МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Издается с 2023 года
Выходит 4 раза в год
ISSN 2949-3919

Том 2
Выпуск 2

Казань
2024

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Издается с 2023 года
Выходит 4 раза в год
ISSN 2949-3919

Том 2

Выпуск 2

Казань

2024

Учредитель: ФГАОУ ВО КПФУ
Адрес редакции: 420008, Республика Татарстан, г. Казань, Казанский федеральный университет, Институт математики и механики, ул. Кремлевская, д. 35, комн. 501.
Тел. +7 843 233-70-60
E-mail: mathematics.tcs@gmail.com
URL: https://mathtcs.ru/

Издается с 2023 года.
Выходит 4 раза в год.
ISSN 2949-3919
Регистрационный номер СМИ: Эл № ФС77-84704

Сетевое издание «Математика и теоретические компьютерные науки» основано в 2023 году Научно-образовательным математическим центром Приволжского федерального округа (НОМЦ ПФО). Его учредителем является ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет». Издание ориентировано на публикацию научных статей по следующим направлениям фундаментальной и прикладной математики, теоретической информатики и компьютерных наук:

- вещественный, комплексный и функциональный анализ;
- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление;
- математическая физика;
- геометрия и топология;
- теория вероятностей и математическая статистика;
- математическая логика, алгебра и теория чисел;
- вычислительная математика;
- теория вычислимости и сложности вычислений;
- дискретная математика и математическая кибернетика;
- теоретическая информатика;
- математические методы в искусственном интеллекте.

Также принимаются к печати обзоры, научно-популярные статьи, статьи о математической жизни. Все статьи проходят процедуру рецензирования. Все опубликованные статьи находятся в открытом доступе. Языки журнала – русский и английский.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Том 2, Выпуск 2
Стр. 4–29 (2024)

УДК 517.51
MSC 41A10, 42A05

О функциональном пространстве со смешанной обобщенной логарифмической гладкостью

Г. Акишев

Аннотация. Рассматриваются анизотропное пространство Лоренца, 2π-периодических функций m переменных и пространство Никольского–Бесова – функций со смешанной обобщенной логарифмической гладкостью. Доказаны теоремы вложения для пространств функций со смешанной обобщенной логарифмической гладкостью.

Ключевые слова: пространство Лоренца, класс Никольского–Бесова, обобщенная гладкость.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.4-29

Введение

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ – множества натуральных, целых, вещественных чисел соответственно и $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^m$ – m-мерное евклидово пространство точек $\overline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами; $I^m = [0, 1)^m$ – m-мерный единичный куб, $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m$.

Напомним определения невозрастающей перестановки функции.

Определение 1. Пусть f – измеримая по Лебегу функция одной переменной на $[0, 1)$. Функция распределения для $|f|$ определяется как мера Лебега (см., например, [1, гл. 2, разд. 2]) $\mu_f(y) := \mu\{x \in [0, 1) : \ |f(x)| > y\},\ 0 \leq y < \infty$.

Две неотрицательные измеримые функции f и g называются равноизмеримыми, если их функции распределения совпадают. Невозрастающей перестановкой функции f одной переменной называется невозрастающая на $[0, 1)$ функция $f^*(t)$ равноизмеримая с функцией $|f(x)|$. Она определяется по формуле

$$f^*(t) := \inf\{y > 0 : \ \mu_f(y) \leq t\},\ t \in [0, 1).$$

Теперь напомним определение невозрастающей перестановки функции m переменных.

Благодарности. Работа выполнена в рамках грантового финансирования Комитета науки Министерства науки и высшего образования РК (проект AP19677486).

Поступила: 26.03.2024. Принята: 02.07.2024. Опубликована: 16.07.2024.

Определение 2 (см. [2, 3]). Пусть $f(x_1,\dots,x_m)$ – измеримая по Лебегу функция m переменных на $I^m=[0,1)^m$. Невозрастающей перестановкой функции $|f(x_1,\dots,x_m)|$, по первой переменной понимается функция $f^{*_1}(t_1,x_2,\dots,x_m)$, равноизмеримая на I^m, невозрастающая по t_1 и такая, что функции $|f(x_1,\dots,x_m)|$ и $f^{*_1}(t_1,x_2,\dots,x_m)$ равноизмеримы как функции одной переменной для почти всех фиксированных $x_2,\dots,x_m$.

Аналогичным образом, рассматривая невозрастающую перестановку функции $f^{*_1}(t_1,x_2,\dots,x_m)$ по переменной x_2, при фиксированных $t_1,x_3,\dots,x_m$ определяется функция $f^{*_1*_2}(t_1,t_2,x_3,\dots,x_m)$ равноизмеримая с функцией $f(x_1,\dots,x_m)$. Продолжая этот процесс определяется невозрастающая перестановка $f^{*_1*_2\dots*_m}(t_1,t_2,\dots,t_m)$ равноизмеримая с функцией $|f(x_1,\dots,x_m)|$.

Пусть $\overline{q}=(q_1,\dots,q_m)$, $\overline{\tau}=(\tau_1,\dots,\tau_m)$, $1<q_j<\infty$, $1\leqslant\tau_j<\infty$, $j=1,\dots,m$. Через $L^*_{\overline{q},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца всех измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$ определенных на $\mathbb{R}^m$, имеющих 2π-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\overline{q},\overline{\tau}}=\left[\int_0^1 t_m^{\frac{\tau_m}{q_m}-1}\left[\dots\left[\int_0^1\Big(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,\dots,t_m)\Big)^{\tau_1}t_1^{\frac{\tau_1}{q_1}-1}dt_1\right]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\dots\right]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}}dt_m\right]^{\frac{1}{\tau_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,\dots,t_m)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$ по каждой переменной $x_j\in[0,1)$, при фиксированных остальных переменных (см. [2, 4]).

В случае $q_1=\dots=q_m=\tau_1=\dots=\tau_m=q$ пространство Лоренца $L^*_{\overline{q},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_q(\mathbb{T}^m)$ с нормой (см. [5, гл. I, п. 1.1])

$$\|f\|_q=\left[\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}|f(x_1,\dots,x_m)|^q dx_1\dots dx_m\right]^{\frac{1}{q}},\ 1<q<\infty.$$

Пусть $\mathring{L}^*_{\overline{q},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ – множество всех функций $f\in L^*_{\overline{q},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\overline{x})\,dx_j=0,\quad\forall j=1,\dots,m.$$

Каждой функции $f\in\mathring{L}_1(\mathbb{T}^m)=\mathring{L}(\mathbb{T}^m)$ сопоставим ее ряд Фурье (см. [6])

$$\sum_{\substack{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m\\ \prod_{j=1}^m n_j\neq 0}} a_{\overline{n}}(f)\,e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}$, где $\mathbb{Z}^m$ – множество точек из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами. Положим

$$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}\,(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где $\langle\overline{y},\overline{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j,\ s_j = 1,2,\ldots,$

$$\rho(\bar{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1,\ldots,k_m) \in \mathbb{Z}^m :\ \ 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1,\ldots,m\right\}.$$

Величина (см. [7,8]) $Y_{l_1,\ldots,l_m}(f)_p = \inf_{T_{l_j}} \|f - \sum_{j=1}^{m} T_{l_j}\|_p,$, $l_j = 0,1,2,\ldots$ называется наилучшим приближением "углом" функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ тригонометрическими полиномами, где $T_{l_j} \in L_p(\mathbb{T}^m)$ – тригонометрический полином порядка l_j по переменной $x_j,\ j = 1,\ldots,m$.

Определение 3. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $\overline{h} = (h_1,\ldots,h_m) \in \mathbb{R}^m$. Для функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ полная разность порядка k определяется по формуле

$$\Delta_{\overline{h}}^{k} f(\overline{x}) := \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l f(\overline{x} + l\overline{h}),\quad C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}.$$

Определение 4. Полным модулем гладкости порядка k функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ называется величина (см. [5, гл. 4, п. 4.2])

$$\omega_k(f,t)_p = \sup_{\|\overline{h}\|\le t} \|\Delta_{\overline{h}}^{k} f\|_p,\quad \|\overline{h}\| = \left(\sum_{j=1}^{m} h_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 5. Смешанный модуль гладкости функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ определяется по формуле (см., например, [5, 7, 8])

$$\omega_{\overline{k}}(f,\overline{t})_p = \omega_{k_1,\ldots k_m}(f,t_1,\ldots,t_m)_p = \sup_{|h_1|\le t_1,\ldots,|h_m|\le t_m} \|\Delta_{\overline{h}}^{\overline{k}}(f)\|_p,$$

где $\Delta_{\overline{t}}^{\overline{k}} f(\overline{x}) = \Delta_{t_m}^{k_m}(\ldots\Delta_{t_1}^{k_1} f(\overline{x}))$ – смешанная разность порядка $\overline{k}$ с шагом $\overline{t} = (t_1,\ldots,t_m)$.

0.1. Пространство Бесова ([9, 10], [5, гл. 4, разд. 4.3]). Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $k > r > 0$, $1 \le \theta \le \infty$. Пространством Бесова $\mathbf{B}_{p,\theta}^{r}(\mathbb{T}^m)$ называется множество всех функций $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \le p < \infty$, для которых

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,\theta}^{r}} := \|f\|_p + \left(\int_0^1 (t^{-r}\omega_k(f,t)_p)^{\theta} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,\infty}^{r}} := \|f\|_p + \sup_{0<t\leqslant 1} t^{-r}\omega_k(f,t)_p < \infty,\ \text{для } \theta = \infty.$$

В настоящее время имеются различные обобщения пространства Никольского–Бесова (см., например, [11–14] и библиографию в них). В статьях [11, 12] определено следующее обобщение пространства Бесова $\mathbf{B}^{r,b}_{p,\theta}(\mathbb{T}^m)$ – множество всех функций $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \le p < \infty$, для которых

$$\|f\|_{\mathbf{B}^{r,b}_{p,\theta}} := \|f\|_p + \left(\int_0^1 (t^{-r}(1-\log t)^b \omega_k(f,t)_p)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

при $0 < \theta \le \infty$, $b > -1/\theta$, $k \in \mathbb{N}$, $k > r > 0$.

Эквивалентные нормы пространства $\mathbf{B}^{0,b}_{p,\theta}(\mathbb{T}^m)$ найдены в статьях [11, 12]. В работах [12, 13] определено пространство $B^{0,b}_{p,\theta}(\mathbb{T}^m)$, как множество функций $f \in \mathring{L}_p(\mathbb{T}^m)$, для которых

$$\left\{\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} (s+1)^{b\theta} \|\sigma_s(f)\|_p^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

при $1 < p < \infty$, $b > -1/\theta$, $0 < \theta \leqslant \infty$. Здесь и далее при $\theta = \infty$, для $d_{\overline{s}} \in \mathbb{R}$ величина

$$\left\{\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} |d_{\overline{s}}|^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

понимается как $\sup_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} |d_{\overline{s}}|$.

Соотношения между пространствами $B^{0,b}_{p,\theta}(\mathbb{T}^m)$ и $\mathbf{B}^{0,b}_{p,\theta}(\mathbb{T}^m)$ исследованы в [12, 13], в частности, показано, что эти пространства не совпадают.

0.2. Пространство с доминирующим смешанным модулем гладкости. $S^{\overline{r}}_p H$, $S^{\overline{r}}_{p,\theta} B$ – пространства функций с доминирующей смешанной производной соответственно определены С.М. Никольским [15] и Т.И. Амановым ([16, гл. I, п.17]). П.И. Лизоркиным и С.М. Никольским [6] исследовано декомпозиционное разложение элементов пространства $S^{\overline{r}}_{p,\theta} B$. Приведем его определение.

Пусть $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, $r_j > 0, j = 1, \ldots, m$, $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta \le +\infty$. Пространство $S^{\overline{r}}_{p,\theta} B$ состоит из всех функций $f \in \mathring{L}_p(\mathbb{T}^m)$ для которых

$$\|f\|_{S^{\overline{r}}_{p,\theta} B} = \|f\|_p + \left[\int_0^1 \ldots \int_0^1 \omega_k^\theta(f, \overline{t})_p \prod_{j=1}^m \frac{dt_j}{t_j^{1+\theta r_j}}\right]^{\frac{1}{\theta}} < +\infty.$$

М.К. Потаповым [7,8] определено и исследовано обобщение пространств $S^{\overline{r}}_p H$, $S^{\overline{r}}_{p,\theta} B$, с заменой функции t^{r_j}, $j = 1, \ldots, m$, на более общие функции, удовлетворяющие некоторым условиям.

Определение 6 (см., например, [17]). Функция $\varphi(t)$ называется почти возрастающей на $[1, \infty)$, если существует такое постоянное число C, что $\varphi(t_1) \le C\varphi(t_2)$ для $1 \le t_1 < t_2 < \infty$.

Функция $\varphi(t)$ называется почти убывающей на $[1,\infty)$, если существует такое постоянное число C, что $\varphi(t_1) \geq C\varphi(t_2)$ для $1 \leq t_1 < t_2 < \infty$.

Определение 7 (см., например, [18, гл. 3, подраздел 3.4.3])**.** Положительная и измеримая по Лебегу функция $b(t)$ называется слабо меняющейся на $[1,\infty)$ в смысле Караматы, если для любого $\varepsilon > 0$ функция $t^{\varepsilon}b(t)$ почти возрастает на $[1,\infty)$ и функция $t^{-\varepsilon}b(t)$ почти убывает на $[1,\infty)$. Множество таких функций обозначается $SV[1,\infty)$.

Рассмотрим следующее пространство функций со смешанной обобщенной логарифмической гладкостью.

Определение 8. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta \leq \infty$, $b_j \in SV[1,\infty)$, $j = 1,\dots,m$. Через $S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}\mathbf{B}$ обозначим пространство всех функций $f \in \mathring{L}_p(\mathbb{T}^m)$ для которых

$$\|f\|_{S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}\mathbf{B}} = \|f\|_p + \left[\int_0^1 \dots \int_0^1 \omega^{\theta}_{\overline{k}}(f,\bar{t})_p \prod_{j=1}^{m} \frac{b_j^{\theta}\left(\frac{1}{t_j}\right)}{t_j} dt_1 \dots dt_m\right]^{\frac{1}{\theta}} < +\infty,$$

где $\overline{b}(t) = (b_1(t),\dots,b_m(t))$, $\overline{k} = (k_1,\dots,k_m)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,\dots,m$.

Также рассмотрим следующий класс $S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}B$, состоящий из всех функций $f \in \mathring{L}_p(\mathbb{T}^m)$ для которых

$$\|f\|_{S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}B} = \Big\{\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{s_j})\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}\Big\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

при $1 < p < +\infty$, $1 \leq \theta \leq +\infty$, $\overline{b}(t) = (b_1(t),\dots,b_m(t))$, $b_j \in SV[1,\infty)$, $j = 1,\dots,m$.

Замечание 9. *Если*

$$\int_0^1 b_j^{\theta}\left(\frac{1}{t_j}\right)\frac{dt_j}{t_j} < +\infty,\ j = 1,\dots,m,$$

то пространство $S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}\mathbf{B}$ *совпадает с пространством* $\mathring{L}_p(\mathbb{T}^m)$*,* $1 \leq p < \infty$*,* $0 < \theta \leq \infty$*.*

Поэтому будем считать, что

$$\int_0^1 b_j^{\theta}\left(\frac{1}{t_j}\right)\frac{dt_j}{t_j} = +\infty,\ j = 1,\dots,m. \tag{1}$$

Для функции $b_j(1/t) = \log^{b_j}(2/t)$, условие (1) эквивалентно неравенству $b_j \geq -1/\theta$.

Статья состоит из введения и двух разделов. В первом разделе приведены некоторые известные результаты и доказаны вспомогательные утверждения, которые часто используются в доказательствах основных результатов. Доказательства основных результатов приведены во втором разделе. Основными результатами являются следующие утверждения.

Теорема 10. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $0 < \theta \le \infty$ *и функции* $b_j \in SVL[1,\infty)$, *для* $j = 1,\ldots,m$ *и удовлетворяют условию* (1). *Тогда для функции* $f \in S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}\mathbf{B}$ *справедливо соотношение*

$$\|f\|_{S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}\mathbf{B}} \asymp \left(\sum_{\nu_m=0}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) Y^{\theta}_{[2^{\nu_1-1}],\ldots,[2^{\nu_m-1}]}(f)_p\right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Здесь и далее для положительных величин $A(y), B(y)$ запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 \cdot A(y) \leqslant B(y) \leqslant C_2 \cdot A(y)$. Для краткости записи, в случае выполнения неравенств $B(y) \geqslant C_1 A(y)$ или $B(y) \leqslant C_2 A(y)$ часто будем писать $B(y) >> A(y)$ или $B(y) << A(y)$ соответственно. Постоянные $C(p,q,m,\ldots)$ в формулах не зависят от y.

Определение 11 (см. [19])**.** Множество всех положительных, измеримых по Лебегу на $[1,\infty)$ функций $b(t) = (1+\log t)^{\alpha}$ или $b(t)$, для которых $(\log 2t)^{\varepsilon} b(t) \uparrow$ и $(\log 2t)^{-\varepsilon} b(t) \downarrow$ на $[1,\infty)$ для любого числа $\varepsilon > 0$, обозначим $SVL[1,\infty)$. Нетрудно убедиться в том, что $SVL[1,\infty) \subset SV[1,\infty)$.

Пример 12. Функции $l_1(t) = 1 + \log_2 t$, $l_2(t) = 1 + \log\, l_1(t)$ и $l_i(t) = 1 + \log_2 l_{i-1}(t)$ принадлежат множеству $SVL[1,\infty)$.

Теорема 13. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $0 < \theta \le \infty$ *и функции* $b_j \in SVL[1,\infty)$ *для* $j = 1,\ldots,m$ *удовлетворяют условию* (1). *Тогда для функции* $f \in S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}\mathbf{B}$ *справедливо соотношение*

$$\|f\|_{S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}\mathbf{B}} \asymp \|f\|_p + \left(\sum_{\nu_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{\nu_j})\left\|\left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=\nu_1}^{\infty}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 14. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $0 < \theta \le \infty$ *и функции* $b_j \in SVL[1,\infty)$ *для* $j = 1,\ldots,m$ *удовлетворяют условию* (1). *Тогда для функции* $f \in S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}\mathbf{B}$ *справедливы неравенства*

$$C_1\left\{\|f\|_p + \left(\sum_{l_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{l_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\left(2^{2^{l_j}}\right)2^{l_j}\left\|\sum_{s_m=[2^{l_m-1}]+1}^{2^{l_m}}\cdots\sum_{s_1=[2^{l_1-1}]+1}^{2^{l_1}}\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right\} \le \|f\|_{S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}\mathbf{B}}$$
$$\le C_2\left\{\|f\|_p + \left(\sum_{l_m=0}^{\infty}\cdots\sum_{l_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\left(2^{2^{l_j}}\right)2^{l_j}\left\|\sum_{s_m=[2^{l_m-1}]+1}^{2^{l_m}}\cdots\sum_{s_1=[2^{l_1-1}]+1}^{2^{l_1}}\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right\}.$$

В следующих теоремах установим условия вложения классов $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B}$ и $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}B$.

Теорема 15. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $0 < \theta \le \infty$ *и функции* $b_j \in SVL[1,\infty)$ *для* $j = 1,\ldots,m$ *удовлетворяют условию* (1). *Тогда* $S^{0,\bar{v}(.)}_{p,\theta}B \subset S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}\mathbf{B} \subset S^{0,\bar{u}(.)}_{p,\theta}B$, *где* $\bar{v}(t) = (v_1(t),\ldots,v_m(t))$, $\bar{u}(t) = (u_1(t),\ldots,u_m(t))$, $v_j(t) = b_j(t)(1+\log t)^{\frac{1}{\min\{2,p,\theta\}}}$, $u_j(t) = b_j(t)(1+\log t)^{\frac{1}{\max\{2,p,\theta\}}}$, *для* $j = 1,\ldots,m$.

Замечание 16. *В случае* $b_j(t) = \log^{b_j}(2t)$, *для* $t \in [1, \infty)$, $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, *теорема* 14 *и теорема* 15 *представлены в* [20].

