт, на основе чего будут рассмотрены субгармонические аналоги теоремы Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты [4, 6, 8, 9, 19, 26–31].

Список литературы

[1] R.P. Boas, Jr., *Entire Functions*, Academic Press, N.Y., 1954.

[2] B.Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, Transl. Math. Monographs **150**, AMS, Providence R.I., 1996.

[3] L.A. Rubel (with J.E. Colliander), *Entire and Meromorphic Functions*, Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1996.

[4] Б.Н. Хабибуллин, *Полнота систем экспонент и множества единственности*, издание четвёртое дополненное, Редакционно-издательский центр БашГУ, Уфа, 2012. URL: https://www.researchgate.net/publication/271841461

[5] Б.Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956.

[6] V. Havin, B. Jöricke, *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[7] P. Koosis, *The logarithmic integral.* I, Cambridge Stud. Adv. Math. **12**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[8] P. Koosis, *The logarithmic integral.* II, Cambridge Stud. Adv. Math. **21**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[9] P. Koosis, *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, Les Publications CRM, Univ. Montréal, Montréal, QC, 1996.

[10] Дж. Машреги, Ф.Л. Назаров, В.П. Хавин, *Теорема Бёрлинга–Мальявена о мультипликаторе: седьмое доказательство*, Алгебра и анализ **17** (5), 3–68 (2005). URL: https://www.mathnet.ru/rus/aa703

[11] A. Beurling, P. Malliavin, *On Fourier transforms of measures with compact support*, Acta Math. **107** (3-4), 291–309 (1962). DOI: https://doi.org/10.1007/BF02545792

[12] P. Malliavin, *On the multiplier theorem for Fourier transforms of measures with compact support*, Ark. Mat. **17** (1-2), 69–81 (1979). DOI: https://doi.org/10.1007/BF02385458

[13] Ch.O. Kiselman, *Order and type as measures of growth for convex or entire functions*, Proc. London Math. Soc. **66** (3), 152–186 (1993). DOI: https://doi.org/10.1112/plms/s3-66.1.152

[14] Б.Н. Хабибуллин, А.В. Шмелёва, *Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей.* I. *Классический случай*, Алгебра и анализ **31** (1), 156–210 (2019). URL: https://www.mathnet.ru/rus/aa1633

[15] Б.Н. Хабибуллин, *Интегралы от разности субгармонических функций по мерам и характеристика Неванлинны*, Матем. сб. **213** (5), 126–166 (2022). DOI: https://doi.org/10.4213/sm9642

[16] Л.К. Эванс, К.Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функции*, Научн. кн. (ИДМИ), Новосибирск, 2002.

[17] Th. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511623776

[18] V. Matsaev, M. Sodin, *Distribution of Hilbert transforms of measures*, Geom. Funct. Anal. **10** (1), 160–184 (2000).
DOI: https://doi.org/10.1007/s000390050005

[19] Т.Ю. Байгускаров, Г.Р. Талипова, Б.Н. Хабибуллин, *Подпоследовательности нулей для классов целых функций экспоненциального типа, выделяемых ограничениями на их рост*, Алгебра и анализ **28** (2), 1–33 (2016).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/aa1483

[20] Б.Н. Хабибуллин, А.В. Шмелёва, З.Ф. Абдуллина, *Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей.* II. *Выметания конечного рода и регулярность роста на одном луче,* Алгебра и анализ **32** (1), 208–243 (2020).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/aa1687

[21] А.Е. Салимова, Б.Н. Хабибуллин, *Рост субгармонических функций вдоль прямой и распределение их распределений масс Рисса*, Уфимск. матем. журн., **12** (2), 35–48 (2020).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/ufa515

[22] W.K. Hayman, *Subharmonic functions.* II, Academic Press, London, 1989.

[23] Б.Н. Хабибуллин, *О росте целых функций экспоненциального типа с нулями вблизи прямой*, Матем. заметки, **70** (4), 621–635 (2001).
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm774

[24] B.N. Khabibullin, *The restriction from below of the subharmonic function by the logarithm of the module of entire function*, arXiv:2203.12383 (2022) [in Russian].
URL: https://arxiv.org/abs/2203.12383

[25] Б.Н. Хабибуллин, *Распределения корней и масс целых и субгармонических функций с ограничениями на их рост вдоль полосы*, Изв. РАН. Сер. матем. (принята к печати).

[26] A. Beurling, P. Malliavin, *On the closure of characters and the zeros of entire functions*, Acta Math. **118**, 79–93 (1967).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02392477

[27] J.-P. Kahane, *Travaux de Beurling et Malliavin*, Séminaire Bourbaki (année 1961/62, exposés 223–240, Talk no. 225), (7), 27–39 (1962).
URL: http://www.numdam.org/item/SB_1961-1962__7__27_0/

[28] R.M. Redheffer, *Completeness of sets of complex exponentials*, Adv. in Math. **24** (1), 1–62 (1977).
DOI: https://doi.org/10.1016/S0001-8708(77)80002-9

[29] И.Ф. Красичков-Терновский, *Интерпретация теоремы Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты*, Матем. сб. **180** (3), 397–423 (1989).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/sm1618

[30] Б.Н. Хабибуллин, *Неконструктивные доказательства теоремы Бёрлинга–Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций*, Изв. РАН. Сер. матем. **58** (4), 125–148 (1994).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/im773

[31] Б.Н. Хабибуллин, Г.Р. Талипова, Ф.Б. Хабибуллин, *Подпоследовательности нулей для пространств Бернштейна и полнота систем экспонент в пространствах функций на интервале*, Алгебра и анализ **26** (2), 185–215 (2014).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/aa1381

Булат Нурмиевич Хабибуллин
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, д. 112, г. Уфа, 450008, Россия,
e-mail: khabib-bulat@mail.ru

Елена Геннадьевна Кудашева
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, д. 3А, г. Уфа, 450008, Россия,
e-mail: lena_kudasheva@mail.ru

Volume 1, Issue 3 UDC 517.53, 517.574
pp. 59–76 (2023) MSC 30D15, 31A05

Subharmonic additions to Beurling – Malliavin Theorems. I. On the multiplier

B.N. Khabibullin, E.G. Kudasheva

Abstract. The Beurling – Malliavin Theorem on the multiplier and its various versions give several variants of conditions for the function f on the real axis $\mathbb{R}$, under which this function can be multiplied by an entire bounded on $\mathbb{R}$ function h of arbitrarily small exponential type > 0 so that the product of fh is bounded on $\mathbb{R}$. We consider a new version for the function $f = \exp(u - M)$, where u and M are a pair of subharmonic functions of finite type with finite logarithmic integrals over $\mathbb{R}$.

Keywords: entire function of exponential type, subharmonic function of finite type, multiplier, Cartwright class.

References

[1] R.P. Boas, Jr., *Entire Functions*, Academic Press, N.Y., 1954.

[2] B.Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, Transl. Math. Monographs **150**, AMS, Providence R.I., 1996.

[3] L.A. Rubel (with J.E. Colliander), *Entire and Meromorphic Functions*, Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1996.

[4] B.N. Khabibullin, *Completeness of exponential systems and uniqueness sets*, 4th ed., Bashkir State Univ. Press, Ufa, 2012 [in Russian].
DOI: https://doi.org/10.13140/2.1.4572.7525

[5] B.Ja. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, AMS, 1964.