Рассмотрим условие вложения класса $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}B$ в пространство Лоренца. Если $1 < p \leq \tau < \infty$, то известно, что $L_p(\mathbb{T}^m) \subset L^*_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Следовательно, $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}B \subset L^*_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Если же $1 < \tau < p < \infty$, то известно, что $L^*_{p,\tau}(\mathbb{T}^m) \subset L_p(\mathbb{T}^m)$ (см., например, [21]). Значит, пространство $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}B$ может быть не вложено в $L^*_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. В этом случае справедлива

Теорема 17. *Пусть* $1 < \tau \leq \min\{2, p\}$, $1 < p < \infty$, $0 < \theta \leq \infty$ *и функции* $b_j \in SVL[1, \infty)$, $j = 1, \ldots, m$, $\bar{b}(t) = (b_1(t), \ldots, b_m(t))$.

Если $1 < \tau < \theta \leq \infty$ *и*

$$\sum_{s_j=0}^{\infty} b_j^{-\tau\eta'}(2^{s_j}) s_j^{\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{p}\right)\tau\eta'} < \infty, \ j = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

то $S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}B \subset L^*_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$.

Если $0 < \theta \leq \tau < \infty$ *и*

$$\sup_{\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+} \prod_{j=1}^{m} b_j^{-1}(2^{s_j}) s_j^{\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{p}\right)} < \infty, \tag{3}$$

то $S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}B \subset L^*_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$.

1. Вспомогательные утверждения

Теорема 18 (Литтлвуд–Пэли, [5, гл. 1, подразд. 1.5.2])**.** *Пусть* $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$\|f\|_p \asymp \Big\| \Big(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p.$$

Лемма 19 (неравенство Йенсена, [5, лемма 3.3.3])**.** *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. *Для любых чисел* $a_k \geqslant 0$ *выполняется неравенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 20 (обобщенное неравенство Харди, [22,23])**.** *Пусть даны положительные числа* $b_{\bar{k}} = b_{k_1,\ldots,k_m}$, *для* $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m_+$ *и* a_{k_j}, $k_j = 0, 1, 2, \ldots$ *и* $1 \leq \theta_j < +\infty$, $j = 1, \ldots, m$.

а) *Если*

$$\sum_{k_j=0}^{n_j} a_{k_j} \leq C a_{n_j}, \ j = 1, \ldots, m,$$

то

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^m a_{n_j}\left(\sum_{k_m=n_m}^{\infty}\dots\sum_{k_1=n_1}^{\infty} b_{\bar{k}}\right)^{\theta_1} \leqslant C\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^m a_{n_j} b_{\bar{n}}^{\theta_1}.$$

b) *Если*

$$\sum_{k_j=n_j}^{\infty} a_{k_j} \le C a_{n_j},\ j=1,\dots,m,$$

то

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^m a_{n_j}\left(\sum_{k_m=0}^{n_m}\dots\sum_{k_1=0}^{n_1} b_{\bar{k}}\right)^{\theta_1} \le C\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^m a_{n_j} b_{\bar{n}}^{\theta_1}.$$

Для доказательства основных результатов сначала введем дополнительные обозначения и приведем вспомогательные утверждения.

Множество индексов $\{1,\dots,m\}$ обозначим символом e_m, его произвольное подмножество – через e и $|e|$ – количество элементов e.

Если дан элемент $\overline{r}=(r_1,\dots,r_m)\in\mathbb{Z}_+^m$, то $\overline{r}^e=(r_1^e,\dots,r_m^e)$ – вектор с компонентами $r_j^e=r_j$ при $j\in e$ и $r_j^e=0$ при $j\notin e$.

Пусть $\bar{l}=(l_1,\dots,l_m)$ элемент m-мерного пространства с целыми положительными координатами и непустое множество $e\subset e_m$. Положим

$$G_{\bar{l}}(e)=\{\bar{k}=(k_1,\dots,k_m)\in\mathbb{Z}^m : |k_j|\le l_j, j\in e;\quad |k_j|>l_j, j\notin e\}.$$

Рассматриваются частные суммы по различным переменным:

$$S_{\bar{l}^e,\infty}(f,\bar{x})=\sum_{\bar{k}\in\prod_{j\in e}[-l_j,l_j]\times\mathbb{R}^{m-|e|}} a_{\bar{k}}(f)e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}$$

– частная сумма по переменным x_j при $j\in e$.

Для заданного подмножества $e\subset e_m$ положим (см., например, [7, 8, 24])

$$U_{\bar{l}}(f,\overline{x})=\sum_{e\subset e_m, e\ne\emptyset}\ \sum_{\bar{k}\in G_{\bar{l}}(e)} a_{\bar{k}}(f)\, e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}.$$

В частности, для $m=2$ имеем (см. [7]) $U_{l_1,l_2}(f.\bar{x})=S_{l_1,\infty}(f,\bar{x})+S_{\infty,l_2}(f,\bar{x})-S_{l_1,l_2}(f,\bar{x})$.

Лемма 21. *Пусть* $0<\theta<\infty$ *и функция* $b\in SV[1,\infty)$. *Тогда*

$$\int_{\frac{1}{2^\nu}}^{\frac{1}{2^{\nu-1}}} b^\theta\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}\asymp b^\theta(2^\nu),\ \nu\in\mathbb{N}.$$

В этом соотношении постоянные зависят от θ, но не зависят от ν.

Доказательство. Так как функция $b\in SV[1,\infty)$, то $b(1/t)\le C2^{\nu\varepsilon}b(2^\nu)t^\varepsilon$ для $t\ge 1/2^\nu$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\int_{\frac{1}{2^{\nu}}}^{\frac{1}{2^{\nu-1}}} b^{\theta}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t} \leq C2^{\nu\varepsilon}b^{\theta}(2^{\nu})\int_{\frac{1}{2^{\nu}}}^{\frac{1}{2^{\nu-1}}} t^{\theta\varepsilon-1}dt \leq Cb^{\theta}(2^{\nu}).$$

Аналогично, учитывая, что $b(1/t) \geq C2^{(\nu-1)\varepsilon}b(2^{(\nu-1)})t^{\varepsilon}$, для $t \leq 1/2^{\nu-1}$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\int_{\frac{1}{2^{\nu}}}^{\frac{1}{2^{\nu-1}}} b^{\theta}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t} \geq C2^{(\nu-1)\varepsilon}b^{\theta}(2^{\nu-1})\int_{\frac{1}{2^{\nu}}}^{\frac{1}{2^{\nu-1}}} t^{\theta\varepsilon-1}dt \geq Cb^{\theta}(2^{\nu}).$$

□

Лемма 22. *Пусть $0 < \theta < \infty$ и функция $b \in SVL[1,\infty)$. Тогда*

$$\sum_{\nu=[2^{l-1}]+1}^{2^l} b(2^{\nu}) \asymp 2^l b\left(2^{2^l}\right),\ l = 0,1,\ldots,$$

$$\sum_{l=0}^{\mu} 2^l b\left(2^{2^l}\right) \leq C2^{\mu}b\left(2^{2^{\mu}}\right),\ \mu = 0,1,\ldots$$

и постоянные не зависят от l, μ.

Доказательство. Так как функция $b \in SVL[1,\infty)$, то

$$b(2^{\nu}) \leq Cb\left(2^{2^l}\right)\left(\log 2^{1+2^l}\right)^{\varepsilon}\left(\log 2^{1+\nu}\right)^{-\varepsilon},$$

для $\nu \leq 2^l$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\sum_{\nu=[2^{l-1}]+1}^{2^l} b(2^{\nu}) \leq C\left(b\left(2^{2^l}\right)(1+2^l)^{\varepsilon}\right)^{\theta}\sum_{\nu=[2^{l-1}]+1}^{2^l}(\nu+1)^{-\varepsilon\theta} \leq Cb\left(2^{2^l}\right)2^l.$$

Докажем противоположное неравенство. Так как функция $b \in SVL[1,\infty)$, то

$$b(2^{\nu}) \geq Cb\left(2^{2^l}\right)\left(\log 2^{1+2^l}\right)^{-\varepsilon}\left(\log 2^{1+\nu}\right)^{\varepsilon},$$

для $\nu \leq 2^l$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$. Следовательно

$$\sum_{\nu=[2^{l-1}]+1}^{2^l} b(2^{\nu}) \geq C\left(b\left(2^{2^l}\right)\left(1+2^l\right)^{\varepsilon}\right)^{\theta}\sum_{\nu=[2^{l-1}]+1}^{2^l}(\nu+1)^{-\varepsilon\theta} \geq Cb\left(2^{2^l}\right)2^l.$$

В силу того, что функция $b \in SVL[1,\infty)$, будем иметь

$$b\left(2^{2^l}\right) \leq Cb\left(2^{2^{\mu}}\right)\left(\log 2^{1+2^{\mu}}\right)^{\varepsilon}\left(\log 2^{1+l}\right)^{-\varepsilon},$$

для $l \le \mu$ и $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что

$$\sum_{l=0}^{\mu} 2^l b^\theta\left(2^{2^l}\right) \le C b^\theta\left(2^{2^\mu}\right) \sum_{l=0}^{\mu} 2^{l(1-\varepsilon\theta)} \le C b^\theta\left(2^{2^\mu}\right) 2^\mu.$$

□

Лемма 23. *Если* $0 < \theta < \infty$ *и функция* $b \in SVL[1,\infty)$, *то*

$$\sum_{\nu=0}^{s} b^\theta(2^\nu) \le C(\theta) s b^\theta(2^s), \;\; s \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Так как функция $b \in SVL[1,\infty)$, то

$$b(2^\nu) \le C b(2^s)\left(\log 2^{1+s}\right)^\varepsilon \left(\log 2^{1+\nu}\right)^{-\varepsilon},$$

для $\nu \le s$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$. Поэтому, выбирая число $\varepsilon \in (0, 1/\theta)$, получим

$$\sum_{\nu=0}^{s} b^\theta(2^\nu) \le C b^\theta(2^s)(1+s)^{\varepsilon\theta} \sum_{\nu=0}^{s} (1+\nu)^{-\varepsilon\theta} \le C b^\theta(2^s) s.$$

□

2. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 10. По свойству монотонности смешанного модуля гладкости и по лемме 21 имеем

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_{\bar{k}}^\theta(f,\bar{t})_p \prod_{j=1}^{m} \frac{b_j^\theta(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m$$
$$\le \sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \omega_{\bar{k}}^\theta\Big(f, \frac{1}{2^{\nu_1-1}}, \dots, \frac{1}{2^{\nu_m-1}}\Big)_p \int_{\frac{1}{2^{\nu_1}}}^{\frac{1}{2^{\nu_1-1}}} \dots \int_{\frac{1}{2^{\nu_m}}}^{\frac{1}{2^{\nu_m-1}}} \prod_{j=1}^{m} \frac{b_j^\theta(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m$$
$$\le C \sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^\theta(2^{\nu_j}) \omega_{\bar{k}}^\theta\Big(f, \frac{1}{2^{\nu_1-1}}, \dots, \frac{1}{2^{\nu_m-1}}\Big)_p. \quad (4)$$

В силу свойства модуля гладкости и леммы 21 нетрудно убедиться в том, что

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_{\bar{k}}^{\theta}(f,\bar{t})_p \prod_{j=1}^{m} \frac{b_j^{\theta}(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m$$
$$\geq C \sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \omega_{\bar{k}}^{\theta}\left(f, \frac{1}{2^{\nu_1-1}}, \dots, \frac{1}{2^{\nu_m-1}}\right)_p \int_{\frac{1}{2^{\nu_1}}}^{\frac{1}{2^{\nu_1-1}}} \dots \int_{\frac{1}{2^{\nu_m}}}^{\frac{1}{2^{\nu_m-1}}} \prod_{j=1}^{m} \frac{b_j^{\theta}(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m$$
$$\geq C \sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \omega_{\bar{k}}^{\theta}\left(f, \frac{1}{2^{\nu_1-1}}, \dots, \frac{1}{2^{\nu_m-1}}\right)_p, \quad (5)$$

для $j = 1, \dots, m$. Теперь пользуясь [7, лемма 6], из неравенства (5) получим

$$\sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) Y_{[2^{\nu_1-1}],\dots,[2^{\nu_m-1}]}^{\theta}(f)_p \quad \leq \quad C \int_{[0,1]^m} \omega_{\bar{k}}^{\theta}(f,\bar{t})_p \prod_{j=1}^{m} \frac{b_j^{\theta}(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m, \quad (6)$$

для $j = 1, \dots, m$.

Согласно обратной теореме теории приближения “углом” в пространстве Лебега ([7, лемма 6]) из неравенства (4) следует, что

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_{\bar{k}}^{\theta}(f,\bar{t})_p \prod_{j=1}^{m} \frac{b_j^{\theta}(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m$$
$$\leq C \sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \prod_{j=1}^{m} (2^{\nu_j}+1)^{-k_j\theta} \left(\sum_{l_m=0}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{\nu_1=0}^{2^{\nu_m}} \prod_{j=1}^{m} (l_j+1)^{k_j-1} Y_{l_1,\dots,l_m}(f)_p \right)^{\theta}, \quad (7)$$

для $j = 1, \dots, m$. В силу монотонного убывания наилучшего приближения “углом” имеем

$$\sum_{l_m=0}^{2^{\nu_m}} \dots \sum_{\nu_1=0}^{2^{\nu_m}} \prod_{j=1}^{m} (l_j+1)^{k_j-1} Y_{l_1,\dots,l_m}(f)_p$$
$$= \sum_{\mu_m=0}^{\nu_m} \dots \sum_{\mu_1=0}^{\nu_1} \sum_{l_m=[2^{\mu_m-1}]}^{2^{\mu_m}} \dots \sum_{\nu_1=[2^{\mu_1-1}]}^{2^{\nu_1}} \prod_{j=1}^{m} (l_j+1)^{k_j-1} Y_{l_1,\dots,l_m}(f)_p$$
$$\leq C \sum_{\mu_m=0}^{\nu_m} \dots \sum_{\mu_1=0}^{\nu_1} \prod_{j=1}^{m} 2^{\mu_j k_j} Y_{[2^{\mu_1-1}],\dots,[2^{\mu_m-1}]}(f)_p. \quad (8)$$

Теперь из неравенств (7) и (8) следует, что

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_{\bar{k}}^{\theta}(f,\bar{t})_p \prod_{j=1}^{m} \frac{b_j^{\theta}(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m$$
$$\leq C \sum_{\nu_m=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \prod_{j=1}^{m} (2^{\nu_j}+1)^{-k_j\theta} \left(\sum_{\mu_m=0}^{\nu_m} \dots \sum_{\mu_1=0}^{\nu_1} \prod_{j=1}^{m} 2^{\mu_j k_j} Y_{[2^{\mu_1 -1}],\dots,[2^{\mu_m -1}]}(f)_p, \right)^{\theta} \quad (9)$$

при $j = 1, \dots, m$. Так как функции $b_j \in SVL[1,\infty)$, для $j = 1, \dots, m$, то нетрудно убедиться в том, что

$$\sum_{\nu_j=\mu_j}^{\infty} b_j^{\theta}(2^{\nu_j})(2^{\nu_j}+1)^{-k_j\theta} \leq C b_j^{\theta}(2^{\mu_j}) 2^{-\mu_j k_j \theta},$$

для $j = 1, \dots, m$. Поэтому используя обобщенное неравенство Харди (см. лемму 20), из (9) получим

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_{\bar{k}}^{\theta}(f,\bar{t})_p \prod_{j=1}^{m} \frac{b_j^{\theta}(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m \leq C \sum_{\nu_m=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) Y^{\theta}_{[2^{\nu_1 -1}],\dots,[2^{\nu_m -1}]}(f)_p. \quad (10)$$

□

Доказательство теоремы 13. По теореме Литтлвуда–Пэли в пространстве Лебега для функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство (см. теорему 18)

$$Y_{[2^{\nu_1 -1}],\dots,[2^{\nu_m -1}]}(f)_p \leq \|f - U_{[2^{\nu_1 -1}],\dots,[2^{\nu_m -1}]}(f)\|_p$$
$$= \left\| \sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \sum_{\bar{n}\in\rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n},\bar{x}\rangle} \right\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p, \quad (11)$$

при $1 < p < \infty$. Теперь из неравенств (10) и (11) следует, что

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \omega_{\bar{k}}^{\theta}(f,\bar{t})_p \prod_{j=1}^{m} \frac{b_j^{\theta}(1/t_j)}{t_j} dt_1 \dots dt_m$$
$$\leq C \sum_{\nu_m=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{\nu_j}) \left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^{\theta}, \quad (12)$$

для $1 < p < \infty$.

Докажем противоположное неравенство к (12). Известно, что (см., например, [9])

$$\|f - U_{[2^{\nu_1 -1}],\dots,[2^{\nu_m -1}]}(f)\|_p \leq C Y_{[2^{\nu_1 -1}],\dots,[2^{\nu_m -1}]}(f)_p,$$

для функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, при $1 < p < \infty$. Поэтому из неравенства (6) и соотношения (11) следует, что

$$\sum_{\nu_m=1}^{\infty}\dots\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}b_j^{\theta}(2^{\nu_j})\left\|\left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}\dots\sum_{s_1=\nu_1}^{\infty}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^{\theta}$$
$$\leq C\int_{[0,1]^m}\omega_{\overline{k}}^{\theta}(f,\bar{t})_p\prod_{j=1}^{m}\frac{b_j^{\theta}(1/t_j)}{t_j}dt_1\dots dt_m, \quad (13)$$

для $1<p<\infty$. Далее учитывая, что

$$\left\|\left(\sum_{s_1=0}^{\infty}\dots\sum_{s_j=0}^{\infty}\sum_{s_{j+1}=\nu_{j+1}}^{\infty}\dots\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\leq\left\|\left(\sum_{s_1=0}^{\infty}\dots\sum_{s_m=0}^{\infty}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\asymp\|f\|_p,$$

для функции $f\in L_p(\mathbb{T}^m)$, при $1<p<\infty$, неравенство (13) можно переписать в следующем виде

$$\int_0^1\dots\int_0^1\omega_{\overline{k}}^{\theta}(f,\bar{t})_p\prod_{j=1}^{m}\frac{b_j^{\theta}(1/t_j)}{t_j}dt_1\dots dt_m$$
$$\leq C\left\{\|f\|_p^{\theta}+\sum_{\nu_m=1}^{\infty}\dots\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}b_j^{\theta}(2^{\nu_j})\left\|\left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}\dots\sum_{s_1=\nu_1}^{\infty}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^{\theta}\right\}, \quad (14)$$

для $1<p<\infty$.