[6] V. Havin, B. Jöricke, *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[7] P. Koosis, *The logarithmic integral.* I, Cambridge Stud. Adv. Math. **12**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[8] P. Koosis, *The logarithmic integral.* II, Cambridge Stud. Adv. Math. **21**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state task of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (the code of the scientific topic FMRS-2022-0124).

Received: 17 October 2022. Accepted: 06 June 2023. Published: 18 October 2023.

[9] P. Koosis, *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, Les Publications CRM, Univ. Montréal, Montréal, QC, 1996.

[10] J. Mashreghi, F.L. Nazarov and V.P. Havin *Beurling–Malliavin multiplier theorem: The seventh proof*, St. Petersburg Math. J. **17** (5), 699–744 (2006).
DOI: https://doi.org/10.1090/S1061-0022-06-00926-5

[11] A. Beurling, P. Malliavin, *On Fourier transforms of measures with compact support*, Acta Math. **107** (3-4), 291–309 (1962).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02545792

[12] P. Malliavin, *On the multiplier theorem for Fourier transforms of measures with compact support*, Ark. Mat. **17** (1-2), 69–81 (1979).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02385458

[13] Ch.O. Kiselman, *Order and type as measures of growth for convex or entire functions*, Proc. London Math. Soc. **66** (3), 152–186 (1993).
DOI: https://doi.org/10.1112/plms/s3-66.1.152

[14] B.N. Khabibullin, A.V. Shmeleva *Balayage of measures and subharmonic functions to a system of rays.* I. *The classical case* St. Petersburg Math. J. **31** (1), 117–156 (2020).
DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1589

[15] B.N. Khabibullin, *Integrals of a difference of subharmonic functions against measures and the Nevanlinna characteristic*, Sb.: Math. **213** (5), 694–733 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1070/SM9642

[16] L.C. Evans, R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Revised Edition, CRC Press, 2015.

[17] Th. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511623776

[18] V. Matsaev, M. Sodin, *Distribution of Hilbert transforms of measures*, Geom. Funct. Anal. **10** (1), 160–184 (2000).
DOI: https://doi.org/10.1007/s000390050005

[19] T. Yu. Baǐguskarov, G.R. Talipova, B.N. Khabibullin, *Subsequences of zeros for classes of entire functions of exponential type distinguished by growth restrictions*, St. Petersburg Math. J. **28** (2), 127–151 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1442

[20] B.N. Khabibullin, A.V. Shmeleva and Z.F. Abdullina, *Balayage of measures and subharmonic functions to a system of rays.* II. *Balayages of finite genus and growth regularity on a single ray*, St. Petersburg Math. J. **32** (1), 155–181 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1642

[21] A.E. Salimova, B.N. Khabibullin, *Growth of subharmonic functions along line and*

distribution of their Riesz measures, Ufa Math. J. **12** (2), 35–49 (2020).
DOI: https://doi.org/10.13108/2020-12-2-35

[22] W.K. Hayman, *Subharmonic functions.* II, Academic Press, London, 1989.

[23] B.N. Khabibullin, *On the Growth of Entire Functions of Exponential Type near a Straight Line*, Math. Notes **70** (4), 560–573 (2001).
DOI: https://doi.org/10.1023/A:1012393106283

[24] B.N. Khabibullin, *The restriction from below of the subharmonic function by the logarithm of the module of entire function*, arXiv:2203.12383 (2022) [in Russian].
URL: https://arxiv.org/abs/2203.12383

[25] B.N. Khabibullin, *Distributions of zeros and masses of entire and subharmonic functions with restrictions on their growth along the strip*, Izv. RAN, Ser. Matem. (accepted paper) [in Russian].

[26] A. Beurling, P. Malliavin, *On the closure of characters and the zeros of entire functions*, Acta Math. **118**, 79–93 (1967).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02392477

[27] J.-P. Kahane, *Travaux de Beurling et Malliavin*, Séminaire Bourbaki (année 1961/62, exposés 223–240, Talk no. 225), (7), 27–39 (1962).
URL: http://www.numdam.org/item/SB_1961-1962__7__27_0/

[28] R.M. Redheffer, *Completeness of sets of complex exponentials*, Adv. in Math. **24** (1), 1–62 (1977).
DOI: https://doi.org/10.1016/S0001-8708(77)80002-9

[29] I.F. Krasichkov-Ternovskii, *An interpretation of the Beurling–Malliavin theorem on the radius of completeness*, Math. USSR-Sb. **66** (2), 405–429 (1990).
DOI: https://doi.org/10.1070/SM1990v066n02ABEH001178

[30] B.N. Khabibullin, *Nonconstructive proofs of the Beurling–Malliavin theorem on the radius of completeness, and nonuniqueness theorems for entire functions*, Russian Acad. Sci. Izv. Math. **45** (1), 125–149 (1995).
DOI: https://doi.org/10.1070/IM1995v045n01ABEH001622

[31] B.N. Khabibullin, G.R. Talipova, F.B. Khabibullin, *Zero subsequences for Bernsteins spaces and the completeness of exponential systems in spaces of functions on an interval*, St. Petersburg Math. J. **26** (2), 319–340 (2015).
DOI: https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2015-01340-X

Bulat Nurmievich Khabibullin
Institute of Mathematics with Computing Centre
Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science,
112 Chernyshevsky str., Ufa 450008, Russia,
e-mail: khabib-bulat@mail.ru

Elena Gennadievna Kudasheva
Akmulla Bashkir State Pedagogical University,
3A Oktyabr'skoy Revolyutsii str., Ufa, 450008, Russia,
e-mail: lena_kudasheva@mail.ru

Том 1, Выпуск 3
Стр. 77–91 (2023)

УДК 510.532, 510.535
MSC 03D25, 03D28

Специальная разложимость в 2-в. п. тьюринговых степенях

Р.Р. Багавиев

Аннотация. Рассматривается специальная разложимость 2-в. п. тьюринговых степеней. Под специальным понимается разложение, при котором одна из частей разложения является в. п. степенью. Исследуется вопрос о существовании такого разложения для произвольной 2-в. п. степени, в том числе с избеганием верхнего конуса заданной в. п. степени. Доказывается, что существует 2-в. п. степень, не имеющая специального разложения с избеганием конуса некоторой в. п. степени.

Ключевые слова: тьюринговая степень, 2-в. п. множество, разложимость, избегание верхнего конуса, лахлановское множество.

Введение

В теории тьюринговых степеней неразрешимости особый интерес представляют структуры, индуцированные *n-вычислимо перечислимыми* (n-в. п.) множествами, введенными Е. Голдом и Х. Путнамом [1, 2] в качестве обобщения понятия вычислимо перечислимых (в. п.) множеств. Напомним соответствующее определение.

Определение 1. Множество A называется n-в. п. ($n > 0$), если существует такая вычислимая последовательность множеств $\{A_s\}_{s\in\omega}$, что

$$A_0(x) = 0, \quad A(x) = \lim_s A_s(x), \quad |\{s \in \omega \mid A_{s+1}(x) \neq A_s(x)\}| \leq n.$$

Ю.Л. Ершов в своих ставших уже классическими работах [3–5] обобщил понятие n-в. п. множества на уровни конструктивных ординалов и показал, что возникающая иерархия покрывает в точности все Δ^0_2-множества.

Структура тьюринговых степеней n-в. п. множеств начала активно исследоваться в 70-е годы прошлого века. С.Б. Купер в своей диссертации [6] показал, что существует собственная 2-в. п. (или d-в. п.) степень, т. е. 2-в. п. степень, не содержащая в. п. множеств. Предложенная конструкция легко обобщается на случай произвольных n-в. п. степеней: для любого $n > 1$ существует собственная n-в. п. степень.

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

Поступила: 04.09.2023. Принята: 26.09.2023. Опубликована: 18.10.2023.

Дальнейшее изучение n-в. п. степеней позволило ответить на некоторые вопросы, связанные с теоретико-модельными свойствами этих структур. М.М. Арслановым в [7] получен первый пример утверждения теории степеней, которое истинно для 2-в. п., но ложно для в. п. степеней. Иначе говоря, было показано, что структуры в. п. и 2-в. п. степеней не являются элементарно эквивалентными. Другие элементарные различия также обнаружены в работах [8, 9].

Элементарные различия между структурами n-в. п. степеней при различных $n > 1$ удалось найти относительно недавно. В работе [10] было построено предложение, которое различает 2-в. п. и 3-в. п. степени.

Тем не менее ряд вопросов о структуре n-в. п. степеней до сих пор не решены. Остается открытой проблема элементарной эквивалентности структур n-в. п. степеней при $n \geq 3$. Не исследована также проблема определимости в Δ^0_2-степенях класса всех n-в. п. степеней для $n > 1$. В частности, до сих пор неизвестно, определимы ли в. п. степени в структуре 2-в. п. степеней, т. е. существует ли формула логики первого порядка теории 2-в. п. тьюринговых степеней, зависящая от одной переменной и истинная в точности на в. п. степенях. Более подробно об открытых проблемах теории степеней неразрешимости и их возможных путях решения можно найти в [11]. В связи с этим рассмотрение новых структурных свойств n-в. п. степеней является весьма актуальным.

В настоящей работе будут рассмотрены усиленная форма разложимости 2-в. п. степеней и связанные с ней структурные свойства. Напомним классическое определение разложимости, а также основные структурные свойства в. п. и 2-в. п. степеней, связанные с разложимостью.

Определение 2. Говорят, что степень $\mathbf{d}$ *разложима* на степени $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$, если $\mathbf{d} = \mathbf{x}_0 \cup \mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 < \mathbf{d}$. Если при этом $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ для некоторой степени $\mathbf{a} < \mathbf{d}$, то разложение называют разложением *с избеганием верхнего конуса* $\mathbf{a}$.

В структуре в. п. степеней согласно теореме Сакса о разложении [12] любая невычислимая в. п. степень разложима с избеганием верхнего конуса любой невычислимой степени. Для 2-в. п. степеней аналогичное утверждение неверно. Несмотря на то, что любая невычислимая 2-в. п. степень $\mathbf{d}$ разложима в классе 2-в. п. степеней [13] (более того, существует разложение над любой невычислимой в. п. степенью $\mathbf{a} < \mathbf{d}$, см. [14]), существуют 2-в. п. степень $\mathbf{a}$ и в. п. степень $\mathbf{b}$ такие, что $\mathbf{0} < \mathbf{b} < \mathbf{a}$, и для любых 2-в. п. степеней $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, если $\mathbf{a} = \mathbf{x} \cup \mathbf{y}$, то $\mathbf{b} \leq \mathbf{x}$ или $\mathbf{b} \leq \mathbf{y}$ [15]. В работе [16] содержится достаточное условие для существования разложения 2-в. п. степени с избеганием верхнего конуса. Далее будем рассматривать специальное разложение 2-в. п. степеней.

Определение 3. Разложение 2-в. п. степени $\mathbf{d} = \mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ назовем *специальным*, если $\mathbf{x}$ является 2-в. п., а $\mathbf{y}$ – в. п. степенями.

В первой части работы будет показано, что существует 2-в. п. степень, не имеющая специального разложения. Вторая часть содержит обоснование того, что специальное разложение (если оно существует) можно построить так, чтобы в. п. часть избегала верхнего конуса произвольной невычислимой в. п. степени, а также доказательство теоремы о том, что для некоторой 2-в. п. степени, имеющей специальное разложение, 2-в. п. часть любого ее разложения не избегает верхнего конуса некоторой невычислимой в. п. степени. В третьей части излагается связь специальной разложимости со степенями лахлановских множеств.

1. Степень, не имеющая специального разложения

Естественный вопрос, который возникает в связи с определением специальной разложимости: любая ли 2-в. п. степень обладает специальным разложением? Для ответа на этот вопрос потребуются дополнительные сведения.

Определение 4 (М.М. Арсланов, И.Ш. Калимуллин, С. Лемпп [10])**.** Степени множеств $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{d}$ образуют *восьмерку* (англ. *double bubble*), если $\mathbf{a}, \mathbf{d}$ – 2-в. п. степени и для любой 2-в. п. степени $\mathbf{e} \leq \mathbf{d}$ выполнено либо $\mathbf{e} \leq \mathbf{a}$, либо $\mathbf{a} \leq \mathbf{e}$. Степень $\mathbf{a}$ при этом называется *серединой* восьмерки, степень $\mathbf{d}$ – *вершиной* восьмерки.

В работе [10] было показано существование восьмерки, а также то, что середина восьмерки всегда является в. п. степенью.

Определение 5 (С.Б. Купер, Х. Йи [17])**.** 2-в. п. степень $\mathbf{d}$ называется *изолированной* (в. п. степенью $\mathbf{a} < \mathbf{d}$), если $\mathbf{a}$ есть наибольшая в. п. степень под $\mathbf{d}$.

Примером изолированной степени является вершина восьмерки. Действительно, пусть дана восьмерка $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{d}$, и степень $\mathbf{x}$ расположена между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{d}$. Предположим, что $\mathbf{x}$ в. п. Тогда по теореме Сакса о разложении $\mathbf{x}$ можно разложить на в. п. степени $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ с избеганием верхнего конуса $\mathbf{a}$. Так как $\mathbf{a}$ – середина восьмерки, то $\mathbf{b}, \mathbf{c} \leq \mathbf{a}$, значит, $\mathbf{x} = \mathbf{b} \cup \mathbf{c} \leq \mathbf{a}$. Противоречие. Таким образом, вершина восьмерки изолирована серединой восьмерки. Отсюда получаем отрицательный ответ на поставленный выше вопрос.

Предложение 6. *Вершина восьмерки не имеет специального разложения.*

Доказательство. Пусть степени $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{d}$ образуют восьмерку, а специальное разложение вершины восьмерки имеет вид $\mathbf{d} = \mathbf{x} \cup \mathbf{y}$, где $\mathbf{y}$ является в. п. частью. По определению восьмерки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ сравнимы с $\mathbf{a}$. Степень $\mathbf{d}$ изолирована степенью $\mathbf{a}$, значит, $\mathbf{y} \leq \mathbf{a}$. Тогда $\mathbf{d} = \mathbf{x} \cup \mathbf{a}$, что совпадает с одной из степеней $\mathbf{x}$ или $\mathbf{a}$. Противоречие. □

2. Специальная разложимость с избеганием конусов

Рассмотрим вопрос о специальной разложимости с избеганием конусов, а именно: пусть даны 2-в. п. степень $\mathbf{d}$ и в. п. степень $\mathbf{a}$, причем $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{d}$ и $\mathbf{d}$ имеет хотя бы одно специальное разложение, всегда ли существует специальное разложение степени $\mathbf{d}$ с избеганием верхнего конуса $\mathbf{a}$?