Теперь из неравенств (13) и (14) по определению класса получим утверждение теоремы 13. □

Доказательство теоремы 14. Так как $b_j\in SVL[1,\infty)$, для $j=1,\dots,m$, то пользуясь леммой 22 и тем, что последовательность

$$\sigma_{\nu_1,\dots,\nu_m}=\left\|\left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}\dots\sum_{s_1=\nu_1}^{\infty}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p$$

монотонно убывает по каждому индексу ν_j, для $j=1,\dots,m$, получаем

$$\sum_{\nu_m=1}^{\infty}\dots\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}b_j^{\theta}(2^{\nu_j})\left\|\left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}\dots\sum_{s_1=\nu_1}^{\infty}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^{\theta}=\sum_{\nu_m=1}^{\infty}\dots\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}b_j^{\theta}(2^{\nu_j})\sigma_{\nu_1,\dots,\nu_m}^{\theta}$$
$$\leq C\sum_{l_m=0}^{\infty}\dots\sum_{l_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}b_j^{\theta}\left(2^{2^{l_j}}\right)2^{l_j}\sigma_{[2^{l_1-1}]+1,\dots,[2^{l_m-1}]+1}^{\theta}. \quad (15)$$

По теореме 18 Литтлвуда–Пэли и неравенству треугольника имеем

$$\sigma_{[2^{l_1-1}]+1,\dots,[2^{l_m-1}]+1} \le C\left\| \sum_{s_m=[2^{l_m-1}]+1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=[2^{l_1-1}]+1}^{\infty} \delta_{\overline{s}}(f)\right\|_p$$
$$\le C\sum_{\mu_m=l_m}^{\infty}\dots\sum_{\mu_1=l_1}^{\infty}\left\| \sum_{s_m=[2^{\mu_m-1}]+1}^{2^{\mu_m}} \dots \sum_{s_1=[2^{\mu_1-1}]+1}^{2^{\mu_1}} \delta_{\overline{s}}(f)\right\|_p .$$

Поэтому из (15) следует, что

$$\sum_{\nu_m=1}^{\infty}\dots\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{\nu_j})\left\|\left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}\dots\sum_{s_1=\nu_1}^{\infty}|\delta_{\overline{s}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^{\theta}$$
$$\le C\sum_{l_m=0}^{\infty}\dots\sum_{l_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\left(2^{2^{l_j}}\right)2^{l_j}\left(\sum_{\mu_m=l_m}^{\infty}\dots\sum_{\mu_1=l_1}^{\infty}\left\|\sum_{s_m=[2^{\mu_m-1}]+1}^{2^{\mu_m}}\dots\sum_{s_1=[2^{\mu_1-1}]+1}^{2^{\mu_1}}\delta_{\overline{s}}(f)\right\|_p\right)^{\theta}. \quad (16)$$

Так как функции $b_j \in SVL[1,\infty)$, для $j=1,\dots,m$, то по лемме 22

$$\sum_{l_j=0}^{\mu_j} b_j^{\theta}\left(2^{2^{l_j}}\right)2^{l_j} \le C b_j^{\theta}\left(2^{2^{\mu_j}}\right)2^{\mu_j},\ j=1,\dots,m.$$

Поэтому пользуясь обобщенным неравенством Харди (см. лемму 20) из формулы (15) получим

$$\sum_{\nu_m=1}^{\infty}\dots\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{\nu_j})\left\|\left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}\dots\sum_{s_1=\nu_1}^{\infty}|\delta_{\overline{s}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^{\theta}$$
$$\le C\sum_{l_m=0}^{\infty}\dots\sum_{l_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\left(2^{2^{l_j}}\right)2^{l_j}\left\|\sum_{s_m=[2^{l_m-1}]+1}^{2^{l_m}}\dots\sum_{s_1=[2^{l_1-1}]+1}^{2^{l_1}}\delta_{\overline{s}}(f)\right\|_p^{\theta}. \quad (17)$$

Теперь из неравенства (17) и теоремы 13 следует второе неравенство в теореме 14.

Для доказательства первого неравенства в теореме 14, в силу монотонного убывания последовательности $\{\sigma_{\nu_1,\dots,\nu_m}\}$ и теоремы Литтлвуда–Пэли имеем

$$\sum_{\nu_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}b_j^{\theta}(2^{\nu_j})\sigma^{\theta}_{\nu_1,\ldots,\nu_m}\geq C\sum_{l_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{l_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}b_j^{\theta}\Big(2^{2^{l_j}}\Big)2^{l_j}\sigma^{\theta}_{[2^{l_1-1}]+1,\ldots,[2^{l_m-1}]+1}$$
$$\geq C\sum_{l_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{l_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}b_j^{\theta}\Big(2^{2^{l_j}}\Big)2^{l_j}\left\|\left(\sum_{s_m=2^{l_m-1}+1}^{2^{l_m}}\cdots\sum_{s_1=2^{l_1-1}+1}^{2^{l_1}}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^{\theta}$$
$$\geq C\sum_{l_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{l_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}b_j^{\theta}\Big(2^{2^{l_j}}\Big)2^{l_j}\left\|\sum_{s_m=2^{l_m-1}+1}^{2^{l_m}}\cdots\sum_{s_1=2^{l_1-1}+1}^{2^{l_1}}\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_p^{\theta}. \quad (18)$$

Теперь из неравенства (14) и теоремы 13 следует первое неравенство в теореме 14. □

Доказательство теоремы 15. Для функции $f\in L_p(\mathbb{T}^m)$, при $1<p<\infty$ известно, что (см., например, [25])

$$\left\|\left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=\nu_1}^{\infty}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\leq C\left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=\nu_1}^{\infty}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (19)$$

где $\beta=\min\{2,p\}$.

Если $0<\theta\leq\beta$, то согласно неравенству Йенсена (см. лемму 19) из формулы (14) получим

$$\left\|\left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=\nu_1}^{\infty}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^{\theta}\leq C\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=\nu_1}^{\infty}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}.$$

Поэтому по теореме 13 имеем

$$\|f\|_{S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B}}\leq\left\{\|f\|_p+\left(\sum_{\nu_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}b_j^{\theta}(2^{\nu_j})\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=\nu_1}^{\infty}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right\}. \quad (20)$$

Далее меняя порядок суммирования и пользуясь леммой 23, из (20) получим

$$\sum_{\nu_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}b_j^{\theta}(2^{\nu_j})\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=\nu_1}^{\infty}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}$$
$$=\sum_{s_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=1}^{\infty}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}\sum_{\nu_m=1}^{s_m}\cdots\sum_{\nu_1=1}^{s_1}\prod_{j=1}^{m}b_j^{\theta}(2^{\nu_j})\leq C\sum_{s_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}b_j^{\theta}(2^{s_j})s_j\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}. \quad (21)$$

Теперь из неравенств (20) и (21) следует, что $S^{0,\overline{v}(.)}_{p,\theta}B\subset S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}\mathbf{B}$, в случае $0<\theta\leq\beta$.

Пусть $1<\beta=\min\{2,p\}<\theta\leq\infty$. Выберем число ε такое, что $0<\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\theta}<\varepsilon<\frac{1}{\beta}$.

Тогда применяя неравенство Гёльдера при $\eta = \frac{\theta}{\beta}$, $\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta'} = 1$ из (19) получим

$$\left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\overline{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^{\beta}(2^{s_j}) \big(\log 2^{1+s_j}\big)^{\varepsilon\beta} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\beta} \right.$$

$$\left. \times \prod_{j=1}^{m} b_j^{-\beta}(2^{s_j}) \big(\log 2^{1+s_j}\big)^{-\varepsilon\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq C \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{s_j}) \big(\log 2^{1+s_j}\big)^{\varepsilon\theta} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\times \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^{-\beta\eta'}(2^{s_j}) \big(\log 2^{1+s_j}\big)^{-\varepsilon\eta'} \right)^{\frac{1}{\beta\eta'}}. \quad (22)$$

Выберем число δ такое, что $0 < \delta + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\theta} < \varepsilon$. Так как функции $b_j \in SVL[1,\infty)$, то последовательность $\{b_j(2^{s_j})(\log 2^{1+s_j})^{\delta}\}$ почти возрастает. Значит $\left\{\frac{1}{b_j(2^{s_j})(\log 2^{1+s_j})^{\delta}}\right\}$ почти убывает, т. е.

$$\frac{1}{b_j(2^{s_j})(\log 2^{1+s_j})^{\delta}} \leq C \frac{1}{b_j(2^{\nu_j})(\log 2^{1+\nu_j})^{\delta}},$$

для номеров $s_j > \nu_j$, $j = 1, \dots, m$. Поэтому

$$\left(\sum_{s_j=\nu_j}^{\infty} b_j^{-\beta\eta'}(2^{s_j}) \big(\log 2^{1+s_j}\big)^{-\varepsilon\beta\eta'} \right)^{\frac{1}{\beta\eta'}} \leq C \frac{1}{b_j(2^{\nu_j})(\log 2^{1+\nu_j})^{\delta}} \left(\sum_{s_j=\nu_j}^{\infty} \frac{1}{(s_j+1)^{(\varepsilon-\delta)\beta\eta'}} \right)^{\frac{1}{\beta\eta'}}$$

$$\leq C \frac{1}{b_j(2^{\nu_j})(\log 2^{1+\nu_j})^{\delta}} \frac{1}{(\nu_j+1)^{\varepsilon-\delta-\frac{1}{\beta\eta'}}} = C \frac{1}{b_j(2^{\nu_j})(\nu_j+1)^{\varepsilon-\frac{1}{\beta\eta'}}},$$

для $j = 1, \dots, m$. Из (22) и отсюда получим

$$\left\| \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} |\delta_{\overline{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{b_j(2^{\nu_j})(\nu_j+1)^{\varepsilon-\frac{1}{\beta\eta'}}}$$

$$\times \left(\sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{s_j})(1+s_j)^{\varepsilon\theta} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теперь отсюда и из (20) следует, что

$$\|f\|_{S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B}} \leq \left\{ \|f\|_p + \left(\sum_{\nu_m=1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} (\nu_j+1)^{\left(\frac{1}{\beta\eta'}-\varepsilon\right)\theta} \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \sum_{s_m=\nu_m}^{\infty} \dots \sum_{s_1=\nu_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{s_j})(1+s_j)^{\varepsilon\theta} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}, \quad (23)$$

в случае $1 < \beta = \min\{2, p\} < \theta \leq \infty$.

Теперь меняя порядок суммирования в правой части формулы (23), выбирая число $\varepsilon \in (0, \frac{1}{\beta})$ и учитывая, что

$$\sum_{\nu=1}^{s} \nu^{\left(\frac{1}{\beta\eta'}-\varepsilon\right)\theta} \le C s^{\frac{\theta}{\beta}-\varepsilon\theta},$$

из неравенства (23) получим

$$\|f\|_{S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B}} \le C\Bigg\{\|f\|_p + \Bigg(\sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{s_j})(1+s_j)^{\varepsilon\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\theta}$$
$$\times\sum_{\nu_m=1}^{s_m}\dots\sum_{\nu_1=1}^{s_1}\prod_{j=1}^{m}(\nu_j+1)^{\left(\frac{1}{\beta\eta'}-\varepsilon\right)\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}\Bigg\}$$
$$\le C\Bigg\{\|f\|_p + \Bigg(\sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{s_j}) s_j^{\frac{\theta}{\beta}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}\Bigg\}, \quad (24)$$

в случае $1 < \beta = \min\{2,p\} < \theta \le \infty$. Следовательно $S^{0,\overline{v}}_{p,\theta}B \subset S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B}$, в случае $1 < \beta = \min\{2,p\} < \theta \le \infty$.

Докажем включение $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B} \subset S^{0,\overline{u}}_{p,\theta}B$. Так как по предположению ряды (условие (1))

$$\sum_{s_j=0}^{\infty} b_j^{\theta}(2^{s_j}) = +\infty,\ j=1,\dots,m$$

то ряды

$$\sum_{s_j=0}^{\infty} b_j^{\theta}(2^{s_j})(s_j+1)^{\frac{\theta}{\gamma}},\ j=1,\dots,m$$

также расходятся, т. е. пространство $S^{0,\overline{u}}_{p,\theta}B \subset L_p(\mathbb{T}^m)$ и включение строгое.

Пусть $f \in S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B}$. Тогда согласно теореме 14 имеем

$$\sum_{\nu_m=0}^{\infty}\dots\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\left(2^{2^{\nu_j}}\right)2^{\nu_j}\left\|\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\dots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\delta_{\overline{s}}(f)\right\|_p^{\theta} < \infty. \quad (25)$$

По известной теореме Литтлвуда–Пэли (см. теорему 18) для функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, при $1 < p < \infty$ справедливо неравенство (см., например, [25])

$$\left\|\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\dots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\delta_{\overline{s}}(f)\right\|_p \ge C\left(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\dots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (26)$$

где $\gamma = \max\{2, p\}$. Поэтому

$$\sum_{\nu_m=0}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)2^{\nu_j}\Bigg\|\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\cdots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\delta_{\overline{s}}(f)\Bigg\|_p^{\theta}$$
$$\geq C\sum_{\nu_m=0}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)2^{\nu_j}\Bigg(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\cdots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\gamma}\Bigg)^{\frac{\theta}{\gamma}}. \quad (27)$$

Пусть $0 < \theta < \gamma = \max\{2, p\}$. Тогда $\max\{2, p, \theta\} = \gamma$. Применяя неравенство Гёльдера при $\eta = \frac{\gamma}{\theta}$, $\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta'} = 1$ получим

$$\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\cdots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{s_j})s_j^{\frac{\theta}{\gamma}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\theta}$$
$$\leq C\Bigg(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\cdots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\gamma}\Bigg)^{\frac{\theta}{\gamma}}\Bigg(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\cdots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta\eta'}(2^{s_j})s_j^{\frac{\theta}{\gamma}\eta'}\Bigg)^{\frac{1}{\eta'}}. \quad (28)$$

Так как функции $b_j \in SVL[1, \infty)$, то

$$\sum_{s_j=[2^{\nu_j-1}]+1}^{2^{\nu_j}} b_j^{\theta\eta'}(2^{s_j})s_j^{\frac{\theta}{\gamma}\eta'} \leq C\left(b_j\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)\Big(\log 2^{1+2^{\nu_j}}\Big)^{\varepsilon}\right)^{\theta\eta'}\sum_{s_j=[2^{\nu_j-1}]+1}^{2^{\nu_j}} s_j^{\frac{\theta}{\gamma}\eta'}\Big(\log 2^{1+s_j}\Big)^{-\varepsilon\theta\eta'}$$
$$\leq C\left(b_j\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)(1+2^{\nu_j})^{\varepsilon}\right)^{\theta\eta'}\sum_{s_j=[2^{\nu_j-1}]+1}^{2^{\nu_j}}(s_j+1)^{\left(\frac{1}{\gamma}-\varepsilon\right)\theta\eta'}$$
$$\leq C\left(b_j\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)(1+2^{\nu_j})^{\varepsilon}\right)^{\theta\eta'}2^{\nu_j\left(\left(\frac{1}{\gamma}-\varepsilon\right)\theta\eta'+1\right)} \leq Cb_j^{\theta\eta'}\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)2^{\nu_j\left(\frac{\theta\eta'}{\gamma}+1\right)},$$

для $j = 1, \ldots, m$. Поэтому из (28) получим

$$\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\cdots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{s_j})s_j^{\frac{\theta}{\gamma}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\theta}$$
$$\leq C\Bigg(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\cdots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\gamma}\Bigg)^{\frac{\theta}{\gamma}}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)2^{\nu_j\left(\frac{\theta\eta'}{\gamma}+1\right)\frac{1}{\eta'}}$$
$$= C\Bigg(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\cdots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\gamma}\Bigg)^{\frac{\theta}{\gamma}}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)2^{\nu_j}.$$

Следовательно из (27) и (28) следует, что

$$\sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{s_j}) s_j^{\frac{\theta}{\beta}} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\theta}$$
$$\leq C\sum_{\nu_m=0}^{\infty}\dots\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)2^{\nu_j}\left(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\dots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\gamma}\right)^{\frac{\theta}{\gamma}}$$
$$\leq C\sum_{\nu_m=0}^{\infty}\dots\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)2^{\nu_j}\left\|\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\dots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\delta_{\overline{s}}(f)\right\|_p^{\theta},$$

для функции $f\in S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(.)}\mathbf{B}$, в случае $0<\theta<\gamma=\max\{2,p\}$. Значит в силу (25) будем иметь $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(.)}\mathbf{B}\subset S_{p,\theta}^{0,\overline{u}(.)}B$, в случае $0<\theta<\gamma=\max\{2,p\}$.

Пусть $1<\gamma=\max\{2,p\}\leq\theta<\infty$. Тогда $\max\{2,p,\theta\}=\theta$, т. е. $\theta/\max\{2,p,\theta\}=1$. Тогда согласно неравенству Йенсена (см. лемму 19), условия $b_j\in SVL[1,\infty)$, для $j=1,\dots,m$ и неравенству (26) имеем

$$\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\dots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{s_j}) s_j^{\frac{\theta}{\gamma}} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\theta}$$
$$\leq C\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)2^{\nu_j}\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\dots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\theta}$$
$$\leq C\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)2^{\nu_j}\left(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\dots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\gamma}\right)^{\frac{\theta}{\gamma}}$$
$$\leq C\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)2^{\nu_j}\left\|\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\dots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\delta_{\overline{s}}(f)\right\|_p^{\theta}. \quad (29)$$

Теперь из неравенств (26) и (29) следует, что

$$\sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{s_j}) s_j^{\frac{\theta}{\max\{2,p,\theta\}}} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p^{\theta}$$
$$\leq C\sum_{\nu_m=0}^{\infty}\dots\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big)2^{\nu_j}\left\|\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}}\dots\sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}}\delta_{\overline{s}}(f)\right\|_p^{\theta},$$

для функции $f\in S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(.)}\mathbf{B}$, в случае $1<\gamma=\max\{2,p\}\leq\theta<\infty$. Следовательно, в силу (25) будем иметь $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(.)}\mathbf{B}\subset S_{p,\theta}^{0,\overline{u}(.)}B$, в случае $1<\gamma=\max\{2,p\}\leq\theta<\infty$, где $u_j=b_j+\frac{1}{\theta}$, для $j=1,\dots,m$.

Пусть $\theta=\infty$. Тогда $\max\{2,p,\theta\}=\infty$. Значит $1/\max\{2,p,\theta\}=0$. Следовательно, учитывая, что $b_j \in SVL[1,\infty)$, для $j=1,\ldots,m$ нетрудно убедиться в том, что

$$\prod_{j=1}^{m} b_j(2^{s_j}) s_j^{\overline{\frac{1}{\max\{2,p,\theta\}}}} = \prod_{j=1}^{m} b_j(2^{s_j}) \leq C \prod_{j=1}^{m} b_j\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big),$$

для $s_j = [2^{\nu_j - 1}]+1,\ldots,[2^{\nu_j}]$, $j=1,\ldots,m$. Поэтому

$$\prod_{j=1}^{m} b_j(2^{s_j}) s_j^{\overline{\frac{1}{\max\{2,p,\theta\}}}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p = \prod_{j=1}^{m} b_j(2^{s_j}) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p \leq C \prod_{j=1}^{m} b_j(2^{2^{\nu_j}}) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p$$
$$\leq C \prod_{j=1}^{m} b_j\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big) \left(\sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \cdots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$
$$\leq C \prod_{j=1}^{m} b_j\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big) \left\| \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \cdots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p,$$

для $s_j = [2^{\nu_j - 1}]+1,\ldots,[2^{\nu_j}]$, $j=1,\ldots,m$. Следовательно,

$$\sup_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^{m} b_j(2^{s_j}) s_j^{\overline{\frac{1}{\max\{2,p,\theta\}}}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p \leq C \sup_{\bar{\nu}\in\mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^{m} b_j\Big(2^{2^{\nu_j}}\Big) \left\| \sum_{s_m=[2^{\nu_m-1}]+1}^{2^{\nu_m}} \cdots \sum_{s_1=[2^{\nu_1-1}]+1}^{2^{\nu_1}} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_p.$$

Значит $S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(.)}\mathbf{B} \subset S_{p,\theta}^{0,\bar{u}(.)}B$, в случае $1<\gamma=\max\{2,p,\theta\}$, $\theta=\infty$. □

Доказательство теоремы 17. Пусть $f \in S_{p,\theta}^{0,\bar{b}(.)}B$. Если $1<\tau<\theta<\infty$, применяя неравенство Гёльдера при $\eta = \frac{\theta}{\tau}$, $\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta'}=1$ получим

$$\left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{1-\frac{\tau}{p}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\tau} \right\}^{\frac{1}{\tau}} \leq \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^{\theta}(2^{s_j}) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}$$
$$\times \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} b_j^{-\tau\eta'}(2^{s_j}) s_j^{\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{p}\right)\tau\eta'} \right\}^{\frac{1}{\tau\eta'}}. \quad (30)$$

Согласно условию (2) из неравенства (30) следует, что

$$\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{1-\frac{\tau}{p}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\tau} < \infty.$$

В [21] доказано, что

$$\|f\|_{p,\tau}^{*} << \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{1-\frac{\tau}{p}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\tau} \right\}^{\frac{1}{\tau}}. \quad (31)$$

Следовательно $S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}B \subset L^*_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1<\tau<\theta<\infty$.