Ясно, что если $\mathbf{d}$ является в. п., то ответ дает теорема Сакса о разложении. Если $\mathbf{d}$ – собственная 2-в. п. степень, то всегда можно добиться того, чтобы в. п. часть специального разложения избегала верхний конус $\mathbf{a}$. Действительно, пусть $\mathbf{d} = \mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ есть специальное разложение, где $\mathbf{y}$ в. п. Если $\mathbf{a} \leq \mathbf{y}$, то по теореме Сакса о разложении $\mathbf{y}$ можно разложить на степени $\mathbf{b}, \mathbf{c} \not\geq \mathbf{a}$. Тогда либо $\mathbf{d} = \mathbf{x} \cup \mathbf{b}$ дает искомое специальное разложение, либо $\mathbf{x} \cup \mathbf{b} < \mathbf{d}$, и искомое разложение имеет вид $\mathbf{d} = (\mathbf{x} \cup \mathbf{b}) \cup \mathbf{c}$.

Однако для 2-в. п. части аналогичное утверждение неверно, так как справедлива следующая

Теорема 7. *Существуют 2-в. п. степень $\boldsymbol{d}$ и невычислимая в. п. степень $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{d}$ такие, что $\boldsymbol{d}$ имеет специальное разложение и для любых 2-в. п. $\boldsymbol{x}$ и в. п. $\boldsymbol{y}$ выполнено $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{x} \cup \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x}$.*

Доказательство. Воспользуемся стандартными обозначениями, принятыми в приоритетных конструкциях (более подробно см. [18]).

Строим 2-в. п. множество X и в. п. множества Y и A, удовлетворяющие следующим требованиям:

$$\mathcal{P}_e : A \neq \Omega_e,$$
$$\mathcal{R}_e : X \neq \Delta_e^Y,$$
$$\mathcal{S}_e : Y \neq \Theta_e^X,$$
$$\mathcal{N}_e : X \oplus Y = \Phi_i^{B_k, C_l} \wedge B_k \oplus C_l = \Psi_j^{X,Y} \to A = \Gamma_e^{B_k}.$$

Здесь $\{\Omega_e\}_{e\in\omega}$ – эффективное перечисление всех частично вычислимых функций, $\{\Delta_e\}_{e\in\omega}$, $\{\Theta_e\}_{e\in\omega}, \{\Phi_i\}_{i\in\omega}, \{\Psi_j\}_{j\in\omega}$ – всех частично вычислимых функционалов, $\{B_k\}_{k\in\omega}$ – всех 2-в. п. множеств, $\{C_l\}_{l\in\omega}$ – всех в. п. множеств; $e = \langle i, j, k, l \rangle$, $\Gamma_e^{B_k}$ – функционал, который строится стратегией требования $\mathcal{N}_e$. Прописные греческие буквы будем использовать для обозначения соответствующих use-функций.

В случае удовлетворения вышеизложенных требований степени $\mathbf{d} = \deg(X \oplus Y)$, $\mathbf{a} = \deg(A)$ будут искомыми.

В качестве базовых модулей для стратегий $\mathcal{P}_e, \mathcal{R}_e, \mathcal{S}_e$ возьмем варианты стратегии Фридберга–Мучника.

Стратегия для $\mathcal{P}_e$:

(1) Выбираем достаточно большого (т. е. бóльшего, чем использованные ранее числа) свидетеля x.

(2) Ждем шага s: $\Omega_e(x)[s] \downarrow= 0$.

(3) Перечисляем x в A.

Стратегия для $\mathcal{R}_e$:

(1) Выбираем достаточно большого свидетеля x.

(2) Ждем шага s: $\Delta_e^Y(x)[s]\downarrow = 0$.
(3) Перечисляем x в X, запрещаем $Y \upharpoonright \delta_e(x)[s]$.

Стратегия для $\mathcal{S}_e$:
(1) Выбираем достаточно большого свидетеля y.
(2) Ждем шага s: $\Theta_e^X(y)[s]\downarrow = 0$.
(3) Перечисляем y в Y, запрещаем $X \upharpoonright \theta_e(y)[s]$.

Все три стратегии имеют два выхода:
w – бесконечное ожидание в (2),
s – завершение в (3).

Стратегия для $\mathcal{N}_e$ похожа на приведенную в [19],[20], но прежде дадим следующее определение.

Длиной соглашения назовем число

$$l(e,s) = \max\big\{x : (\forall y < x)[\,(X \oplus Y)(y)[s] = \Phi_i^{B_k,C_l}(y)[s] \wedge \\ (\forall u < \varphi_i(y)[s])(B_k \oplus C_l)(u)[s] = \Psi_j^{X,Y}(u)[s]\,]\big\}.$$

Напомним стандартное понятие *e-расширяющего* шага, а именно: шаг $s = 0$ является e-расширяющим; шаг $s > 0$ является e-расширяющим, если $l(e,s) > l(e,s^-)$, где s^- – предыдущий e-расширяющий шаг. Если значение e понятно из контекста, будем говорить просто расширяющий шаг.

Базовый модуль для удовлетворения $\mathcal{N}_e$ состоит в том, что на каждом шаге отслеживается длина соглашения и в случае, когда шаг s является расширяющим, доопределяется $\Gamma_e^{B_k}(z)$ для всех $z \le l(e,s)$. Тем самым стратегия имеет два выхода:

inf) $\lim_s l(e,s) = \infty$. Тогда обеспечивается сводимость $A \le_T B_k$.

fin) $\lim_s l(e,s) < \infty$. Тогда левая часть импликации требования $\mathcal{N}_e$ ложна, и оно удовлетворено.

Однако ввиду наличия $\mathcal{P}$-стратегий, перечисляющих элементы в A и тем самым нарушающих сводимость, возникает конфликт между $\mathcal{P}$- и $\mathcal{N}$-стратегиями. Для решения данной проблемы каждая $\mathcal{P}$-стратегия с более низким, чем $\mathcal{N}_e$, приоритетом будет брать, помимо основного свидетеля z, дополнительно свидетеля x. Стратегия для $\mathcal{N}_e$ попрежнему будет отслеживать длину соглашения и, если возможно, проводить диагонализацию путем изменения $X(x)$. Если же диагонализацию при помощи x установить не удастся, то будет определяться сводящий функционал в точке z.

Опишем стратегию для $\mathcal{P}_k$ при наличии требования $\mathcal{N}_e$ с более высоким приоритетом.
(1) Выбираем “большого” свидетеля x для $\mathcal{P}_k$.

(2) Ждем шага s: $l(e,s) > x$.

(3) Перечисляем x в X, запрещаем $X \upharpoonright \psi_j(x)[s]$.