Если $\theta=\infty$, то из формулы (31) получим

$$\|f\|^*_{p,\tau} << \left\{\sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m} b_j^{-\tau}(2^{s_j}) s_j^{\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{p}\right)\tau}\right\}^{\frac{1}{\tau}} \sup_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+}\prod_{j=1}^{m} b_j(2^{s_j})\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p. \qquad (32)$$

В силу условия (2) из неравенства (32) следует, что $S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}B \subset L^*_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, в случае $\theta=\infty$.

Если $1<\theta\le\tau<\infty$, то применяя лемму 19 из формулы (31) согласно условию (3) получим, что $S^{0,\bar{b}(.)}_{p,\theta}B \subset L^*_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. □

Автор благодарен рецензентам за замечания к тексту статьи и С.Ю. Тихонову за обсуждение результатов.

Список литературы

[1] С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.

[2] A.P. Blozinski, *Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms*, Trans. Amer. Math. Soc. **263** (1), 149–167 (1981).
DOI: https://doi.org/10.2307/1998649

[3] V.I. Kolyada, *On embedding theorems*, In Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Proceedings of the Spring School held in Prague, Vol. 8, 35–94 (2007).
URL: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/702492

[4] Е.Д. Нурсултанов, *О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p-пространств*, Изв. РАН. Сер. матем. **64** (1), 95–122 (2000).
DOI: https://doi.org/10.4213/im275

[5] С.М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.

[6] П.И. Лизоркин, С.М. Никольский, *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения*, Тр. МИАН СССР **187**, 143–161 (1989).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tm1807

[7] М.К. Потапов, *Изучение некоторых классов функций при помощи приближения "углом"*, Тр. МИАН СССР,**117**, 256–291 (1972).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tm3100

[8] М.К. Потапов, *Теоремы вложения смешанной метрике*, Тр. МИАН СССР **156**, 143–156 (1980).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tm2415

[9] С.М. Никольский, *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных*, Тр. МИАН СССР **38**, 244–278 (1951).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tm1119

[10] О.В. Бесов, *Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения*, Тр. МИАН СССР **60**, 42–81 (1961).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tm1480

[11] F. Cobos, O. Dominguez, *On Besov spaces of logarithmic smoothness and Lipschitz spaces*, J. Math. Anal. Appl. **425** (1), 71–84 (2015).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.12.034

[12] F. Cobos, O. Dominguez, H. Triebel, *Characterizations of logarithmic Besov spaces in terms of differences, Fourier-analytical decompositions, wavelets and semi-groups*, J. Funct. Anal. **270** (12), 4386–4425 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.03.007

[13] O. Dominguez, S. Tikhonov, *Function spaces of logarithmic smoothness: embedding and characterizations*, Preprint, arXiv:1811.06399 [math.FA], 2018.
URL: https://arxiv.org/abs/1811.06399

[14] S. Artamonov, K.V. Runovskii, H.-J. Schmeisser, *Besov spaces with generalized smoothness and summability of multiple Fourier series*, J. Approx. Theory **284**, art. 105822 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jat.2022.105822

[15] С.М. Никольский, *Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гёльдера*, Сиб. матем. журн. **4** (6), 1342–1364 (1963).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/smj4971

[16] Т.И. Аманов, *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной*, Наука, Алма-Ата, 1976.

[17] Н.К. Бари, С.Б. Стечкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. ММО **5**, 483–522 (1956).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/mmo56

[18] D.E. Edmunds, W.D. Evans, *Hardy operators, function spaces and embedding*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-07731-3

[19] Н. Темиргалиев, *О вложении классов H_p^ω в пространства Лоренца*, Сиб. матем. журн. **24** (2), 160–172 (1983).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/smj6703

[20] Г. Акишев, *Теоремы вложения пространств со смешанной логарифмической гладкостью*, Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан: Тезисы докладов, 60–62 (2023).

[21] Г. Акишев, *О порядках приближения функций многих переменных в пространстве Лоренца*, Тр. ИММ УрО РАН **22** (4), 13–28 (2016).
DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-4-13-28

[22] H. Johansson, *Embedding of H_p^ω in some Lorentz spaces*, Research Reports. Univ. Umeå, Report No. 6 (1975).

[23] G. Akishev, *Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space*, Preprint: arXiv: 2105.14810v1 (2021).
URL: https://arxiv.org/abs/2105.14810

[24] M.K. Potapov, B.V. Simonov, S.Yu. Tikhonov, *Mixed moduli of smoothness in L_p, $1 < p < \infty$: a survey*, Surveys in Approximation Theory **8**, 1–57 (2013).
URL: https://www.emis.de/journals/SAT/papers/18/index.html

[25] В.Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. МИАН СССР **178**, 3–113 (1986).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tm2107

Габдолла Акишев
Казахстанский филиал
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова,
ул. Кажымукана, д. 11, г. Астана, 100001, Казахстан,

Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина, д. 125, г. Алматы, 050010, Казахстан,
e-mail: akishev_g@mail.ru

VOLUME 2, ISSUE 2 UDC 517.51
PP. 4–29 (2024) MSC 41A10, 42A05

On a function space with mixed generalized logarithmic smoothness

G. Akishev

Abstract. We consider the anisotropic Lorentz space of 2π-periodic functions of m variables and the Nikol'skii–Besov space of functions with mixed generalized logarithmic smoothness. Embedding theorems are proved for spaces of functions with mixed generalized logarithmic smoothness.

Keywords: Lorentz space, Nikol'ski–Besov class, generalized smoothness.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.4-29

References

[1] S.G. Krein, Yu.I. Petunin, E.M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Ser. Translat. Math. Monographs **54**, AMS, Providence, R.I., 1982.

[2] A.P. Blozinski, *Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms*, Trans. Amer. Math. Soc. **263** (1), 149–167 (1981).
DOI: https://doi.org/10.2307/1998649

[3] V.I. Kolyada, *On embedding theorems*, In Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Proceedings of the Spring School held in Prague, Vol. 8, 35–94 (2007).
URL: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/702492

[4] E.D. Nursultanov, *On the coefcients of multiple Fourier series in L_p-spaces*, Izv. Math. **64** (1), 93–120 (2000).
DOI: https://doi.org/10.1070/im2000v064n01ABEH000275

[5] S.M. Nikol'skii, *Approximation of functions of several variables and embedding theorems*, Nauka, Moscow, 1977 [in Russian].

[6] P.I. Lizorkin, S. M. Nikol'skii, *Functional spaces of mixed smoothness from decompositional point of view*, Proc. Steklov Inst. Math. **187**, 163–184 (1990).

[7] M.K. Potapov, *The study of certain classes of functions by means of "angular" approximation*, Proc. Steklov Inst. Math. **117**, 301–342 (1972).

Acknowledgements. This work was supported by a grant the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (project AP19677486).

Received: 26 March 2024. Accepted: 02 July 2024. Published: 16 July 2024.

[8] M.K. Potapov, *Imbedding theorems in a mixed metric*, Proc. Steklov Inst. Math. **156**, 155–171 (1983).

[9] S.M. Nikol'skii, *Inequalities for entire functions of finite degree and their application in the theory of differentiable functions of several variables*, Tr. Mat. Inst. Steklov **38**, 244–278 (1951) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tm1119

[10] O.V. Besov, *Investigation of a class of function spaces in connection with imbedding and extension theorems*, Tr. Mat. Inst. Steklov **60**, 42–81 (1961) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tm1480

[11] F. Cobos, O. Dominguez, *On Besov spaces of logarithmic smoothness and Lipschitz spaces*, J. Math. Anal. Appl. **425** (1), 71–84 (2015).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.12.034

[12] F. Cobos, O. Dominguez, H. Triebel, *Characterizations of logarithmic Besov spaces in terms of differences, Fourier-analytical decompositions, wavelets and semi-groups*, J. Funct. Anal. **270** (12), 4386–4425 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.03.007

[13] O. Dominguez, S. Tikhonov, *Function spaces of logarithmic smoothness: embedding and characterizations*, Preprint, arXiv:1811.06399 [math.FA], 2018.
URL: https://arxiv.org/abs/1811.06399

[14] S. Artamonov, K.V. Runovskii, H.-J. Schmeisser, *Besov spaces with generalized smoothness and summability of multiple Fourier series*, J. Approx. Theory **284**, art. 105822 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jat.2022.105822

[15] S. M. Nikol'skii, *Functions with dominating mixed derivatives satisfying multiple Hölder conditions*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **102**, 27–51 (1973).

[16] T.I. Amanov, *Spaces of diferentiable functions with dominating mixed derivatives*, Alma-Ata, Nauka, 1976.

[17] N.K. Bary, S.B. Stechkin, *Best approximations and differential properties of two conjugate functions*, Tr. Mosk. Mat. Obs. **5**, 483–522 (1956) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/rus/mmo56

[18] D.E. Edmunds, W.D. Evans, *Hardy operators, function spaces and embedding*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-07731-3

[19] N. Temirgaliev, *Embeddings of the classes H_p^ω in Lorentz spaces*, Sib. Math. J. **24** (2), 287–298 (1983).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF00968743

[20] G. Akishev, *Embedding theorems for spaces with mixed logarithmic smoothness*, Traditional International April Mathematical Conference In Honor of the Kazakhstan Day of science

workers, 60–62 (2023).

[21] G. Akishev, *On approximation orders of functions of several variables in the Lorentz space*, Proc. Steklov Inst. Math. **300** (Suppl 1), 9–24 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543818020037

[22] H. Johansson, *Embedding of H_p^ω in some Lorentz spaces*, Research Reports. Univ. Umeå, Report No. 6 (1975).

[23] G. Akishev, *Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space*, Preprint: arXiv: 2105.14810v1 (2021).
URL: https://arxiv.org/abs/2105.14810

[24] M.K. Potapov, B.V. Simonov, S.Yu. Tikhonov, *Mixed moduli of smoothness in L_p, $1 < p < \infty$: a survey*, Surveys in Approximation Theory **8**, 1–57 (2013).
URL: https://www.emis.de/journals/SAT/papers/18/index.html

[25] V.N. Temlyakov, *Approximation of functions with bounded mixed derivative*, Proc. Steklov Inst. Math. **178**, 1–121 (1989).

Gabdolla Akishev
Lomonosov Moscow University, Kazakhstan Branch,
11 Kazhymukan str., Astana 100001, Kazakhstan,
Institute of mathematics and mathematical modeling,
125 Pushkin str., Almaty 050010, Kazakhstan,
e-mail: akishev_g@mail.ru

Том 2, Выпуск 2
Стр. 30–46 (2024)

УДК 517.982.256
MSC 41A65

Монотонно линейно связные множества в геометрической теории приближения и ее приложениях

А.Р. Алимов, И.Г. Царьков

Аннотация. В последнее время активно развивается направление геометрической теории приближений, связанное с понятием монотонных множеств. Особенно полезным в различных приложениях является понятие монотонно линейно связного множества. Цель настоящей работы – дать краткий, но емкий обзор по этой проблематике, а также показать взаимосвязь с ключевыми свойствами приближающих множеств. К таким свойствам относятся характеристики элементов наилучшего приближения, а также свойства единственности и устойчивости.

Ключевые слова: монотонно линейно связное множество, чебышевское множество, солнце, наилучшее приближение, устойчивость наилучшего приближения, ассоциированная норма.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.30-46

Введение

Одним из важных направлений теории приближений является геометрическая теория приближений, проблематика которой и классические результаты подробно изложены в монографиях [1, 2] и обзорах [3, 4]. В настоящей работе мы освещаем современные результаты геометрической теории приближения, связанные с монотонной линейной связностью множеств и ее приложениями. Монотонная линейная связность является ослаблением свойства выпуклости. Понятие монотонной линейной связности находит применение в различных областях математики и ее приложений. В частности, теорему типа Куна–Таккера удается перенести со случая выпуклого множества на случай монотонно линейно связных множеств.

Ниже $X = (X, \|\cdot\|)$ – действительное линейное нормированное пространство. Далее:

- $B(x,r) = \{y \in X \mid \|x-y\| \leqslant r\}$ – замкнутый шар с центром x и радиусом r;
- $\mathring{B}(x,r) = \{y \in X \mid \|x-y\| < r\}$ – открытый шар с центром x и радиусом r;
- $S(x,r) = \{y \in X \mid \|x-y\| = r\}$ – сфера с центром x и радиусом r.

Благодарности. Работа выполнена в МГУ имени М. В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00129).

Поступила: 08.04.2024. Принята: 04.06.2024. Опубликована: 16.07.2024.

В частном случае $B := B(0,1)$, $S = S(0,1)$ – единичные шар и сфера.

Величиной наилучшего приближения или *расстоянием* от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M \subset X$ называется величина $\rho(x,M) := \inf_{y\in M} \|x-y\|$. Множество всех ближайших точек (элементов наилучшего приближения) в M для заданного x обозначается $P_M x$, т. е.

$$P_M x := \bigl\{y \in M \mid \rho(x,M) = \|x-y\|\bigr\}.$$

Оператор $x \mapsto P_M x$ называется *оператором метрической проекции.*

1. Монотонно линейно связные и m-связные множества

1.1. Определение (BM)-пространств. При изучении связности солнц в конечномерных пространствах А.Л. Браун [5] ввел класс (BM) линейных нормированных пространств (см. также [6, § 3.1]). В таких пространствах оказалось возможным установить ряд нетривиальных результатов о геометрическо-топологических свойствах солнц (см. § 2.1 ниже).

Определение 1. Пространство X называется (BM)-*пространством*, если

$$B(0,\|x\|) \cap \bigl(\mathrm{m}(x,y) \setminus \{x\}\bigr) \neq \varnothing \tag{1}$$

при условии, что $[x, x-y] \cap \mathring{B}(0,\|x\|) = \varnothing$, $x \neq 0$.

Здесь и далее $\mathrm{m}(M)$ – пересечение *всех* замкнутых шаров, содержащих множество M, и, в частности, $\mathrm{m}(x,y)$ – пересечение всех замкнутых шаров, содержащих точки x, y (*оболочка Банаха–Мазура* точек x и y; см. [1, § 7.7.1]).

Класс (BM)-пространств содержит в себе все гладкие пространства, все двумерные пространства с полигональным единичным шаром, пространства ℓ^∞_n, c_0, c, ℓ^∞, все замкнутые идеалы пространства $C(Q)$, все подрешетки $C(Q)$ с единицей (см. [6, § 3.1.1]). Строго выпуклое пространство лежит в классе (BM) тогда и только тогда, когда оно гладкое [5]. Пространства ℓ^1, ℓ^1_n, $n \geqslant 3$, не принадлежат классу (BM).

В пространстве $C(Q)$ (Q – компактное хаусдорфово пространство) структура оболочки Банаха–Мазура $\mathrm{m}(x,y)$ вполне ясна:

$$\mathrm{m}(x,y) = \bigl\{z \bigm| z(q) \in [x(q), y(q)], \quad q \in Q\bigr\} =: [\![x,y]\!]. \tag{2}$$

Аналогичное представление также верно и в пространстве $C_0(Q)$.

1.2. Ассоциированная норма. Теорема Рейнуотера–Симонса о слабой сходимости для ассоциированной нормы. Ниже $\operatorname{ext} S$ – множество экстремальных (крайних) точек единичной сферы S, $\operatorname{ext} S^*$ – множество экстремальных (крайних) точек сопряженной единичной сферы S^*.

В дальнейшем нам потребуется понятие ассоциированной нормы (см. [1, § 7.7], [6, § 3.2.1]. Напомним определения двух важных классов пространств.

Класс (MeI) пространств X определяется[1] следующим образом:

$$\mathrm{m}(x,y) = [\![x,y]\!] \quad \text{для всех } x,y\in X. \tag{MeI}$$

Здесь

$$[\![x,y]\!] := \{z\in X \mid \min\{\varphi(x),\varphi(y)\}\leqslant\varphi(z)\leqslant\max\{\varphi(x),\varphi(y)\}\ \ \forall\,\varphi\in\operatorname{ext}S^*\} \tag{3}$$

– *сегмент* $[\![x,y]\!]$ (см. [1, § 7.7.2]).

В условии (MeI) включение

$$\mathrm{m}(x,y)\supset[\![x,y]\!] \tag{4}$$

имеет место в любом X; равенство $\mathrm{m}(x,y)=[\![x,y]\!]$ (см. (MeI)) выполнено, в частности, в любом сепарабельном пространстве (см. [6, § 3.2.1]).

Также рассмотрим класс[2] пространств (Ex-w^*s), введенный Франкетти и Роверси:

$$\operatorname{ext}S^* \text{ является } w^*\text{-сепарабельным.} \tag{Ex-w^*s}$$

В определении класса (Ex-w^*s) мы всегда предполагаем, что

$$F=(f_i)_{i\in I}\subset\operatorname{ext}S^* \text{ является } w^*\text{-плотным в } \operatorname{ext}S^*,\quad \operatorname{card}I\leqslant\aleph_0,\quad F=-F.$$

Любое пространство из класса (Ex-w^*s) имеет w^*-сепарабельный единичный шар. Далее, хорошо известно, что если X – сепарабельное линейное нормированное пространство, то w^*-топология единичного шара B^* сопряженного пространства X^* метризуема. Отсюда следует, что *любое сепарабельное пространство лежит в классе* (Ex-w^*s). Класс (Ex-w^*s) также содержит *несепарабельное* пространство ℓ^∞.

Определение 2. Пусть пространство X принадлежит классу (Ex-w^*s), а $F=(f_i)_{i\in I}$ – семейство функционалов из определения класса (Ex-w^*s); пусть также $(\alpha_i)\subset\mathbb{R}$, $\alpha_i>0$, $i\in I$, $\operatorname{card}I\leqslant\aleph_0$, и $\sum\alpha_i<\infty$. Для $x\in X$ положим

$$|x| = \sum_{i\in I}\alpha_i|f_i(x)|. \tag{5}$$

Тогда $|\cdot|$ – норма на X, которую, следуя А.Л. Брауну [5], мы называем *ассоциированной* (*по Брауну*). Ясно, что $|x|\leqslant\|x\|\sum\alpha_i$.

Отметим ряд свойств ассоциированной нормы (см. [1,6]).

[1] Сокращение (MeI) происходит от английского “The hull $\mathrm{m}(x,y)$ equals the interval $[\![x,y]\!]$ for all x, y”.

[2] Сокращение (Ex-w^*s) происходит от немецкого “Die Extrempunktmenge der konjugierten Einheitskugel ist w^*-separabel”.

Предложение 3. *Пусть* $X \in (\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$ *и* $F = (f_i)_{i\in I}$ *– соответствующее семейство функционалов из определения класса* $(\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$. *Тогда:*

a) $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x \ \Rightarrow\ f_i(x_n) \to f_i(x)$ *для любого* $f_i \in F$;

b) (x_n) *–* $|\cdot|$*-последовательность Коши* $\Leftrightarrow$ $(f_i(x_n))$ *сходится в* $\mathbb{R}$ *для любого* $i \in I$;

c) $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x \ \Rightarrow\ \|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$;

d) *любой замкнутый шар* $|\cdot|$*-замкнут; как следствие,* $\mathrm{m}(M)$ $|\cdot|$*-замкнуто для любого ограниченного множества* $M \subset X$;

e) $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x \ \Rightarrow\ x_n \xrightarrow{w} x$;

f) *если* F $\|\cdot\|$*-плотно в* $\operatorname{ext} S^*$, *то* $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x \ \Leftrightarrow\ x_n \xrightarrow{w} x$ *(это условие выполнено, например, для пространства* c_0*)*;

g) *если* $A \subset X$ $\|\cdot\|$*-компактно, то* ε*-расширение* $A_\varepsilon := \{x \in X \mid \rho(x, A) \leqslant \varepsilon\}$ *множества* A $|\cdot|$*-замкнуто в* X.