(4) Ждем шага $s' > s : l(e,s') > x$. Заметим, что между шагами s и s' $\Phi_i^{B_k,C_l}(x)$ меняет свое значение, следовательно, существует $y < \varphi_i(x)[s']$, из-за которого произошло изменение.

Далее возможны два случая.

(A) $y \searrow C_l$ или $y \nearrow B_k$. Тогда извлекаем x из X, запрещаем изменяться $X \upharpoonright \psi_j(x)[s']$ и получаем с этого момента неравенство $(B_k \oplus C_l)(y) \neq \Psi_j^{X,Y}(y)$. Запускаем процедуру для $\mathcal{P}_k$ заново.

(B) $y \searrow B_k$. Запрещаем изменяться $X \upharpoonright \psi_j(x)[s']$. Выбираем большого свидетеля z и определяем $\Gamma_e^{B_k}(z) = 0$ с use-функцией $\gamma_e(z) = y$. Ждем $\Omega_k(z) \downarrow = 0$. Затем $x \nearrow X$ и $z \searrow A$.

Таким образом, требование $\mathcal{P}_k$ удовлетворено.

Если $\lim_s l(e,s)$ будет конечным, то $\mathcal{N}_e$ удовлетворится. Иначе снова получим равенство $(B_k \oplus C_l)(y) = \Psi_j^{X,Y}(y)$, где правая часть принимает то же значение, что до шага s'. Значит, $y \nearrow B_k$, оракул $B_k \upharpoonright \gamma_e(z)$ имеет новую конфигурацию, поэтому можем переопределить $\Gamma_e^{B_k}(z) = 1$. Таким образом, $\mathcal{N}_e$ корректно продолжает свою работу.

Дерево стратегий

Пусть $\Lambda = \{0,1\}$ – множество выходов. Для $\mathcal{P}$-, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{S}$-стратегий выход w соответствует 0, s соответствует 1; для $\mathcal{N}$-стратегий выход inf соответствует 0, fin соответствует 1. Определим дерево стратегий $T = \Lambda^{<\omega}$, где $0 <_\Lambda 1$. Каждая вершина $\alpha \in T$ ассоциируется с некоторой стратегией. Пусть $|\alpha| = 4e + r$, $r = \overline{0,3}$. В зависимости от значения r вершина α будет версией стратегий для $\mathcal{R}_e, \mathcal{S}_e, \mathcal{P}_e, \mathcal{N}_e$ соответственно. Далее понятия стратегии и вершины будем отождествлять. Во всех точках, где определение функционала $\Gamma_e^{B_k}$ явно не приводится, он определяется естественным образом. Понятие e-расширяющего шага очевидным образом адаптируем к вершинам дерева. Также для удобства индексы множеств, функций и функционалов, связанных со стратегиями, будем отождествлять с соответствующими стратегиями, т. е. писать $B_\alpha, \Theta_\alpha^X$ и др.

Конструкция

Шаг $s = 0$. $X, Y, A = \varnothing$, все стратегии на T инициализированы.

Шаг $s > 0$. Определим вычислимую аппроксимацию $TP_s \subset T$ истинного пути $TP \subset T$ по индукции. Каждый раз, когда TP_s определено, мы инициализируем все $\eta \nleq TP_s$ и идем к следующему шагу.

Зафиксируем подшаг $t + 1 < s$ и определим аппроксимацию $TP_{s,t+1}$ для TP_s. Для краткости будем говорить, что α удовлетворена, если α соответствует $\mathcal{R}$-, $\mathcal{S}$- или $\mathcal{P}$-стратегиям и на предыдущем шаге, где α была посещена, она имела выход 1. Аналогично определяем удовлетворенность в случае $\mathcal{N}$-стратегии.

Случай 1. $t = 4e$, $TP_{s,t} = \rho$ является $\mathcal{R}$-стратегией.

Если ρ удовлетворена, то полагаем $TP_{s,t+1} = TP_{s,t}{}^\frown 1$ и идем к подшагу $t + 2$. Далее пусть ρ не удовлетворена.

$\rho 1$. Если свидетель x не определен, то определяем его как 1 + наибольшее использованное ранее число и полагаем $TP_{s,t+1} = \rho^\frown 0$.

$\rho 2$. Иначе ($\rho 1$ неверно), если $\Delta^Y_\rho(x)[s] \downarrow= 0$, то перечисляем x в X и полагаем $TP_{s,t+1} = \rho^\frown 1$.

$\rho 3$. Иначе ($\rho 1 - \rho 2$ неверны) полагаем $TP_{s,t+1} = \rho^\frown 0$.

Случай 2. $t = 4e + 1$, $TP_{s,t} = \sigma$ является $\mathcal{S}$-стратегией.

Если σ удовлетворена, то полагаем $TP_{s,t+1} = TP_{s,t}{}^\frown 1$ и идем к подшагу $t + 2$. Далее пусть σ не удовлетворена.

$\sigma 1$. Если свидетель y не определен, то определяем его как 1 + наибольшее использованное ранее число и полагаем $TP_{s,t+1} = \sigma^\frown 0$.

$\sigma 2$. Иначе ($\sigma 1$ неверно), если $\Theta^X_\sigma(y)[s] \downarrow= 0$, то перечисляем y в Y и полагаем $TP_{s,t+1} = \sigma^\frown 1$.

$\sigma 3$. Иначе ($\sigma 1 - \sigma 2$ неверны) полагаем $TP_{s,t+1} = \sigma^\frown 0$.

Случай 3. $t = 4e + 2$, $TP_{s,t} = \pi$ является $\mathcal{P}$-стратегией.

Если π удовлетворена, то полагаем $TP_{s,t+1} = TP_{s,t}{}^\frown 1$ и идем к подшагу $t + 2$. Далее пусть π не удовлетворена.

$\pi 1$. Если свидетель x не определен, то определяем его как 1 + наибольшее использованное ранее число и полагаем $TP_{s,t+1} = \pi^\frown 0$.

$\pi 2$. Иначе ($\pi 1$ неверно), если $x \notin X$, то перечисляем x в X, полагаем $TP_{s,t+1} = \pi^\frown 0$ и инициализируем все $\alpha \supset \pi$.

$\pi 3$. Иначе ($\pi 1 - \pi 2$ неверны), если свидетель z не определен, то определяем его как 1 + наибольшее использованное ранее число и полагаем $TP_{s,t+1} = \pi^\frown 0$.

$\pi 4$. Иначе ($\pi 1 - \pi 3$ неверны), если $\Omega_\pi(z)[s] \downarrow= 0$, то перечисляем z в A, изымаем x из X и полагаем $TP_{s,t+1} = \pi^\frown 1$.

$\pi 5$. Иначе ($\pi 1 - \pi 4$ неверны) полагаем $TP_{s,t+1} = \pi^\frown 0$.

Случай 4. $t = 4e + 3$, $TP_{s,t} = \nu$ является $\mathcal{N}$-стратегией.

Если ν удовлетворена, то полагаем $TP_{s,t+1} = TP_{s,t}{}^\frown 1$ и идем к подшагу $t + 2$. Далее пусть ν не удовлетворена.

$\nu 1$. Если шаг s не является расширяющим, то полагаем $TP_{s,t+1} = \nu^\frown 1$ и идем к подшагу $t + 2$.