Нам потребуется обобщение классической теоремы Рейнуотера–Симонса (см., например, [7, § 3.11.8.5]) на случай сходимости относительно ассоциированной нормы $|\cdot|$ на пространствах класса $(\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$ (в частности, на сепарабельных пространствах). Такое обобщение позволяет при исследовании монотонной связности солнц и чебышевских множеств[3] применить аппарат метрической выпуклости для ассоциированной нормы $|\cdot|$). Теорема Рейнуотера–Симонса утверждает, что ограниченная последовательность (x_n) в банаховом пространстве X слабо сходится к $x \in X$, если и только если последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x)$ для каждого функционала f из произвольной фиксированной границы Джеймса пространства X (например, для всех $f \in \operatorname{ext} S^*$). Таким образом, хотя в общем случае слабая сходимость не метризуема, имеется норма на $X \in (\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$, относительно которой сходимость *последовательностей* равносильна слабой сходимости. Здесь напомним (см., например, [7, § 3.11.8]), что подмножество A единичной сферы S^* сопряженного пространства X^* называется *границей* (Джеймса) для пространства X, если для каждого $x \in X$ найдется $f \in A$ такой, что $f(x) = \|x\|$.

Отметим следующее обобщение классической теоремы Рейнуотера–Симонса (см. [8]). Пусть $X \in (\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$ – банахово пространство, $F := (f_i)_{i\in I} \subset \operatorname{ext} S^*$ – набор функционалов из определения класса $(\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$. Пусть (x_n) – $|\cdot|$-ограниченная последовательность в X. Рассмотрим следующие условия:

a) $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$;

b) $f_i(x_n) \to f_i(x)$ для любого $i \in I$;

c) $x_n \xrightarrow{w} x$.

[3]Множество M называется *чебышевским*, если оно есть множество существования и единственности, т. е. множество $P_M x$ одноточечно для любого $x \in X$. Множество M называется *солнцем*, если любая точка $x \notin M$ является точкой солнечности, что по определению означает, что существует точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ (точка светимости) такая, что $y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ (геометрически это означает, что из точки y исходит "солнечный" луч, проходящий через x, для каждой точки которого точка y является ближайшей из M). Множество M называется строгим солнцем, если для любого $x \notin M$ $P_M x \neq \varnothing$ и любая точка $y \in P_M x$ является точкой светимости.

Тогда условия a) и b) эквивалентны, любое из них обеспечивается выполнением условия c). При этом, если X^* сепарабельно, то все три условия эквивалентны.

Отметим, что $\|\cdot\|$-ограниченная последовательность $|\cdot|$-ограничена, а также, что $(X, |\cdot|)$ является пространством Шура, т. е. в нем слабо сходящиеся последовательности сходятся по норме.

1.3. Монотонно линейно связные множества.

Определение 4. Замкнутое множество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным*, если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\,\cdot\,) \subset M$; здесь непрерывная кривая $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, в линейном нормированном пространстве X называется *монотонной*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$ (по поводу дальнейших деталей см. [1, § 7.7.3]).

Определение 5. Множество $M \subset X$ называется m-*связным* (связным по Менгеру), если $\mathrm{m}(x, y) \cap M \neq \{x, y\}$ для любых различных точек $x, y \in M$.

Любое выпуклое множество монотонно линейно связно; пересечение монотонно линейно связного множества и промежутка[4] монотонно линейно связно. Монотонно линейно связное множество всегда B-линейно связно (т. е. его пересечение с любым замкнутым – а следовательно, и с открытым – шаром линейно связно).

Замечание 6. Используя (4), нетрудно проверить, что *монотонно линейно связное множество необходимо* m-*связно.* Однако (в бесконечномерном случае) *обратное утверждение может нарушаться даже для замкнутых множеств* – соответствующий пример в пространстве $C[0,1]$ предложен К. Франкетти и С. Роверси: пусть $M = M_1 \cup M_{-1}$, где $M_\sigma = \{x \in C[0,1] \mid x(0) = \sigma\}$, $\sigma = \pm 1$. Тогда M состоит из двух выпуклых непересекающихся компонент, однако множество M m-связно.

Отметим, что в c_0 и в произвольном конечномерном пространстве эти свойства эквивалентны для замкнутых множеств (см. [6, § 3.2.2]). Также отметим, что в конечномерных пространствах X со свойством $\overline{\operatorname{ext} S^*} = S^*$ класс монотонно линейно связных (m-связных) замкнутых множеств совпадает с классом замкнутых выпуклых множеств – в таких пространствах X всегда имеет место равенство $\mathrm{m}(x, y) = [x, y]$ для любых $x, y \in X$).

Далее, если Q обозначает некоторое свойство (например, “связность”), мы будем говорить, что замкнутое множество M обладает свойством:

- P-Q, если при всех $x \in X$ множество $P_M x$ непусто и обладает свойством Q;
- B-Q, если $M \cap B(x, r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$;
- $\mathring{B}$-Q, если $M \cap \mathring{B}(x, r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$.

К примеру, замкнутое подмножество конечномерного пространства P-непусто, т. е. является множеством существования.

[4] *Промежуток* – это множество M со свойством $[\![x, y]\!] \subset M$ при условии, что $x, y \in M$ (см. (3)).

Приведем основной результат о связи монотонно линейно связных и m-связных множеств (см. [9]). В теореме 7 *экстремальная ограниченная клеточноподобность* понимается следующим образом: если пересечение множества M с брусом[5] ограничено, то оно клеточноподобно (см. [1, § 10.4.2]).

Теорема 7. *Пусть X – банахово пространство из класса* $(\mathrm{MeI})\cap(\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$ (*в частности, X – сепарабельное пространство*), *и пусть множество $M\subset X$ замкнуто и* m-*связно. Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

a) *M ограниченно компактно* (*в норме* $\|\cdot\|$);

b) *M является $|\cdot|$-замкнутым, а $\mathrm{m}(x,y)$ $|\cdot|$-компактно для любых $x,y\in X$*;

c) *$\mathrm{m}(x,y)$ является $\|\cdot\|$-компактным для любых $x,y\in X$.*

Тогда M монотонно линейно связно.

Если вдобавок множество M ограниченно компактно, то оно P- и B-клеточноподобно, P- и B-ациклично (*относительно любой непрерывной теории* (*ко*)*гомологий*) *и является солнцем.*

Если X конечномерно, то, дополнительно, M экстремально стягиваемо (*в частности, P- и B-стягиваемо*) *и на множество M существует непрерывная* (*аддитивная или, эквивалентно, мультипликативная*) *ε-выборка для всех $\varepsilon>0$.*

Предложение 8. *Пусть X – банахово пространство из класса* $(\mathrm{MeI})\cap(\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$ (*в частности, X – сепарабельное пространство*), *и пусть последовательность (x_n) стремится к x по норме $|\cdot|$ и монотонно* (*последнее означает, что $f(x_n)\to f(x)$ монотонно для любого $f\in\operatorname{ext}S^*$*). *Тогда $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$.*

Отметим еще один близкий результат [10].

Предложение 9. *Пусть (x_n) слабо сходится к элементу x монотонно относительно функционалов из $\operatorname{ext}S^*$. Тогда $\|x_n-x\|\to 0$.*

Для *слабо компактных* множеств имеет место следующий результат (см. [9]).

Теорема 10. *Пусть X – сепарабельное банахово пространство, и пусть $\varnothing\ne M\subset X$ ограниченно слабо компактно. Предположим, что M* m-*связно. Тогда M монотонно линейно связно.*

Имеет место следующий предельный результат (см., например, [6, теорема 3.25]).

Теорема 11. *Пусть* $X\in(\mathrm{MeI})\cap(\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$ (*в частности, X – сепарабельное банахово пространство*), *и пусть (M_i) – последовательность* m-*связных подмножеств пространства X. Тогда*:

---

[5] Ниже под *брусом* мы будем понимать пересечения экстремальных гиперполос вида $\{x\in X\mid a\leqslant f(x)\leqslant b\}$, $-\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant+\infty$, $f\in\operatorname{ext}S^*$, порождаемых в исходном пространстве экстремальными функционалами из S^*. Частным случаем бруса является замкнутый единичный шар.

a) *если* $M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_i \supset \ldots$ *и если каждое из множеств* M_i *ограниченно компактно, то множество* $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ *монотонно линейно связно*;

b) *если* $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_i \subset \ldots$ *и* $M_i \subset H$, *где* H – *ограниченно компактное множество в* X, *то множество* $K := \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i}$ *монотонно линейно связно.*

Пусть пространство X лежит в классе $(\mathrm{MeI}) \cap (\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$ (в частности, X – сепарабельное линейное нормированное пространство), и пусть $F = (f_i) \subset \operatorname{ext} S^*$ – w^*-плотное в $\operatorname{ext} S^*$ семейство из определения класса $(\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим ограниченный линейный оператор $s_n : X \to \ell^\infty_n$, определенный как $s_n(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$. Отметим, что $\|s_n(x)\| \leqslant \|x\|$ и $\|s_n(x)\| \to \|x\|$ при $n \to \infty$.

Теорема 12 (см., например, [6, теорема 3.26]). *Пусть* X – *банахово пространство из класса* $(\mathrm{MeI}) \cap (\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$ (*в частности,* X – *сепарабельное банахово пространство*), *и пусть* $\varnothing \neq M \subset X$ *ограниченно компактно. Тогда:*

1) *если* M m*-связно в* X, *то* $s_n(M)$ *монотонно линейно связно в* ℓ^∞_n *для всех* $n \in \mathbb{N}$;

2) *если* $s_n(M)$ m*-связно в* ℓ^∞_n *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то* M *монотонно линейно связно в* X.

Теорема 13 (см., например, [6, теорема 3.27]). *Пусть* $X \in (\mathrm{MeI}) \cap (\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$ – *банахово пространство* (*в частности,* X *сепарабельно или* $X = \ell^\infty$), *и пусть множество* $\varnothing \neq M \subset X$ *ограниченно компактно и* m*-связно. Тогда* M P*- и* B*-клеточноподобно, т. е. каждое из множеств*

$$P_M x, \quad M \cap B(x, r), \quad x \in X, \quad r > 0,$$

клеточноподобно. В частности, множество M P*- и* B*-ациклично* (*относительно любой непрерывной теории* (*ко*)*гомологий*) *и является солнцем.*

Замечание 14. Ответ на обратный вопрос о монотонной линейной связности B-ацикличных (P-ацикличных) множеств не так подробно изучен (см. пример 30 ниже).

Замечание 15. В любом линейном нормированном пространстве X из условия, что $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$, где каждое M_n – монотонно линейно связное множество, и $M_n \subset M_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$), вытекает, что M – монотонно линейно связное множество.

Следствие 16. *Множество* M *монотонно линейно связно тогда и только тогда, когда для любой расширяющейся последовательности шаров, объединение которых содержит* M, *пересечение с каждым шаром такой последовательности монотонно линейно связно.*

Теорема 17 (И.Г. Царьков, [6, теорема 3.28]). *Пусть* M – *монотонно линейно связное непустое множество и* N – *замкнутый промежуток в пространстве* ℓ^∞_n. *Тогда их арифметическая сумма* $M + N$ *является монотонно линейно связным множеством.*

Теорема 18 (И.Г. Царьков, [6, теорема 3.29]). *Пусть* M – *монотонно линейно связное непустое множество в пространстве* $C(Q)$, *где* Q – *метрический компакт. Тогда арифметическая сумма* $M + \mathring{B}(0, R)$ $(R > 0)$ *монотонно линейно связна.*

Отметим еще несколько свойств монотонно линейно связных множеств.

1°. *Пусть* M_α *– монотонно линейно связное множество в линейно нормированном пространстве* X_α $(\alpha \in A)$. *Тогда декартово произведение* $M = \prod_{\alpha\in A} M_\alpha$ *является монотонно линейно связным множеством в пространстве* $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *с нормой* $\|x\| = \sup_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|$, *где* $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства. Отображение $F : X \to Y$ называется *монотонным*, если для любого промежутка $\Pi \subset Y$ его прообраз $F^{-1}(\Pi)$ является промежутком в X.

2°. *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^n$ *– выпуклое непустое множество и отображение* $F : G \to \mathbb{R}$ *является монотонной функцией на непустом пересечении произвольной прямой в* $\mathbb{R}^n$ *с множеством* G. *Тогда множество функций* $\{F \circ f(t) \mid f \in C(Q, G)\}$ *монотонно линейно связно в пространстве* $C(Q, \mathbb{R}^n)$.

3°. *Пусть* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– монотонная непрерывная функция,* M *– монотонно линейно связное множество в* $C(Q, \mathbb{R})$. *Тогда множество* $M^F := \{F \circ f \mid f \in M\}$ *монотонно линейно связно в* $C(Q, \mathbb{R})$.

4°. *Предположим, что* X *и* Y *– линейные нормированные пространства,* $F : X \to Y$ *– монотонное непрерывное отображение. Тогда для монотонно линейно связного множества* $M \subset X$ *множество* $F(M)$ *монотонно линейно связно в* Y.

5°. *Пусть* $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ *– вложенная система монотонно линейно связных слабо компактных множеств в сепарабельном пространстве* X. *Тогда пересечение* $\bigcap_{n=1}^\infty M_n$ *монотонно линейно связно* (см. также теорему 11 выше).

2. Монотонная связность солнц

Напомним, что такое важное понятие, как строгое солнце, есть по сути геометрическая переформулировка характеризационного свойства элемента наилучшего приближения (критерий Колмогорова). Отправной точкой при исследовании монотонной связности (в разных смыслах) в теории приближений служит теорема Д. Браесса [11], которая в современных терминах переформулируется следующим образом: каждое *строгое* солнце в пространстве ℓ^∞_n монотонно линейно связно. Х. Беренс и Л. Хетцельт [12] для более общего случая солнц получили более слабое утверждение, а именно: в ℓ^∞_n каждое солнце связно по Менгеру (m-связно). Имеет место следующий более сильный результат.

Теорема 19 (см., например, [6, теорема 3.31])**.** *Непустое подмножество пространства* ℓ^∞_n *является солнцем тогда и только тогда, когда оно замкнуто и монотонно линейно связно.*

Отметим, что *на плоскости* любое солнце монотонно линейно связно. Однако в конечномерных пространствах большей размерности (начиная с размерности 3) есть примеры не монотонно линейно связных чебышевских множеств (которые, конечно, являются солнцами); см. [13] и пример 30 ниже.

2.1. Монотонная линейная связность солнц в (BM)-пространствах. Следующий результат [9], характеризующий солнца в (BM)-пространствах в терминах монотонной линейной связности, обобщает теорему 19. В нем m-связность установлена А.Л. Брауном [5], а монотонная линейная связность гарантируется теоремой 7.

Теорема 20 (см., например, [6, теорема 3.32])**.** *В конечномерном* (BM)*-пространстве класс солнц совпадает с классом монотонно линейно связных множеств и совпадает с классом замкнутых* m*-связных множеств.*

На случай ограниченно компактных солнц в бесконечномерных пространствах теорема 20 обобщается следующим образом (см. [9]).

Теорема 21. *Пусть* X – (BM)*-пространство из класса* $(\mathrm{MeI})\cap(\mathrm{Ex}\text{-}w^*\mathrm{s})$ (*в частности,* X *– сепарабельное пространство*) *и такое, что в нем оболочка* $\mathrm{m}(x,y)$ $|\cdot|$*-компактна*[6] *для любых* $x,y\in X$*. Тогда в* X *любое ограниченно компактное солнце монотонно линейно связно* (*и, в частности,* m*-связно*)*.*

Ряд характеризаций солнц в полиэдральных (BM)-пространствах также дается в [6, теорема 3.40].

2.2. Солнечность и монотонная линейная связность в пространстве типа $C(Q)$. Характеризация монотонно линейно связных множеств в терминах солнечности. Следующий результат дает пример (негладкого) бесконечномерного пространства в котором *всякое* солнце связно (и, более того, монотонно линейно связно).

Теорема 22 (см., например, [6, теорема 3.34])**.**

1) *Произвольное солнце в* c_0 *монотонно линейно связно.*
2) m*-связное* (*и тем более монотонно линейно связное*) *аппроксимативно компактное непустое подмножество пространства* c_0 *является солнцем.*

Рассмотрим аналогичный вопрос о связности солнц в пространствах $C(Q)$.

Определение 23. Подмножество $M\subset X$ называется *сильно связным по Менгеру*, если $[\![x,y]\!]\cap M\neq\{x,y\}$ для любых различных точек $x,y\in M$.

Замечание 24. Обычная *связность по Менгеру* (m-связность) определяется так же, как и сильная связность по Менгеру, с одной только разницей, что сегмент $[\![x,y]\!]$ заменяется на множество $\mathrm{m}(x,y):=\bigcap_{B(z,r)\supset\{x,y\}}B(z,r)$. Как известно, $[\![x,y]\!]\subset\mathrm{m}(x,y)$, и поэтому из сильной связности по Менгеру вытекает обычная связность по Менгеру. Известно, что в сепарабельном пространстве эти связности эквивалентны. До сих пор не известно ни одного примера, когда была бы обычная связность по Менгеру, а сильной не было. Связано это с тем, что не известно примеров пространств, в которых $[\![x,y]\!]\neq\mathrm{m}(x,y)$ (см. (4)).

[6]Это свойство выполнено, в частности, для пространства c_0 (см. § 2.2 ниже).

Отметим также, что в определении слабой связности по Менгеру можно ограничиться линейно независимыми наборами $\alpha = (x_1^*, \dots, x_n^*)$.

Теорема 25 (см., например, [6, теорема 3.36]). *В пространстве $C(Q)$ или $\ell^\infty(E)$ ограниченно слабо компактное солнце сильно связно по Менгеру и, следовательно, в $C(Q)$ монотонно линейно связно.*

Следствие 26. *В пространстве $C(Q)$ ограниченно компактное солнце сильно связно по Менгеру и, следовательно, монотонно линейно связно.*

Из теорем 28 и 25 вытекает следующая характеризация монотонно линейно связных множеств в $C(Q)$ в терминах солнечности.

Теорема 27 (см., например, [6, теорема 3.37]). *В $C(Q)$ ограниченно компактное множество является солнцем если и только если оно монотонно линейно связно.*

Следующий результат является обобщением одной известной теоремы Л.П. Власова (см. [4, теорема 4.4]) о солнечности ограниченно компактных P-ацикличных солнц.

Теорема 28 (см., например, [6, теорема 3.23]). *Монотонно линейно связное ограниченно компактное подмножество банахова пространства является солнцем.*

2.3. Монотонная линейная связность и чебышевские множества в произвольных пространствах. Следующую теорему можно рассматривать, как первый результат, в котором солнечность чебышевского множества устанавливается при наложении на него структурных ограничений типа связности.

Теорема 29 (см., например, [1, теорема 10.11]). *Пусть M – монотонно линейно связное подмножество линейного нормированного пространства. Предположим, что $P_M x = \{y\}$ для некоторого $x \notin M$. Тогда x – точка солнечности (y – точка светимости).*

Как следствие, монотонно линейно связное чебышевское множество в линейном нормированном пространстве является солнцем.

Отметим, что существуют примеры пространств, отличных от $C(Q)$, которые содержат не монотонно линейно связные солнца (и даже чебышевские солнца). Следующий пример показывает, что можно построить пространство любой конечной размерности $n \geqslant 3$, содержащее не монотонно линейно связное чебышевское множество. По поводу некоторых дальнейших результатов в конечномерном случае см., например, [13–15].

Пример 30. Пусть $\dim X < \infty$, $\overline{\operatorname{ext} S^*} = S^*$. Выше мы отмечали, что в таком пространстве монотонная линейная связность замкнутого множества равносильна его выпуклости. И.Г. Царьков (см., например, [6, пример 3.2]) для любого конечного $3 \leqslant n < \infty$ построил пример пространства X размерности n со свойством $\overline{\operatorname{ext} S^*} = S^*$, содержащего неограниченное невыпуклое чебышевское множество M'; при этом любое *ограниченное* чебышевское множество в X выпукло. Такое множество M' служит примером не монотонно линейно связного *B-ацикличного* (*P-ацикличного*) *множества* (*чебышевского солнца*).

Из недавних результатов отметим работу Е.А. Савиновой [16], которая нашла необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданное линейно связное подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ было монотонно линейно связным относительно некоторой нормы на $\mathbb{R}^n$ (по поводу дальнейших продвижений см. также [17]).

Среди нерешенных проблем в этой области выделим следующую: охарактеризовать пространства, в которых каждое (ограниченное) чебышевское множество (солнце, строгое солнце) монотонно линейно связно, m-связно. Ряд продвижений в этом вопросе в трехмерном случае был получен А.Р. Алимовым и Б.Б. Бедновым (см., например, [13–15, 18]).

3. Приложения

Отметим некоторые приложения полученных выше результатов о монотонной линейной связности с конкретным объектам приближения.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $K > 0$, $a < b$. Через $S(n,K) = S(n,K,[a,b])$ обозначим множество всех *n-звенных K-липшицевых ломаных* в $C[a,b]$. Множество $S(n,K)$ монотонно линейно связно в пространстве $C[a,b]$. Отсюда вытекает, что множество всех n-звенных ломаных $S_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} S(n,m)$ монотонно линейно связно в $C[a,b]$. Как следствие, множество $S(n,K)$ всех n-звенных K-липшицевых ломаных является солнцем в $C[a,b]$. Также отметим, что множество всех k-монотонных векторов в ℓ^∞_n монотонно линейно связно (см. [6, § 3.2.6]).

Подмножество $M \subset X$ называется *устойчиво монотонно линейно связным* [10], если существует непрерывное отображение $p\colon M \times M \times [0,1] \to M$, для которого $p(x,y,\,\cdot\,)$ является монотонным путем, соединяющим точки $x, y \in M$.

Теорема 31 (см., например, [3, § 3]). *Пусть X – банахово пространство, $M \subset X$ – устойчиво монотонно линейно связное множество* (*или монотонно линейно связное P-компактное множество*) *с непрерывной по Хаусдорфу метрической проекцией. Тогда множество M обладает непрерывной выборкой из метрической проекции.*

Рассмотрим следующее классическое семейство рациональных функций в $C[a,b]$:

$$\mathscr{R}_{n,m} = \mathscr{R}_{n,m}[a,b] := \{p/q \mid p \in \mathscr{P}_n, \quad q \in \mathscr{P}_m, \quad q \neq 0\},$$

где $\mathscr{P}_n$ – подпространство алгебраических многочленов степени не выше n. Хорошо известно, что $\mathscr{R}_{n,m}$ – чебышевское солнце в $C[a,b]$. Однако в $L^p[a,b]$, $1 < p < \infty$, Н.В. Ефимовым и С.Б. Стечкиным из общих теорем геометрической теории приближений было установлено, что $\mathscr{R}_{n,m}$, $m \geqslant 1$, является множеством существования, но не единственности. В случае $L^1[a,b]$ ими же было показано отсутствие единственности наилучшего приближения классом $\mathscr{R}_{0,2}$. И.Г. Царьков, используя общие теоремы геометрической теории приближений, доказал отсутствие единственности наилучшего приближения в $L^1[a,b]$ для всех классов дробей $\mathscr{R}_{n,m}$, $m \geqslant 1$. Рассмотрим более общий класс рациональных функций:

$$\mathscr{R}^V_W := \bigl\{r = v/w \;\big|\; v \in V,\ w \in W\bigr\},$$

здесь Q – метрический компакт, $V, W \subset C(Q)$ – выпуклые множества, W состоит из положительных функций. Множество $\mathscr{R}_W^V$ является строгим протосолнцем в $C(Q)$.

Пусть $V, W \subset C(Q)$, и пусть $U \subset V \times W$ – непустое выпуклое множество. Рассмотрим следующее обобщение классов $\mathscr{R}_{n,m}$ и $\mathscr{R}_W^V$ дробно-рациональных функций:

$$\mathscr{R}_U := \big\{r \in C(Q) \mid rw = v, \quad w \not\equiv 0, \quad (v, w) \in U\big\}. \tag{6}$$

Теорема 32 (см. [19]). *Множество обобщенных дробно-рациональных функций $\mathscr{R}_U$ является строгим протосолнцем в $C(Q)$.*

Этот результат означает, что дроби наилучшего приближения классом $\mathscr{R}_U$ характеризуются в терминах критерия Колмогорова элемента наилучшего приближения, что, в свою очередь, позволяет строить алгоритмы нахождения наилучших дробей.

Задача об устойчивости элементов (почти) наилучшего приближения традиционно связана со свойствами аппроксимативной компактности множества или существования непрерывных ε-выборок. Хорошо известно, что в невырожденных случаях (т. е. при $m \geqslant 1$) метрическая проекция на (чебышевское) множество $\mathscr{R}_{n,m}$ имеет точки разрыва в $C[a, b]$, но при этом для любого $\varepsilon > 0$ на $\mathscr{R}_{n,m}$ существует непрерывная ε-выборка. Следующий результат обобщает и расширяет этот результат.

Теорема 33 (см. [19]). *Множество обобщенных рациональных дробей $\mathscr{R}_U$ (при выпуклом U; см. (6)) в $C(Q)$ является устойчиво монотонно линейно связным множеством, и, следовательно, на это множество существует непрерывная аддитивная ε-выборка для любого $\varepsilon > 0$. В случае замкнутости $\mathscr{R}_U$ для каждого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная мультипликативная ε-выборка на $\mathscr{R}_U$. Кроме того, $\mathscr{R}_U$ является B-стягиваемым ($\mathring{B}$-стягиваемым) множеством в $C(Q)$.*

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за полезные замечания.

Список литературы

[1] A.R. Alimov, I.G. Tsar'kov, *Geometric approximation theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2021.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-90951-2

[2] D. Braess, *Nonlinear approximation theory*, Springer Ser. Comput. Math., vol. 7, Springer, Berlin, 1986.
DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-642-61609-9

[3] А.Р. Алимов, К.С. Рютин, И.Г. Царьков, *Вопросы существования, единственности и устойчивости наилучших и почти наилучших приближений*, УМН **78** (3), 3–52 (2023).
DOI: https://doi.org/10.4213/rm10113

[4] Л.П. Власов, *Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах*, УМН **28** (6), 3–66 (1973).
URL: http://mi.mathnet.ru/rus/rm4976

[5] A.L. Brown, *Suns in normed linear spaces which are finite dimensional*, Math. Ann. **279** (1), 87–101 (1987).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01456192

[6] А.Р. Алимов, И.Г. Царьков, *Современная геометрическая теория приближений*, ОнтоПринт, М., 2023.

[7] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*, Springer, New York, 2011.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7515-7

[8] A.R. Alimov, *The Rainwater–Simons weak convergence theorem for the Brown associated norm*, Eurasian Math. J. **5** (2), 126–131 (2014).
URL: http://mi.mathnet.ru/rus/emj159

[9] А.Р. Алимов, *Монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах*, Изв. РАН. Сер. матем. **78** (4), 3–18 (2014).
DOI: https://doi.org/10.4213/im8128

[10] И.Г. Царьков, *Свойства монотонно связных множеств*, Матем. заметки **109** (5), 781–792 (2021).
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12890

[11] D. Braess, *Geometrical characterizations for nonlinear uniform approximation*, J. Approx. Theory **11** (3), 260–274 (1974).
DOI: https://doi.org/10.1016/0021-9045(74)90018-5

[12] H. Berens, L. Hetzelt, *Die metrische Struktur der Sonnen in $\ell^\infty(n)$*, Aequat. Math. **27** (13), 274–287 (1984).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02192677

[13] А.Р. Алимов, Б.Б. Беднов, *Монотонная линейная связность чебышевских множеств в трехмерных пространствах*, Матем. сб. **212** (5), 37–57 (2021).
DOI: https://doi.org/10.4213/sm9325

[14] Б.Б. Беднов, *Конечномерные пространства, в которых класс чебышевских множеств совпадает с классом замкнутых и монотонно линейно связных множеств*, Матем. заметки **111** (4), 483–493 (2022).
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13314

[15] Б.Б. Беднов, *Трехмерные пространства, в которых каждое ограниченное чебышевское множество монотонно линейно связно*, Матем. заметки **114** (3), 323–338 (2023).
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13569

[16] Е.А. Савинова, *Множества в $\mathbb{R}^n$, монотонно линейно связные в некоторой норме*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. (1), 53–55 (2023).
DOI: https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-53-55

[17] П.А. Бородин, Е.А. Савинова, *Всякая чебышевская кривая без самопересечений монотонна*, Матем. заметки (принята к печати).

[18] A.R. Alimov, *Monotone path-connectedness of strict suns*, Lobachevskii J. Math. **43** (2), 519–527 (2022).
DOI: http://doi.org/10.1134/S1995080222060038

[19] A.R. Alimov, I.G. Tsar'kov, *Solarity and proximinality in generalized rational approximation in spaces $C(Q)$ and L^p*, Russian J. Math. Physics **29** (3), 291–305 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1061920822030013

Алексей Ростиславович Алимов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,
E-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

Игорь Германович Царьков
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики,
E-mail: tsar@mech.math.msu.su

Volume 2, Issue 2 UDC 517.982.256
pp. 30–46 (2024) MSC 41A65

Monotone path-connected sets in geometric approximation theory and their applications

A.R. Alimov, I.G. Tsar'kov

Abstract. Monotone sets have been quite actively studied in recent years in geometric approximation theory. The concept of monotone path-connected sets has proved especially useful. The purpose of the present paper is to give a short but comprehensive survey on this topic; we also illustrate relations with key properties of approximating sets, of which we consider characterizations of best approximants, and properties of uniqueness and stability.

Keywords: monotone path-connected set, Chebyshev set, sun, best approximation, stability of best approximation, associated norm.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.30-46

References

[1] A.R. Alimov, I.G. Tsar'kov, *Geometric approximation theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2021.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-90951-2

[2] D. Braess, *Nonlinear approximation theory*, Springer Ser. Comput. Math., vol. 7, Springer, Berlin, 1986.
DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-642-61609-9

[3] A.R. Alimov, K.S. Ryutin, I.G. Tsar'kov, *Existence, uniqueness, and stability of best and near-best approximations*, Russ. Math. Surv. **78** (3), 399–442 (2023).
DOI: https://doi.org/10.4213/rm10113e

[4] L. P. Vlasov, *Approximative properties of sets in normed linear spaces*, Russ. Math. Surv. **28** (6), 1–66 (1973).
DOI: https://doi.org/10.1070/rm1973v028n06abeh001624

[5] A.L. Brown, *Suns in normed linear spaces which are finite dimensional*, Math. Ann. **279** (1), 87–101 (1987).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01456192

Acknowledgements. The work was carried at M.V. Lomonosov Moscow State University at the expense of a grant by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00129).

Received: 08 April 2024. Accepted: 04 June 2024. Published: 16 July 2024.

[6] A. R. Alimov, I. G. Tsar'kov, *Modern geometric approximation theory*, OntoPrint, Moscow, 2023 (in Russian).

[7] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*, Springer, New York, 2011.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7515-7

[8] A.R. Alimov, *The Rainwater–Simons weak convergence theorem for the Brown associated norm*, Eurasian Math. J. **5** (2), 126–131 (2014).
URL: http://mi.mathnet.ru/rus/emj159

[9] A.R. Alimov, *Monotone path-connectedness and solarity of Menger-connected sets in Banach spaces*, Izv. Math. **78** (4), 641–655 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1070/IM2014v078n04ABEH002702

[10] I.G. Tsar'kov, *Properties of monotone connected sets*, Math. Notes **109** (5), 819–827 (2021).
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12890

[11] D. Braess, *Geometrical characterizations for nonlinear uniform approximation*, J. Approx. Theory **11** (3), 260–274 (1974).
DOI: https://doi.org/10.1016/0021-9045(74)90018-5

[12] H. Berens, L. Hetzelt, *Die metrische Struktur der Sonnen in* $\ell^\infty(n)$, Aequat. Math. **27** (3), 274–287 (1984).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02192677

[13] A.R. Alimov, B.B. Bednov, *Monotone path-connectedness of Chebyshev sets in three-dimensional spaces*, Sb. Math. **212** (5), 636–654 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1070/SM9325

[14] B.B. Bednov, *Finite-dimensional spaces where the class of Chebyshev sets coincides with the class of closed and monotone path-connected sets*, Math. Notes **111** (4), 505–514 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1134/S000143462203018X

[15] B.B. Bednov, *Three-dimensional spaces where all bounded Chebyshev sets are monotone path connected*, Math. Notes **114** (3), 283–295 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434623090018

[16] E.A. Savinova, *Sets in* $\mathbb{R}^n$ *monotone path-connected with respect to some norm*, Moscow Univ. Math. Bull. **78** (1), 49–51 (2023).
DOI: https://doi.org/10.3103/S0027132223010084

[17] P.A. Borodin, E.A. Savinova, *Each Chebyshev curve without self-intersections is monotone*, Math. Notes (to appear).

[18] A.R. Alimov, *Monotone path-connectedness of strict suns*, Lobachevskii J. Math. **43** (2), 519–527 (2022).
DOI: http://doi.org/10.1134/S1995080222060038

[19] A.R. Alimov, I.G. Tsar'kov, *Solarity and proximinality in generalized rational approximation in spaces $C(Q)$ and L^p*, Russian J. Math. Physics **29** (3), 291–305 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1061920822030013

Alexey Rostislavovich Alimov
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia,
E-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

Igor' Germanovich Tsar'kov
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia,
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics
E-mail: tsar@mech.math.msu.su

Том 2, Выпуск 2
Стр. 47–69 (2024)

УДК 510.54, 510.57
MSC 03D45, 03D25

Пунктуальная категоричность и операция скачка в примитивно рекурсивных степенях

И.Ш. Калимуллин, А.А. Курмачева

Аннотация. Статья посвящена изучению пунктуальных структур, для которых изоморфизмы между различными пунктуальными копиями примитивно рекурсивно сводятся к фиксированной $0,1$-значной оракульной функции. Для изучения сложности таких пунктуальных структур и изоморфизмов между ними вводится и исследуется операция слабого ($0,1$-значного) скачка. В работе установлено существование жестких пунктуальных структур, для которых все изоморфмизмы являются низкими относительно слабого скачка и, при этом, не все из этих изоморфизмов примитивно рекурсивны. Кроме того, построена жесткая пунктуальная структура, для которой все изоморфизмы примитивно рекурсивно сводятся к слабому скачку нулевой функции, а один из них имеет высокую степень.

Ключевые слова: примитивно рекурсивная сводимость, пунктуальная категоричность, операция скачка.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.47-69

Введение

Алгебраическая структура, элементами которой являются натуральные числа, называется *примитивно рекурсивной*, если ее универсум, а также отношения и операции, являются примитивно рекурсивными. Исследование примитивно рекурсивных структур, определенных на всем множестве натуральных чисел (т. е. универсум которых есть $\mathbb{N}$), проводилось в некоторых работах Цензера, Реммеля и других авторов (см., например, [1] и [2]) без введения специального термина для таких примитивно рекурсивных структур. В работе [3] такие структуры были исследованы под названием *вполне примитивно рекурсивных* (*fully primitive recursive*). Начиная с обзорной работы [4], для данного понятия общепринятым стал термин *пунктуальной* структуры.

В рамках данной терминологии будем называть пунктуальную структуру $\mathcal{A}$ *пунктуально категоричной*, если для каждой пунктуальной копии $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ существует изоморфизм

Благодарности. Работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС». Кроме того, результаты первого параграфа выполнены в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение 075-02-2024-1438).

Поступила: 07.06.2024. Принята: 02.07.2024. Опубликована: 16.07.2024.

$p : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ такой, что p и p^{-1} являются примитивно рекурсивными функциями. Данное понятие является полным аналогом понятия *вычислимо категоричной* структуры, для которой существуют вычислимые изоморфизмы в любую ее вычислимую копию.

Тривиальным примером пунктуально категоричных структур является любая пунктуальная копия бесконечной прямой суммы $\oplus_\omega \mathbb{Z}_p$, рассматриваемая как абелева p-группа, или как бесконечномерное векторное пространство над конечным простым полем $\mathbb{Z}_p$. Однако менее тривиальные примеры вычислимо категоричных структур, такие, как натуральные числа с функцией следования, или их плотное линейное упорядочение, уже не являются пунктуально категоричными.

В работе [3] был разработан так называемый метод (стратегия) "прессинга", позволяющий строить нетривиальные примеры пунктуально категоричных структур. В частности, был построен пример конечно-порожденной пунктуально категоричной структуры, а также пример пунктуально категоричной структуры, не являющейся вычислимо категоричной.

Как и в случае с вычислимой категоричностью, понятие пунктуальной категоричности может быть обобщено на произвольные оракулы.

Определение 1. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – произвольная функция. Пунктуальная структура $\mathcal{A}$ называется *f-пунктуально категоричной*, если для каждой пунктуальной копии $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ существует изоморфизм $p : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ такой, что p и p^{-1} примитивно рекурсивно сводятся к f. Формальное определение примитивно рекурсивной сводимости $\leq_{pr}$ будет дано в параграфе 1 (определение 5).

В работе [5] удалось применить стратегию "прессинга" для кодирования примитивно рекурсивной сложности некоторых функций в сложность построения изоморфизмов между пунктуальными копиями.

Теорема 2 ([5]). *Пусть f – вычислимая функция с примитивно рекурсивным графиком. Тогда существует f-пунктуальная структура $\mathcal{A}$ такая, что для любой функции $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ структура $\mathcal{A}$ будет g-пунктуально категоричной тогда и только тогда, когда f примитивно рекурсивно сводится к g.*

Таким образом, для некоторых пунктуальных структур можно говорить о точной *степени пунктуальной категоричности*, как наименьшей примитивно рекурсивной степени, относительно которой структура пунктуально категорична, что будет полностью соответствовать понятию тьюринговой степени вычислимой категоричности структур [6].

Возникает вопрос о возможности кодирования функций, не имеющих примитивно рекурсивный график, в сложность пунктуальной категоричности. Данная проблема была исследована в работе [7]. При этом выяснилось, что конечно-порожденные структуры могут иметь в качестве точных степеней пунктуальной категоричности лишь примитивно рекурсивные степени функций с примитивно рекурсивными графиками. Если же пунктуальная структура имеет какую-либо другую степень пунктуальной категоричности в классе степеней вычислимых функций, то эта структура должна быть *локально конечной* (т. е. каждое ее конечное подмножество порождает лишь конечную подструктуру). Более того, если f – вычислима, то f-пунктуальные структуры могут быть либо конечно-порожденными, либо локально конечными. Также был получен следующий результат.

Теорема 3 ([7])**.** *Для некоторой* $0,1$*-значной вычислимой функции* f *существует локально конечная жесткая* f*-пунктуальная структура, не являющейся пунктуально категоричной.*

Настоящая работа дает оценки $0,1$-значных функций f с указанным выше свойством и изоморфизмов между пунктуальными копиями соответствующих структур в терминах примитивно рекурсивной сводимости и операции скачка. Полученные результаты могут говорить в пользу предположения о том, что ненулевые степени $0,1$-значных функций не являются точными степенями пунктуальной категоричности.

В первом параграфе будет развита теория примитивно рекурсивной сводимости, необходимая для доказательства основных результатов о пунктуальной категоричности из второго параграфа. Результаты первого параграфа легко переносятся и на другие субрекурсивные сводимости (например, элементарную сводимость), однако полученные таким образом утверждения и методы по-видимому трудно будет применить к субрекурсивным аналогам пунктуальной категоричности. Например, упомянутая выше стратегия “прессинга” [3] существенно использует замкнутость класса примитивно рекурсивных функций относительно неограниченных итераций, что делает актуальным вопрос о существовании нетривиальных примеров субрекурсивно категоричных структур. Например, авторам неизвестно, существует ли элементарная конечно-порожденная алгебраическая структура, у которой любые две элементарные копии, определенные на всем множестве натуральных чисел, элементарно изоморфны.

Терминология, обозначения и подходы в данной работе будут в основном следовать классической для теории вычислимости монографии [8]. Всюду далее будем считать языки структур конечными, поскольку в противном случае понятие пунктуальной структуры требует уточнения.

1. Примитивно рекурсивные степени и скачки

Ввиду наличия примитивно рекурсивных биекций между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством $\mathbb{N}^n$ мы далее отождествляем наборы

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

с соотвествующими натуральными числами. Поэтому в определении, данного ниже, считаем рассматриваемые операторы действующими только на множестве унарных функций.