$\nu 2$. Иначе ($\nu 1$ неверно) пусть s^- – предыдущий расширяющий шаг для вершины ν. Рассмотрим следующие подслучаи.

$\nu 2.1$. Если существуют $x < l(e, s^-)$ и $y < \varphi_\nu(x)[s^-]$ такие, что x был перечислен в X, а y перечислился в C_ν или покинул B_ν после s^-, то изымаем x из X, полагаем $TP_{s,t+1} = \nu^\frown 1$ и инициализируем все $\alpha \supset \nu$. (Тем самым ν становится удовлетворенной.)

$\nu 2.2$. Иначе ($\nu 2.1$ неверно), если существуют $x < l(e, s^-)$ и $y < \varphi_\nu(x)[s^-]$ такие, что x был перечислен в X, а y перечислился в B_ν после s^-, то существует $\mathcal{P}$-стратегия

$\pi \supset \nu$, которая выбрала x в качестве свидетеля. Следовательно, π выбрала и свидетеля z. Определяем $\Gamma_\nu^{B_\nu}(z) = 0$ с use-функцией $\gamma_\nu(z) = y$, полагаем $TP_{s,t+1} = \nu^\frown 0$.

$\nu 2.3$. Иначе ($\nu 2.1 - \nu 2.2$ неверны), если существует $x < l(e, s^-)$ такой, что x покинул X после s^-, то переопределяем $\Gamma_\nu^{B_\nu}(z) = 1$ и полагаем $TP_{s,t+1} = \nu^\frown 0$.

$\nu 2.4$. Иначе ($\nu 2.1 - \nu 2.3$ неверны) полагаем $TP_{s,t+1} = \nu^\frown 0$.

Верификация

Определим *истинный путь* как $TP = \liminf_s TP_s$, т. е. как самый левый бесконечно посещаемый путь на дереве. Поскольку дерево конечно ветвящееся, то истинный путь существует. Докажем, что каждое требование будет удовлетворено некоторой стратегией на TP.

Лемма 8. *Для всех $n \in \omega$*

(1) *$TP \restriction n$ инициализируется конечное число раз,*

(2) *$TP \restriction n$ инициализирует другие вершины на TP конечное число раз.*

Доказательство. Пусть $n = 0$. Тогда $TP \restriction 0 = \lambda$ – корень дерева. Ни одна вершина не инициализирует корень, так что (1) выполнено. Корню соответствует $\mathcal{R}$-стратегия, которая инициализирует другие вершины не более одного раза, поэтому (2) также верно.

Далее рассуждаем по индукции. Предположим, что утверждение верно для всех $i \leq n$. Ветвь $TP \restriction (n+1)$ существует. Заметим, что эта ветвь посещается бесконечное число раз. В силу (2) можно зафиксировать шаг s_0 такой, что $TP \restriction n$ не инициализирует другие вершины на TP и само не инициализируется после s_0. Поскольку $TP \restriction (n+1)$ расположено на истинном пути, то все вершины, находящиеся левее, посещаются конечное число раз. Зафиксируем шаг $s_1 > s_0$, начиная с которого эти посещения завершаются. Тогда с этого момента $TP \restriction (n+1)$ не инициализируется другими вершинами, т. е. для $n+1$ справедливо (1).

Докажем (2). Как видно из конструкции, вершины, соответствующие $\mathcal{R}$- и $\mathcal{S}$-стратегиям, не инициализируют другие вершины, так что нужно рассмотреть лишь два случая.

Случай 1. $n+1 = 4e+2$ – вершина соответствует $\mathcal{P}$-стратегии. Зафиксируем шаг s_1, после которого она не инициализируется. Сама вершина инициализирует только в случае $\pi 2$. Если верно $\pi 2$, то на следующих шагах выполнится либо $\pi 4$, после чего стратегия удовлетворится и выход останется неизменно равным 1, либо $\pi 5$, и тогда получим $\Omega_e(z) \neq 0$, значит, выход останется неизменно равным 0. Таким образом, (2) выполнено.

Случай 2. $n+1 = 4e+3$ – вершина соответствует $\mathcal{N}$-стратегии. Зафиксируем шаг s_1, после которого она не инициализируется. Сама вершина инициализирует в случае $\nu 2.1$, после чего стратегия удовлетворяется и выход остается неизменно равным 1, значит, верно (2). $\square$

Лемма 9. *Для всех $e \in \omega$ требования $\mathcal{R}_e, \mathcal{S}_e$ удовлетворяются.*

Доказательство. Покажем, что требование $\mathcal{R}_e$ удовлетворяется стратегией $\rho \in TP$, $|\rho| = 4e$. По лемме 8 фиксируем шаг s_1, после которого ρ не инициализируется. Тогда свидетель x, которым обладает ρ после шага s_1, является окончательным. Если $\rho^\frown 0 \in TP$, то $\Delta_e^Y(x) \neq 0 = X(x)$, а если $\rho^\frown 1 \in TP$, то $\Delta_e^Y(x) \downarrow= 0 \neq 1 = X(x)$. В любом случае $X(x) \neq \Delta_e^Y(x)$.

Требование $\mathcal{S}_e$ удовлетворяется стратегией $\sigma \in TP$, $|\sigma| = 4e + 1$. Доказательство аналогично. □

Лемма 10. *Для всех $e \in \omega$ требование $\mathcal{P}_e$ удовлетворяется.*

Доказательство. Покажем, что требование $\mathcal{P}_e$ удовлетворяется стратегией $\pi \in TP$, $|\pi| = 4e + 2$. По лемме 8 фиксируем шаг s_1, после которого π не инициализируется. Тогда свидетель z, которым обладает π после шага s_1, является окончательным. Если $\pi^\frown 0 \in TP$, то $\Omega_e(z) \neq 0 = A(z)$, а если $\pi^\frown 1 \in TP$, то $\Omega_e(z) \downarrow= 0 \neq 1 = A(z)$. В любом случае $A(z) \neq \Omega_e(z)$. □

Лемма 11. *Для всех $e \in \omega$ требование $\mathcal{N}_e$ удовлетворяется.*

Доказательство. Покажем, что требование $\mathcal{N}_e$ удовлетворяется стратегией $\nu \in TP$, $|\nu| = 4e + 3$. По лемме 8 фиксируем шаг s_1, после которого ν не инициализируется. Если $\pi^\frown 1 \in TP$, то левая часть импликации требования $\mathcal{N}_e$ ложна и оно удовлетворено. Пусть теперь $\pi^\frown 0 \in TP$. Покажем, что тогда $A \leq_T B_\nu$.

Чтобы ответить на вопрос "$z \in A$?", выясняем, существует ли $\mathcal{P}$-стратегия $\alpha \supset \nu$, которая берет z в качестве свидетеля. Поскольку стратегии при инициализации берут бо́льших свидетелей, то достаточно дождаться шага s', на котором одна из стратегий возьмет свидетеля не меньше z. Тогда искомая $\mathcal{P}$-стратегия должна находиться на $T \upharpoonright s'$, так что поиск требуемой α является вычислимым.

Если такой α не существует, то $z \notin A$. Иначе покажем, что $A(z) = \Gamma_e^{B_\nu}(z)$.

Поскольку z выбран стратегией α, то на каком-то шаге в конструкции выполнится случай $\nu 2.2$, т. е. существуют x, y такие, что x будет перечислен в X посредством α, а y перечислится в B_ν. Тогда будет определено $\Gamma_e^{B_\nu}(z) = 0$ с use-функцией $\gamma_e(z) = y$. Если далее z не перечислится в A, то $A(z) = \Gamma_e^{B_\nu}(z) = 0$. Если на некотором шаге $z \searrow A$, то на этом же шаге $x \nearrow X$, т. е. выполнится случай $\nu 2.3$. Теперь, так как $\pi^\frown 0 \in TP$, то $(B_\nu \oplus C_\nu)(y) = \Psi_j^{X,Y}(y) = 0$ ввиду того, что x покинул X и значение $(B_\nu \oplus C_\nu)(y)$ вернулось к тому, которое было до перечисления x в X и, как следствие, до перечисления y в B_ν. Но последнее означает, что $y \nearrow B_\nu$, функционал $\Gamma_e^{B_\nu}$ стал неопределенным, следовательно, в соответствии с $\nu 2.3$ можно переопределить $\Gamma_e^{B_\nu}(z) = 1$, так что окончательно установится равенство $A(z) = \Gamma_e^{B_\nu}(z)$. □

Доказательство леммы завершает доказательство теоремы. □

3. Связь с лахлановскими множествами

Пусть $\{D_s\}_{s\in\omega}$ – фиксированная аппроксимация 2-в. п. множества D такая, что $|D_{s+1} - D_s| \leq 1$.

Определение 12. Множество

$$L(D) = \{s \mid \exists x\,(x \in D_s - D)\}$$

называется *лахлановским* для множества D.

Известно, что для любого 2-в. п. множества D множество $L(D)$ в. п., $L(D) \leq_T D$, а степень $L(D)$ не зависит от выбора аппроксимации [19]. Если D в. п., то $L(D)$ вычислимо.

Для невычислимого в. п. множества C определим следующие классы 2-в. п. множеств.

Определение 13.

$$\mathrm{NSpl}(C) = \left\{ D \;\middle|\; \begin{array}{l} D \text{ – 2-в. п., } D >_T C \text{ и } D \text{ не имеет разложения с избеганием} \\ \text{верхнего конуса } C \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{NSpSpl}(C) = \left\{ D \;\middle|\; \begin{array}{l} D \text{ – 2-в. п., } D >_T C \text{ и } D \text{ не имеет специального разложения с} \\ \text{избеганием верхнего конуса } C \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{BL}(C) = \{D \mid D \text{ – 2-в. п.}, D >_T C \text{ и } \forall B \equiv_T D\,(C \leq_T L(B))\}\,.$$

Предложение 14. $\mathrm{BL}(C) \subseteq \mathrm{NSpSpl(C)}$.

Доказательство. Предположим, что множество $D \in \mathrm{BL}(C)$ имеет разложение $D \equiv_T A \oplus B$, где A 2-в. п., B в. п. и $C \not\leq_T A, B$. Тогда по определению $\mathrm{BL}(C)$ получаем

$$C \leq_T L(A \oplus B) \equiv_T L(A) \oplus L(B) \equiv_T L(A) \leq_T A,$$

т. е. $C \leq_T A$. Противоречие. □

Анализ конструкций для неразложимости 2-в. п. степеней с избеганием конусов и конструкций для 2-в. п. степеней с ограниченными лахлановскими степенями позволяет сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 15. $\mathrm{NSpl}(C) \subseteq \mathrm{BL}(C)$.

Остается также открытым вопрос о том, являются ли включения в предложении 14 и гипотезе 15 (если она верна) собственными.

Список литературы

[1] E.M. Gold, *Limiting recursion*, J. Symb. Logic **30** (1), 28–48 (1965).
DOI: https://doi.org/10.2307/2270580

[2] H. Putnam, *Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski*, J. Symb. Logic **30** (1), 49–57 (1965).
DOI: https://doi.org/10.2307/2270581

[3] Ю.Л. Ершов, *Об одной иерархии множеств.* I, Алгебра и логика **7** (1), 47–74 (1968).
URL: http://mi.mathnet.ru/al1139

[4] Ю.Л. Ершов, *Об одной иерархии множеств.* II, Алгебра и логика **7** (4), 15–47 (1968).
URL: http://mi.mathnet.ru/al1166

[5] Ю.Л. Ершов, *Об одной иерархии множеств.* III, Алгебра и логика **9** (1), 34–51 (1970).
URL: http://mi.mathnet.ru/al1231

[6] S.B. Cooper, *Degrees of Unsolvability: Ph. D. Thesis, Leicester University*, Leicester, England, 1971.

[7] М.М. Арсланов, *О структуре степеней ниже* $0'$, Изв. вузов. Матем. (7), 27–33 (1988).
URL: http://mi.mathnet.ru/ivm7989

[8] S. Cooper, L. Harrington, A. Lachlan, S. Lempp, R. Soare, *The d.r.e. degrees are not dense*, Ann. Pure Appl. Logic **55** (2), 125–151 (1991).
DOI: https://doi.org/10.1016/0168-0072(91)90005-7

[9] R.G. Downey, *D.r.e. degrees and the nondiamond theorem*, Bull. London Math. Soc. **21** (1), 43–50 (1989).
DOI: https://doi.org/10.1112/BLMS/21.1.43

[10] M.M. Arslanov, I.Sh. Kalimullin, S. Lempp, *On Downey's conjecture*, J. Symb. Logic **75** (2), 401–441 (2010).
DOI: https://doi.org/10.2178/jsl/1268917488

[11] М.М. Арсланов, М.М. Ямалеев, *Тьюрингова вычислимость: структурная теория*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. **157**, 8–41 (2018).
URL: http://mi.mathnet.ru/into405

[12] G.E. Sacks, *On the degrees less than* $0'$, Ann. Math. (2) **78** (2), 211–231 (1963).
DOI: https://doi.org/10.2307/1970214

[13] S.B. Cooper, *A splitting theorem for the n-r.e. degrees*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (2), 461–471 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1992-1105037-0

[14] S.B. Cooper, A. Li, *Turing Definability in the Ershov Hierarchy*, J. London Math. Soc. (2) **66** (3), 461–471 (2002).
DOI: https://doi.org/10.1112/S0024610702003691

[15] S.B. Cooper, A. Li, *Splitting and cone avoidance in the d.c.e. degrees*, Sci. in China (Ser. A) **45** (9), 1135–1146 (2002).
DOI: http://doi.org/10.1360/02ys9124

[16] М.М. Ямалеев, *Разложимость 2-вычислимо перечислимых степеней с избеганием конусов*, Изв. вузов. Матем. (6), 76–80 (2009).
URL: http://mi.mathnet.ru/ivm1475

[17] S.B. Cooper, X. Yi, *Isolated d.r.e. degrees*, Preprint series (Univ. Leeds, Dept. Pure Math.) **17** (1995).

[18] Р.И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Изд-во Казан. матем. о-ва, Казань, 2000.