Определение 4. Примитивно рекурсивные операторы $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ определены по индукции.

- Тождественный оператор
$$\Phi^f = f$$
примитивно рекурсивен.
- Операторы, возвращающие базисные примитивно рекурсивные функции,
$$\Phi^f = o, \text{ где } o(x) = 0;$$
$$\Phi^f = s, \text{ где } s(x) = x + 1;$$
$$\Phi^f = I^n_m, \text{ где } m \le n, \; I^n_m(x_1, ..., x_n) = x_m$$
примитивно рекурсивны.
- Если $\Psi, \Theta_1, ..., \Theta_m$ – примитивно рекурсивные операторы, то оператор Φ, определенный равенством
$$\Phi^f(x) = \Psi^f(\Theta^f_1(x), ..., \Theta^f_m(x)) \quad [\text{суперпозиция функций}],$$
также примитивно рекурсивен.
- Если Ψ, Θ – примитивно рекурсивные операторы, то оператор Φ, определенный равенствами
$$\Phi^f(x, 0) = \Theta^f(x),$$
$$\Phi^f(x, y + 1) = \Psi^f(x, y, \Phi^f(x, y)) \quad [\text{примитивная рекурсия}],$$
также примитивно рекурсивен.

Здесь везде $x, y \in \mathbb{N}$ – произвольные натуральные числа, а $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ – произвольная функция.

Ясно, что каждую примитивно рекурсивную функцию g можно выразить в виде $g = \Phi^o$ для некоторого примитивно рекурсивного оператора Φ, и наоборот.

Определение 5 (Клини [9])**.** Будем говорить, что функция g примитивно рекурсивно сводится к f ($g \le_{pr} f$), если $g = \Phi^f$ для некоторого примитивно рекурсивного оператора Φ. Будем говорить, что g примитивно рекурсивно эквивалентна f ($g \equiv_{pr} f$), если $g \le_{pr} f$ и $f \le_{pr} g$. Классы эквивалентности относительно $\equiv_{pr}$ будем называть pr-степенями.

При этом $o \le_{pr} g$ для всех g, а также $g \equiv_{pr} o$ имеет место тогда и только тогда, когда g примитивно рекурсивна. Нетрудно проверить существование наименьшей верхней грани в классе pr-степеней посредством оператора $\oplus$, определенного следующим образом:

$$f \oplus g(x) = \begin{cases} f(y), & \text{если } x = 2y; \\ g(y), & \text{если } x = 2y + 1. \end{cases}$$

Таким образом, pr-степени функций образуют верхнюю полурешетку.

Фиксируем естественную (гёделеву) нумерацию $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ всех примитивно рекурсивных операторов. Тогда должны существовать примитивно рекурсивные функции Fs, Fp, Pm, Os такие, что

$$\Phi^f_{Fs(n,m,k_1,\ldots,k_m)}(x) = \Phi^f_n(\Phi^f_{k_1}(x), \ldots, \Phi^f_{k_m}(x)) \quad [\text{суперпозиция функций}];$$

$$\Phi^f_{Fp(n,m)}(x, 0) = \Phi^f_n(x),$$

$$\Phi^f_{Fp(n,m)}(x, y+1) = \Phi^f_m(x, y, \Phi^f_{Fp(n,m)}(x, y)) \quad [\text{примитивная рекурсия}];$$

$$\Phi^f_{Pm(n,x)}(y) = \Phi^f_n(x, y) \quad [\text{параметризация}];$$

$$\Phi^f_{Os(n,m)}(x) = \Phi^{\Phi^f_m}_n(x) \quad [\text{суперпозиция операторов}]$$

для всех $x, y, n, m, k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ и $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Определение 6 (Клини [9])**.** Определим скачок f'_s (называемый в дальнейшем сильным скачком) функции f следующим образом:

$$f'_s(x) = \Phi^f_x(0),$$

где $x \in \mathbb{N}$.

Нетрудно установить, что в силу свойств выбранной нумерации $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ имеют место следующие *pr*-эквивалентности:

$$f'_s = \lambda x.\, \Phi^f_x(0) \equiv_{pr} \lambda x.\, \Phi^f_x(x) \equiv_{pr} \lambda x.\, 1 + \Phi^f_x(x) \equiv_{pr} \lambda x, y.\, \Phi^f_x(y).$$

Кроме того, *pr*-степень функции f'_s можно определить независимо от выбора нумерации $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ как наибольшую *pr*-степень функций из класса $\mathcal{R}^f$, содержащую все функции g, для которых существует примитивно рекурсивный оператор Φ такой, что $\lambda x.\ g(x, 0) = f$ и $\lambda x.\ g(x, y+1) = \Phi^{\lambda x.\, g(x,y)}$ для всех $y \in \mathbb{N}$. Нетрудно также проверить, что для случая нулевой функции $f = o$ функция o'_s будет *pr*-эквивалентна известной функции Аккермана, имеющей примитивно рекурсивный график.

Следующее утверждение доказывается стандартным для теории вычислимости образом.

Утверждение 7. *Для всех функций f, g имеет место*:

(1) $f \leq_{pr} f'_s$;

(2) $f'_s \not\leq_{pr} f$;

(3) $g \leq_{pr} f \implies g'_s \leq_{pr} f'_s$.

Ниже будет установлено, что обратная импликация в (3) вообще говоря не имеет места. Более того, для 0, 1-значных функций $g \leq_{pr} o'_s$ будет иметь место $g'_s \equiv_{pr} o'_s$.

Пусть далее

$$sg(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

– характеристическая функция множества положительных натуральных чисел.

Определение 8. Определим слабый скачок f'_w функции f следующим образом:

$$f'_w(x) = sg(\Phi^f_x(0)),$$

где $x \in \mathbb{N}$.

Как и ранее, имеем:

$$f'_w = \lambda x.\, sg(\Phi^f_x(0)) \equiv_{pr} \lambda x.\, sg(\Phi^f_x(x)) \equiv_{pr} \lambda x.\, 1 \dot{-} \Phi^f_x(x) \equiv_{pr} \lambda x, y.\, sg(\Phi^f_x(y)).$$

Кроме того, pr-степень функции f'_w можно определить независимо от выбора нумерации $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ как наибольшую pr-степень функций вида $sg(g(x))$, где g – произвольная функция из введенного ранее класса $\mathcal{R}^f$. Отметим также, что в терминах обобщенной иерархии Гжегорчика $0,1$-значная функция o'_w является $\mathbf{F}_\omega$-полной проблемой разрешимости, эквивалентной ряду алгоритмических проблем, возникающих в теоретических компьютерных науках и математической логике (см., например, [10–13]). Также отметим, что в силу результата Кристиансена ([14, теорема 4.1]), адаптированного с элементарной на примитивно рекурсивную сводимость, для функций f и g, имеющих примитивно рекурсивный график, имеет место эквивалентность

$$g'_w \leq_{pr} f \iff g'_s \leq_{pr} f.$$

Утверждение 9. *Для всех функций f, g имеет место*:

(1) f – $0,1$-*значна* $\implies f \leq_{pr} f'_w$;
(2) $f'_w \not\leq_{pr} f$;
(3) $g \leq_{pr} f \implies g'_w \leq_{pr} f'_w$;
(4) $f'_w \leq_{pr} f'_s$;
(5) $f'_s \not\leq_{pr} f'_w$.

Здесь утверждение (5) следует из того соображения, что если $f \leq_{pr} g$ и g – $0,1$-значна, то рост функции $f(x)$ оценивается сверху примитивно рекурсивной функцией. За счет этого мы также не можем распространить утверждение (1) на произвольные функции f.

Всюду далее $0,1$-значные функции на множестве $\mathbb{N}$ будем отождествлять с подмножествами $\mathbb{N}$, характеристическими функциями которых они являются. В частности, нулевая функция o отождествляется с пустым множеством $\emptyset$. Заглавными латинскими буквами $A, B, \ldots$ далее будут обозначаться только подмножества $\mathbb{N}$, понимаемые также как $0,1$-значные функции.

Утверждение 10. *Для всех множеств A имеет место $A'_s \equiv_{pr} A \oplus \emptyset'_s$. Следовательно, если $A \leq_{pr} \emptyset'_s$, то $A'_s \equiv_{pr} \emptyset'_s$ и, тем более, $A'_w \leq_{pr} \emptyset'_s$.*

Доказательство. За счет наличия только 2^x различных начальных отрезков $0,1$-значных функций длины x, по данному n можем фиксировать такое число h_n, что значение $\Phi_n^X(0)$ зависит только от значений $X(x)$ при $x \le h_n$. При этом сложность вычисления h_n зависит от сложности индукционного построения Φ_n, точнее имеет место $h_n = \Phi_{u(n)}^{\emptyset}(0) = \emptyset'_s(u(n))$ для некоторой примитивно рекурсивной функции u. В силу свойств выбранной нумерации (суперпозиция операторов) имеем

$$A'_s(n) = \Phi_n^A(0) = \Phi_{v(n)}^{\emptyset}(A(0), A(1), \ldots, A(\emptyset'_s(u(n))))$$

для некоторой примитивно рекурсивной функции v. В этом равенстве длина набора

$$A(0), A(1), \ldots, A(\emptyset'_s(u(n)))$$

является переменной величиной, поэтому здесь следует понимать под аргументом в $\Phi_{v(n)}$ канонический номер этого набора, учитывающий также и его длину, поэтому при построении оператора $\Phi_{v(n)}$ длина $\emptyset'_s(u(n)) + 1$ не требует вычисления. Оператор $\Phi_{v(n)}$ всего лишь реализует подстановку в Φ_n значений оракула $A(x)$ соответствующими элементами данного ему в качестве аргумента набора. Пусть w – примитивно рекурсивная функция, полученная применением свойства параметризации:

$$\Phi_{v(n)}^{\emptyset}(x) = \Phi_{w(n,x)}^{\emptyset}(0) = \emptyset'_s(w(n,x)).$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$A'_s(n) = \emptyset'_s(w(n, A(0), A(1), \ldots, A(\emptyset'_s(u(n))))),$$

откуда немедленно следует $A'_s \le_{pr} A \oplus \emptyset'_s$. Обратная сводимость следует из утверждения 7. $\square$

Из доказанного утверждения немедленно следует, что $(\emptyset'_w)'_s \equiv_{pr} \emptyset'_s$ при $\emptyset'_w \not\equiv_{pr} \emptyset$, так что операция сильного скачка не является инъективной в pr-степенях. Кроме того, в pr-степенях имеется возрастающая иерархия слабых скачков:

$$\emptyset <_{pr} \emptyset'_w <_{pr} \emptyset''_w = (\emptyset'_w)'_w <_{pr} \emptyset'''_w = (\emptyset''_w)'_w <_{pr} \cdots <_{pr} \emptyset^{(n)}_w <_{pr} \cdots <_{pr} \emptyset'_s,$$

которая в силу равномерности возникающих pr-сводимостей к $\emptyset'_s$, может быть продолжена на ω-уровень посредством множества $\emptyset^{(\omega)}_w(x,y) = \emptyset^{(x)}_w(y)$. Укажем некоторые описательные результаты, которые при $A = \emptyset$ имеют отношение к начальным уровням этой иерархии.

Утверждение 11.

(1) *$B \le_{pr} A'_w$ имеет место тогда и только тогда, когда существует примитивно рекурсивная функция a такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$B(n) = \Phi^A_{a(n)}(0).$$

(2) *$B \leq_{pr} A''_w = (A'_w)'_w$ имеет место тогда и только тогда, когда существует примитивно рекурсивная функция a такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$B(n) = \Phi^A_{\Phi^A_{a(n)}(0)}(0).$$

Доказательство. Пункт (1)*. Импликация "тогда"* следует из

$$B(n) = \Phi^A_{a(n)}(0) = A'_w(a(n)).$$

Пункт (1)*. Импликация "только тогда".* Пусть дано произвольное $k \in \mathbb{N}$. Как и при доказательстве предыдущего утверждения можем фиксировать такую границу $h_k(n)$, что $\Phi^X_k(n)$ зависит только от значений $X(x)$ при $x \leq h_k(n)$. При этом для каждого $k \in \mathbb{N}$ функция $h_k(n)$ примитивно рекурсивна, и ее можно записать в виде $h_k(n) = \Phi^{\emptyset}_{u(k)}(n)$ для некоторой примитивно рекурсивной функции u. Тогда, учитывая $A'_w(x) = sg(\Phi^A_x(0)$, получаем аналогично предыдущему утверждению

$$\Phi^{A'_w}_k(n) = \Phi^{\emptyset}_{v(n)}(n, sg(\Phi^A_0(0)), sg(\Phi^A_1(0)), \ldots, sg(\Phi^A_{h_k(n))}(0))$$

для некоторой примитивно рекурсивной функции v. Применим свойство суперпозиции (вместе со свойством примитивной рекурсии), чтобы получить примитивно рекурсивные функции b и d, для которых при всех $n, m \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\Phi^{\emptyset}_{v(n)}(n, sg(\Phi^A_0(0)), sg(\Phi^A_1(0)), \ldots, sg(\Phi^A_m(0))) = \Phi^A_{b(n,m)}(0),$$
$$b(n, \Phi^{\emptyset}_{u(k)}(n)) = \Phi^{\emptyset}_{d(k)}(n).$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Phi^A_{\Phi^{\emptyset}_{d(k)}(n)}(0) = \Phi^A_{b(n,\Phi^{\emptyset}_{u(k)}(n))}(0) = \Phi^A_{b(n,h_k(n))}(0) = \Phi^{A'_w}_k(n).$$

Поэтому, если $B \leq_{pr} A'_w$, то $B(n) = \Phi^A_{a(n)}(0)$ для примитивно рекурсивной функции $a(n) = \Phi^{\emptyset}_{d(k)}(n)$, где $k \in \mathbb{N}$ такое, что $B = \Phi^{A'_w}_k$.

Пункт (2)*. Импликация "тогда".* Зафиксируем примитивно рекурсивные функции b и c такие, что для всех $n, x \in \mathbb{N}$ и $X \in 2^{\mathbb{N}}$ имеет место

$$\Phi^X_{b(n)}(x) = X(\Phi^X_n(x)) \text{ и } \Phi^{X'_w}_{c(n)}(x) = \Phi^X_n(x).$$

Тогда $B(n) = \Phi^A_{\Phi^A_{a(n)}(0)}(0) = A'_w(\Phi^A_{a(n)}(0)) = A'_w(\Phi^{A'_w}_{c(a(n))}(0)) = \Phi^{A'_w}_{b(c(a(n)))}(0) = A''_w(b(c(a(n))))$, откуда немедленно следует $B \leq_{pr} A''_w$.

Пункт (2). *Импликация "только тогда"*. Аналогично пункту (1) из $B \leq_{pr} A''_w$ следует существование примитивно рекурсивных функций h и v таких, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место
$$B(n) = \Phi^{\emptyset}_{v(n)}(n, sg(\Phi^{A'_w}_0(0)), sg(\Phi^{A'_w}_1(0)), \dots, sg(\Phi^{A'_w}_{h(n)}(0))).$$

Далее, применяя импликацию "только тогда" пункта (1) к каждому $B_k = sg(\Phi^{A'_w}_k)$, получим примитивно рекурсивную функцию a_k такую, что $B_k(x) = \Phi^A_{a_k(x)}(0)$. При этом равномерность доказательства (1) позволяет записать $a_k(x)$ в виде $a_k(x) = \Phi^{\emptyset}_{d(k)}(x)$ для некоторой примитивно рекурсивной функции d.

Итак, имеем

$$B(n) = \Phi^{\emptyset}_{v(n)}(n, \Phi^A_{\Phi^{\emptyset}_{d(0)}(0)}(0), \Phi^A_{\Phi^{\emptyset}_{d(1)}(0)}(0), \dots, \Phi^A_{\Phi^{\emptyset}_{d(h(n))}(0)}(0))$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим теперь примитивно рекурсивную функцию e, для которой имеет место
$$\Phi^{\emptyset}_{v(n)}(n, \Phi^A_{x_0}(0), \Phi^A_{x_1}(0), \dots, \Phi^A_{x_{h(n)}}(0)) = \Phi^A_{e(n, x_0, x_1, \dots, x_{h(n)})}(0).$$

Тогда применяем свойства суперпозиции последний раз, чтобы получить примитивно рекурсивную функцию a такую, что

$$e(n, \Phi^{\emptyset}_{d(0)}(0), \Phi^{\emptyset}_{d(1)}(0), \dots, \Phi^{\emptyset}_{d(h(n))}(0)) = \Phi^X_{a(n)}(0)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $X \in 2^{\mathbb{N}}$. Откуда немедленно следует

$$B(n) = \Phi^A_{\Phi^{\emptyset}_{a(n)}(0)}(0) = \Phi^A_{\Phi^A_{a(n)}(0)}(0)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. □

Из следующего результата следует, что область значений операции слабого скачка в pr-степенях состоит в точности из pr-степеней, больших или равных pr-степени $\emptyset'_w$.

Теорема 12. *Для каждого множества B существует множество A такое, что*

$$B \oplus \emptyset'_w \equiv_{pr} A'_w.$$

Доказательство. Пусть u – примитивно рекурсивная функция из доказательств предыдущих утверждений такая, что каждое $\Phi^X_k(0)$ зависит только от значений $X(x)$ при $x \leq h_k = \Phi^{\emptyset}_{u(k)}(0)$. При этом без ущерба для примитивной рекурсивности функции u можем считать последовательность $h_0, h_1, h_2, \dots$ строго возрастающей.

Определим теперь множество

$$A(x) = \begin{cases} B(k), & \text{если } x = h_k \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Чтобы убедиться в $A'_w \leq_{pr} B \oplus \emptyset'_w$, рассмотрим конечные для каждого $n \in \mathbb{N}$ множества

$$A_n(x) = \begin{cases} B(k), & \text{если } x = h_k \text{ для некоторого } k \leq n; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как $h_n < h_{n+1} < h_{n+2} < \cdots$ имеем $\Phi_n^A(0) = \Phi_n^{A_n}(0)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, из

$$\exists k\ [x = h_k] \iff \exists k \leq x\ [x = h_k] \iff \exists k \leq x\ [x = \Phi^{\emptyset}_{u(k)}(0)]$$

следует существование функций $f \leq_{pr} B$ и $g \leq_{pr} B$ таких, что

$$\Phi^{\emptyset}_{f(n)} = A_n \ \text{ и } \ \Phi^{\emptyset}_{g(n)} = \Phi_n^{\Phi^{\emptyset}_{f(n)}} = \Phi_n^{A_n}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Теперь сводимость $A'_w \leq_{pr} B \oplus \emptyset'_w$ имеет место ввиду

$$A'_w(n) = sg(\Phi_n^A(0)) = sg(\Phi_n^{A_n}(0)) = sg(\Phi^{\emptyset}_{g(n)}(0)) = \emptyset'_w(g(n)).$$

С другой стороны имеем

$$B(k) = A(h_k) = A(\Phi^{\emptyset}_{u(k)}(0)) = \Phi^A_{w(k)}(0) = A'_w(w(k)),$$

где примитивно рекурсивная функция w выбрана такой, что

$$\Phi^X_{w(k)}(0) = X(\Phi^{\emptyset}_{u(k)}(0))$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и $X \in 2^{\mathbb{N}}$. Таким образом, $B \oplus \emptyset'_w \equiv_{pr} A'_w$. □

Доказательство теоремы позволяет установить, что операция слабого скачка в *pr*-степенях не инъективна.

Следствие 13. *Существует множество A, не являющееся примитивно рекурсивным, такое, что $A'_w \equiv_{pr} \emptyset'_w$.*

Доказательство. Полагая в доказательстве утверждения

$$B(k) = 1 \dot{-} \Phi^{\emptyset}_k(h_k) = 1 \dot{-} \Phi^{\emptyset}_k(\Phi^{\emptyset}_{u(k)}(0)),$$

будем иметь $B \leq_{pr} \emptyset'_w$ и, следовательно, $A'_w \equiv_{pr} \emptyset'_w$.