[19] S. Ishmukhametov, *On the r.e. predecessors of d.r.e. degrees*, Arch. Math. Logic **38** (6), 373–386 (1999).
DOI: http://doi.org/10.1007/s001530050132

[20] J. Liu, G. Wu, M. Yamaleev, *Downward density of exact degrees*, Lobachevskii J. Math. **36** (4), 389–398 (2015).
DOI: http://doi.org/10.1134/S1995080215040095

Рамиль Радифович Багавиев
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: ramilbagaviev@mail.ru

Volume 1, Issue 3
pp. 77–91 (2023)

UDC 510.532, 510.535
MSC 03D25, 03D28

Special splitting in the 2-c.e. Turing degrees

R.R. Bagaviev

Abstract. We study a special splitting of 2-c.e. Turing degrees. The special splitting means a splitting which has a c.e. splitting part. We investigate an existence of a special splitting, including a special splitting with upper cone avoidance. We prove that there exists a 2-c.e. degree without special splitting and that there is a 2-c.e. degree which has no special splitting avoiding upper cone of some incomputable c.e. degree.

Keywords: Turing degree, 2-c.e. set, splitting, upper cone avoidance, Lachlan set.

References

[1] E.M. Gold, *Limiting recursion*, J. Symb. Logic **30** (1), 28–48 (1965).
DOI: https://doi.org/10.2307/2270580

[2] H. Putnam, *Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski*, J. Symb. Logic **30** (1), 49–57 (1965).
DOI: https://doi.org/10.2307/2270581

[3] Yu.L. Ershov, *A certain hierarchy of sets.* I, Algebra Logika **7** (1), 47–74 (1968) [in Russian].
URL: http://mi.mathnet.ru/al1139

[4] Yu.L. Ershov, *A certain hierarchy of sets.* II, Algebra Logika **7** (4), 15–47 (1968) [in Russian].
URL: http://mi.mathnet.ru/al1166

[5] Yu.L. Ershov, *A certain hierarchy of sets.* III, Algebra Logika **9** (1), 34–51 (1970) [in Russian].
URL: http://mi.mathnet.ru/al1231

[6] S.B. Cooper, *Degrees of Unsolvability: Ph. D. Thesis, Leicester University*, Leicester, England, 1971.

[7] M.M. Arslanov, *The lattice of the degrees below* $0'$, Soviet Math. (Iz. VUZ) **32** (7), 43–53 (1988).
URL: http://mi.mathnet.ru/ivm7989

Acknowledgements. The work is performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2023-944).

Received: 04 September 1990. Accepted: 26 September 2023. Published: 18 October 2023.

[8] S. Cooper, L. Harrington, A. Lachlan, S. Lempp, R. Soare, *The d.r.e. degrees are not dense*, Ann. Pure Appl. Logic **55** (2), 125–151 (1991).
DOI: https://doi.org/10.1016/0168-0072(91)90005-7

[9] R.G. Downey, *D.r.e. degrees and the nondiamond theorem*, Bull. London Math. Soc. **21** (1), 43–50 (1989).
DOI: https://doi.org/10.1112/BLMS/21.1.43

[10] M.M. Arslanov, I.Sh. Kalimullin, S. Lempp, *On Downey's conjecture*, J. Symb. Logic **75** (2), 401–441 (2010).
DOI: https://doi.org/10.2178/jsl/1268917488

[11] M.M. Arslanov, M.M. Yamaleev, *Turing Computability: Structural Theory*, J. Math. Sciences **256** (6), 1–33 (2021).
DOI: http://doi.org/10.1007/s10958-021-05418-y

[12] G.E. Sacks, *On the degrees less than* $0'$, Ann. Math. (2) **78** (2), 211–231 (1963).
DOI: https://doi.org/10.2307/1970214

[13] S.B. Cooper, *A splitting theorem for the n-r.e. degrees*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (2), 461–471 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1992-1105037-0

[14] S.B. Cooper, A. Li, *Turing Definability in the Ershov Hierarchy*, J. London Math. Soc. (2) **66** (3), 461–471 (2002).
DOI: https://doi.org/10.1112/S0024610702003691

[15] S.B. Cooper, A. Li, *Splitting and cone avoidance in the d.c.e. degrees*, Sci. in China (Ser. A) **45** (9), 1135–1146 (2002).
DOI: http://doi.org/10.1360/02ys9124

[16] M.M. Yamaleev, *Splitting in* 2*-computably enumerable degrees with avoiding cones*, Russ. Math. **53** (6), 63–66 (2009).
DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X09060127

[17] S.B. Cooper, X. Yi, *Isolated d.r.e. degrees*, Preprint series (Univ. Leeds, Dept. Pure Math.) **17** (1995).

[18] R. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1987. ISBN: 3-540-15299-7

[19] S. Ishmukhametov, *On the r.e. predecessors of d.r.e. degrees*, Arch. Math. Logic **38** (6), 373–386 (1999).
DOI: http://doi.org/10.1007/s001530050132

[20] J. Liu, G. Wu, M. Yamaleev, *Downward density of exact degrees*, Lobachevskii J. Math. **36** (4), 389–398 (2015).

Ramil Radifovich Bagaviev
Kazan Federal University,
Volga Region Mathematical Center,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: ramilbagaviev@mail.ru

Объявления о конференциях с поддержкой НОМЦ ПФО

XXII Всероссийская молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения-2023" г. Казань, 27 ноября – 1 декабря 2023 г.

В последнее время чрезвычайно актуальной является проблема привлечения талантливой молодежи к фундаментальным научным исследованиям. С этой целью Казанский университет регулярно проводит молодежные школы-конференции «Лобачевские чтения».

Направления работы конференции:

- алгебра и математическая логика;
- анализ данных и машинное обучение;
- геометрия и топология;
- дифференциальные уравнения;
- теория функций и функциональный анализ;
- теория приближений и вычислительные методы;
- функциональный анализ и квантовая теория информации;
- компьютерное моделирование и информационные технологии;
- аэрогидромеханика;
- механика деформируемого твердого тела;
- математическое образование. История математики.

Работа конференции будет проходить в Казани на базе Казанского (Приволжского) федерального университета (КФУ). Программа школы-конференции включает в себя лекции ведущих российских ученых и доклады участников конференции.

Для участия в школе-конференции приглашаются молодые (до 35 лет) преподаватели, научные сотрудники, аспиранты, магистранты, студенты-старшекурсники. Форма докладов участников – устные сообщения до 15 минут (возможно онлайн). Материалы отобранных оргкомитетом докладов будут опубликованы к открытию школы-конференции в очередном томе «Трудов Математического центра имени Н.И. Лобачевского».

Председатель оргкомитета – заведующий кафедрой геометрии Института математики и механики им. Н.И.Лобачевского (ИММ) КФУ Попов Аркадий Александрович, ученый секретарь – Хакимов Джамолиддин Рахмонович.

Желающие сделать доклад должны зарегистрироваться на сайте конференции по адресу **https://kpfu.ru/math/conference/lobachevskii/xxii-vserossijskaya-molodezhnaya-shkola** и прислать оформленные согласно требованиям (см. приложение) материалы в TeX- и pdf-форматах. Срок регистрации и подачи тезисов – **до 20 октября 2023 г.** по электронному адресу: **2023.lobach@gmail.com**.

Телефоны для справок: +**7937 005 43 41** (ученый секретарь Хакимов Джамолиддин Рахмонович).