Однако $A(h_k) \neq \Phi^{\emptyset}_k(h_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Значит полученное множество A не примитивно рекурсивно. □

Замечание 14. Анализируя доказательство теоремы, можно прийти к выводу, что *pr*-эквивалентность $B \oplus \emptyset'_w \equiv_{pr} A'_w$ по прежнему будет иметь место, если в определении множества A в доказательстве теоремы использовать произвольную возрастающую последовательность $\widetilde{h}_0 < \widetilde{h}_1 < \widetilde{h}_2 < \cdots$, для которой существуют примитивно рекурсивные функции $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$ такие, что

$$\widetilde{h}_k = \Phi^{\emptyset}_{\widetilde{u}(k)}(0) \text{ и } \Phi^{\emptyset}_k(0) \leq \widetilde{h}_{\widetilde{v}(k)}.$$

В частности, $A'_w \leq_{pr} B \oplus \emptyset'_w$ будет теперь следовать из

$$A'_w(n) = sg(\Phi^A_n(0)) = sg(\Phi_n^{A_{\widetilde{v}(u(n))}}(0)).$$

Можно также установить, что полученные таким образом множества A при различных $B \leq_{pr} 0'_w$ порождают неглавный идеал в pr-степенях, слабые скачки элементов которого равны $\emptyset'_w$.

Замечание 15. Построение оператора $\Phi_{f(n)}$, использованного в доказательстве теоремы, было осуществлено с помощью конечного числа операторов

$$\Phi_{u(0)}, \Phi_{u(1)}, \ldots, \Phi_{u(n)}.$$

Однако имеется возможность, увеличив элементы последовательности h_k, добиться примитивной рекурсивности предиката “$x = h_k$”, что упростит это и последующие построения операторов.

Для естественной (гёделевой) нумерации операторов $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ существует примитивно рекурсивная функция t такая, что значение $\Phi^{\emptyset}_{t(k)}(0)$ равно количеству шагов вычисления $\Phi^{\emptyset}_k(0) = \emptyset'_s(k)$ на некоторой фиксированной машине Тьюринга, вычисляющей $\emptyset'_s$. При этом предполагается выполнение неравенства $\Phi^{\emptyset}_k(0) \leq \Phi^{\emptyset}_{t(k)}(0)$. Тогда предикат “$x = \Phi^{\emptyset}_{t(k)}(0)$” будет примитивно рекурсивным. То же самое будет верно и для предиката “$x = \widetilde{h}_k$”, где

$$\widetilde{h}_k = k + \sum_{i=0}^{k} \Phi^{\emptyset}_{t(u(i))}(0).$$

При этом существование примитивно рекурсивной функции $\widetilde{u}$, для которой справедливо $\widetilde{h}_k = \Phi_{\widetilde{u}(k)}$, вместе с неравенством $\widetilde{h}_k \geq \Phi^{\emptyset}_{t(u(k))}(0) \geq \Phi^{\emptyset}_{u(k)}(0) = h_k$, позволяет при замене последовательности h_k на $\widetilde{h}_k$ получить новое доказательство теоремы с более простым по сложности оператором $\Phi_{f(n)}$.

Доказательство следующего утверждения будет использовать вышеприведенный прием.

Теорема 16. *Для каждого множества $B \leq_{pr} \emptyset''_w$ существует множество $A \leq_{pr} \emptyset'_w$ такое, что $B \oplus \emptyset'_w \equiv_{pr} A'_w$.*

Доказательство. В силу утверждения 11 из $B \leq_{pr} \emptyset''_w$ следует существование примитивно рекурсивной функции a такой, что $B(k) = \Phi^{\emptyset}_{\Phi^{\emptyset}_{a(k)}(0)}(0)$.

Пользуясь замечанием 15 определим возрастающую последовательность

$$\widetilde{h}_k = k + \sum_{i=0}^{k} \Phi^{\emptyset}_{t(u(i))}(0) + \sum_{i=0}^{k} \Phi^{\emptyset}_{t(a(i))}(0).$$

Как и ранее, будет существовать примитивно рекурсивная функция $\widetilde{u}$, для которой справедливо $\widetilde{h}_k = \Phi_{\widetilde{u}(k)}(0)$, а также неравенство $\widetilde{h}_k \geq \Phi^{\emptyset}_{t(u(k))}(0) \geq \Phi^{\emptyset}_{u(k)}(0) = h_k$. Примитивная рекурсивность предиката "$x = \widetilde{h}_k$" позволяет установить примитивную рекурсивность функции

$$\kappa(x) = \begin{cases} k, & \text{если } x = \widetilde{h}_k \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}; \\ x+1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда определение множеств A и A_n из доказательства теоремы при $h_k = \widetilde{h}_k$ можно записать следующим образом:

$$A(x) = \begin{cases} B(\kappa(x)), & \text{если } \kappa(x) \leq x; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$A_n(x) = \begin{cases} B(\kappa(x)), & \text{если } \kappa(x) \leq x \text{ и } \kappa(x) \leq n; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\Phi^A_n(0) = \Phi^{A_n}_n(0)$ следует непосредственно из $h_k \leq \widetilde{h}_k$. Повторяя теперь те же рассуждения, получим pr-эквивалентность $B \oplus \emptyset'_w \equiv_{pr} A'_w$.

Остается установить сводимость $A \leq_{pr} \emptyset'_w$. Так как для количества шагов вычисления выражения $\Phi^{\emptyset}_{a(k)}(0)$ имеет место неравенство $\Phi^{\emptyset}_{t(a(k))}(0) \leq \widetilde{h}_k$, существует примитивно рекурсивная функция c такая, что $\Phi^{\emptyset}_{a(k)}(0) = c(k, \widetilde{h}_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Но тогда для всех $x \in \mathbb{N}$ имеем

$$A(x) = \begin{cases} \Phi^{\emptyset}_{c(\kappa(x),x)}(0), & \text{если } \kappa(x) \leq x; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда следует $A \leq_{pr} \emptyset'_w$, так как $\Phi^{\emptyset}_{c(\kappa(x),x)}(0) = \emptyset'_w(c(\kappa(x), x))$. □

2. $\emptyset'_w$-пунктуально категоричные структуры

Изложим схематично построение локально конечной пунктуально категоричной структуры из работы [3].

Язык структуры $\mathcal{A}$ состоит из четырех унарных операций: c, s, p и r. Структура $\mathcal{A}$ обладает следующими свойствами:

1) Структура состоит из не пересекающихся замкнутых относительно операций конечных компонент, каждая из которых определяется своим специальным элемен-

том – *корнем* компоненты.

2) Операция r предназначена для проекции любого элемента компоненты в ее корень. Другими словами, элементы a и b содержатся в одной компоненте тогда и только тогда, когда $r(a) = r(b)$, при этом всегда выполнено $r(r(a)) = r(a)$.

3) Каждая компонента C_x с корнем x содержит *цепь* H_x длины l_x, порожденную корнем x и операцией s:

$$H_x = \{s^n(x) \mid n \leq l_x\} \subseteq C_x,$$

при этом $s^{l_x+1}(x) = s^{l_x}(x)$, а операция p позволяет переходить к предыдущему элементу цепи:

$$p(s^{n+1}(x)) = p(s^n(x)),\ p(x) = x.$$

4) Каждый элемент цепи $s^n(x)$ порождает относительно операции c конечные циклы Y_x^n, причем для каждого $z \in Y_x^n$ имеет место

$$s(z) = s^{n+1}(x),\ p(z) = p(s^n(x)).$$

5) Каждая компонента порождается своим корнем с помощью операций s и c, другими словами каждая компонента C_x представляется в виде объединения непересекающихся циклов:

$$C_x = \bigcup_{n=0}^{l_x} Y_x^n.$$

6) Длина цикла Y_x^0, соответствующего корню компоненты, называемая *меткой* компоненты, уникальна среди других компонент. Это условие делает структуру жесткой.

Длины циклов Y_x^n в структуре $\mathcal{A}$ определяются при выполнении требований пунктуальной категоричности:

$$R_k : \mathcal{A} \overset{p}{\cong} \mathcal{A}_k \implies p \text{ и } p^{-1} \text{ примитивно рекурсивны},$$

где $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \ldots$ – естественная (гёделева нумерация) пунктуальных структур в нашем унарном языке, т. е.

$$k = (k_c, k_s, k_p, k_r) \implies \mathcal{A}_k = \left(\mathbb{N}, \Phi_{k_c}^{\emptyset}, \Phi_{k_s}^{\emptyset}, \Phi_{k_p}^{\emptyset}, \Phi_{k_r}^{\emptyset}\right).$$

При построении $\mathcal{A}$ в каждый момент растет, т. е. остается незамкнутой относительно операций, лишь одна компонента, называемой *активной*. Предыдущие компоненты при этом оказываются уже замкнутыми, таким образом элементы активной компоненты оказываются большими в упорядочении натуральных чисел, чем элементы предыдущих компонент. Размер k-й по счету компоненты зависит от стратегии “прессинга” выполнения конечного числа требований $R_0, R_1, \ldots, R_k$ (остальные R-требования начнут учитываться в последующих компонентах). Детальное изложение стратегии "прессинга" можно найти в работе [3], однако здесь необходимо отметить лишь следующий факт: до того, как начнет строиться новая активная компонента, требуется, чтобы в каждой из структур $\mathcal{A}_n, n \leq k$, либо нашлась компонента, соответствующая активной компоненте в $\mathcal{A}$, либо удалось гарантировать $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{A}_n$. Если под $\widetilde{h}_k$ обозначить корень k-й компоненты, то с учетом "гёделевости" нумерации структур, это обеспечивает выполнение условий замечаний 14 и 15 из предыдущего параграфа для возрастающей последовательности $\widetilde{h}_0 < \widetilde{h}_1 < \widetilde{h}_2 < \cdots$. А именно, отношение "$x = \widetilde{h}_k$" будет примитивно рекурсивным, и должны существовать примитивно рекурсивные функции $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$, для которых выполнено

$$\widetilde{h}_k = \Phi^{\emptyset}_{\widetilde{u}(k)}(0) \ \text{ и } \ \Phi^{\emptyset}_k(0) \leq \widetilde{h}_{\widetilde{v}(k)}.$$

Указанные выше свойства стратегии "прессинга" не изменяются при рассмотрении модифицированной жесткой структуры $\mathcal{A}$ из [7] (построенной для доказательства теоремы 3), удовлетворяющей для каждого $k \in \mathbb{N}$ требованию:

$$R_k : \mathcal{A} \overset{p}{\cong} \mathcal{A}_k \implies p \text{ и } p^{-1} \text{ примитивно рекурсивно ограниченны,}$$

и имеющей пунктуальную копию $\mathcal{B} \overset{f}{\cong} A$ такую, что

$$N_k : f \neq \Phi^{\emptyset}_k$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Теперь структура $\mathcal{A}$ имеет одну дополнительную унарную операцию i, являющуюся инволюцией ($i^2 = \mathrm{id}$), и один унарный предикат D, так что в требовании R_k предполагается, что

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_{(k_c, k_s, k_p, k_r, k_i, k_D)} = \left(\mathbb{N}, \Phi^{\emptyset}_{k_c}, \Phi^{\emptyset}_{k_s}, \Phi^{\emptyset}_{k_p}, \Phi^{\emptyset}_{k_r}, \Phi^{\emptyset}_{k_i}, sg(\Phi^{\emptyset}_{k_D})\right).$$

Основное отличие от предыдущего построения заключается в наличии у каждой компоненты C_x парной ей компоненты $C'_x = C_{i(x)}$, при этом инволюция i осуществляет изоморфизм между конечными подструктурами C_x и $C_{i(x)}$ в исходном языке $\{c, s, p, r\}$. Однако за счет дополнительного предиката D структура остается жесткой:

$$y = s^{l_{r(y)}}(r(y)) \iff D(y) \neq D(i(y))$$

для всех элементов y, т. е. D отличает C_x от $C_{i(x)}$ на последних элементах цепей H_x и $H_{i(x)}$.

Изоморфные структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ строятся одновременно и практически идентично, если не учитывать унарный предикат D. В каждый момент построения

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, c, s, p, r, i, D) \ \text{ и } \ \mathcal{B} = (\mathbb{N}, c, s, p, r, i, D^{\mathcal{B}})$$

теперь имеются две активные парные компоненты: C_x и $C_{i(x)}$ в каждой из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, пусть для определенности $x < i(x)$ относительно естественного порядка натуральных чисел. Такое изменение не влечет существенных изменений в стратегию "прессинга" для имеющих более слабый вид требований R_k: вместо изоморфизма между структурами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_k$ будет построен изоморфизм q для исходного языка $\{c, s, p, r\}$, являющийся, как и прежде, вместе обратным изоморфизмом q^{-1} примитивно рекурсивным. Но тогда для настоящего изоморфизма p будут справедливы примитивно рекурсивные оценки

$$p(z) \leq \max(q(z), q(i(z))) \text{ и } p^{-1}(z) \leq \max(q^{-1}(z), i(q^{-1}(z))).$$

Наименьший корень k-й пары компонент в $\mathcal{A}$ будем обозначать через x_k. Также для сохранения связей с предыдущим параграфом будем считать $\widetilde{h}_k = x_k$.

Основная цель построения активной k-й пары компонент – добиться выполнения требования N_k с учетом требований $R_k, n \leq k$. Для этого компоненты остаются активными до тех пор, пока не будет вычислено значение

$$\Phi_k^{\emptyset}(x_k) = \Phi_k^{\emptyset}(\widetilde{h}_k) = \Phi_k^{\emptyset}(\Phi_{\widetilde{u}(k)}^{\emptyset}(0)) = \Phi_{Fs(k,1,\widetilde{u}(k))}^{\emptyset}(0) = \emptyset_s'(Fs(k, 1, \widetilde{u}(k)))$$

на фиксированной машине Тьюринга вычисления $\emptyset_s'$. При этом на всех новых элементах обоих компонент в обеих структурах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ полагаем предикат D равным нулю. Если $\Phi_k^{\emptyset}(x_k)$ будет вычислено и, при этом, стратегии "прессинга" для требований $R_k, n \leq k$, найдут все необходимые соответствия между корнями компонент, то можем добавить в цепи компонент последний l-й элемент, определяя при этом

$$D(s^l(x_k)) = D^{\mathcal{B}}(s^l(i(x_k))) \neq D(s^l(i(x_k))) = D^{\mathcal{B}}(s^l(x_k)),$$

если $\Phi_k^{\emptyset}(x_k) = x_k$, и

$$D(s^l(x_k)) = D^{\mathcal{B}}(s^l(x_k)) \neq D(s^l(i(x_k))) = D^{\mathcal{B}}(s^l(i(x_k))),$$

в противном случае. Ясно, что такое определение обеспечит выполнение требования N_k.

Анализируя построение в целом, применяя примитивно рекурсивную функцию t из замечания 15 к номерам примитивно рекурсивных функций, участвующих в требованиях N_k и $R_k, n \leq k$, можем для каждого $k \in \mathbb{N}$ примитивно рекурсивно указать номера $\widetilde{u}(k)$ и $\widetilde{l}(k)$ такие, что

$$\Phi_{\widetilde{u}(k)}^{\emptyset}(0) = \widetilde{h}_k = x_k \text{ – наименьший корень } k\text{-й пары компоненты,}$$
$$\Phi_{\widetilde{l}(k)}^{\emptyset}(0) = l \text{ – длина цепей в } k\text{-й паре компонент.}$$

При этом, как и ранее, для возрастающей последовательности $\widetilde{h}_0 < \widetilde{h}_1 < \widetilde{h}_2 < \cdots$ отношение "$x = \widetilde{h}_k$" будет примитивно рекурсивным.

Теперь мы можем сформулировать и доказать основные результаты этого параграфа.

Теорема 17. *Существует $\emptyset'_w$-пунктуально категоричная, но не пунктуально категоричная локально конечная жесткая структура $\mathcal{A}$. При этом из того, что p – изоморфизм из $\mathcal{A}$ на пунктуальную структуру $\mathcal{C}$, следует $p'_w \equiv_{pr} \emptyset'_w$.*

Доказательство. Структура $\mathcal{A}$, описанная выше, не является пунктуально категоричной в силу выполнения всех требований N_k, $k \in \mathbb{N}$. Остается доказать $p_w \leq_{pr} \emptyset'_w$ для изоморфизма p из $\mathcal{A}$ на пунктуальную структуру

$$\mathcal{C} = (\mathbb{N}, c^{\mathcal{C}}, s^{\mathcal{C}}, p^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}}, i^{\mathcal{C}}, D^{\mathcal{C}}) = \mathcal{A}_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Из вышеизложенного следует, что тогда существует изоморфизм q из структуры $\mathcal{A}$, обедненной языком $\{c, s, p, r\}$, на обеднение структуры $\mathcal{C}$, такой что q и q^{-1} – примитивно рекурсивны. При этом

$$p(z) \in \{q(z), q(i(z))\} \ \text{ и } \ p^{-1}(z) \in \{q^{-1}(z), q^{-1}(i^{\mathcal{C}}(z))\}$$

для всех $z \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $p \equiv_{pr} p^{-1}$, так как имеем

$$p(z) = q(z) \iff p^{-1}(q(z)) = z,$$

и

$$p^{-1}(z) = q^{-1}(z) \iff p(q^{-1}(z)) = z.$$

Кроме того, в силу

$$p(z) = q(z) \iff p(r(z)) = q(r(z)) \iff p(i(r(z))) = q(i(r(z))),$$

значения $p(z)$ определяется примитивно рекурсивным образом через значения в $p(r(\widetilde{h}_k))$ в наименьших корнях $\min(r(z), i(r(z))) = \widetilde{h}_k, k \in \mathbb{N}$, соответствующих пар компонент. Тогда, полагая

$$B_p(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } p(\widetilde{h}_k) = q(\widetilde{h}_k); \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

получим pr-эквивалентность $p \equiv_{pr} A_p$, где множество A_p имеет вид

$$A_p(z) = \begin{cases} B_p(k), & \text{если } z = \widetilde{h}_k \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Учитывая доказательство теоремы 12 вместе с замечаниями, остается убедиться в сводимости $B_p \leq_{pr} \emptyset'_w$. Действительно, по построению $\mathcal{A}$ имеем

$$B_p(k) = 1 \iff D(s^{l_k}(\widetilde{h}_k)) = D^{\mathcal{C}}((s^{\mathcal{C}})^{l_k}(q(\widetilde{h}_k))),$$

где $l_k = \Phi^{\emptyset}_{\widetilde{l}(k)}(0)$ – длина цепей в k-й паре компонент. Примитивная рекурсивность функций $\widetilde{l}$ и $\widetilde{u}$, $\Phi^{\emptyset}_{\widetilde{u}(k)}(0) = \widetilde{h}_k$, позволяет найти примитивно рекурсивную функцию $e(k)$, такую, что

$$B_p(k) = \Phi^{\emptyset}_{e(k)}(0) = \emptyset'_w(e(k))$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, $p'_w \equiv_{pr} (A_p)'_w \equiv_{pr} B_p \oplus \emptyset'_w \equiv_{pr} \emptyset'_w$. □

Замечание 14 к теореме 12 позволяет предположить, что используемая в этом параграфе методика не может привести к структуре, имеющей точную степень пунктуальной категоричности $\emptyset'_w$. Мы можем лишь с помощью идеи доказательства теоремы 16 сократить разрыв между верхней оценкой $\emptyset'_w$ и полученной оценкой $p'_w \equiv_{pr} \emptyset'_w$ каждого изоморфизма p между пунктуальными копиями структуры.

Теорема 18. *Существуют $\emptyset'_w$-пунктуально категоричная локально конечная жесткая структура $\mathcal{A}$ и ее пунктуальная копия $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$, такие, что для изоморфизма f из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$ выполнено $f'_w \equiv_{pr} \emptyset''_w$.*

Доказательство. По утверждению 11 из предыдущего параграфа имеется примитивно рекурсивная функция a такая, что $\emptyset''_w(k) = \Phi^{\emptyset}_{\Phi^{\emptyset}_{a(k)}(0)}(0)$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Модифицируем следующим образом рассмотренную ранее алгебраическую структуру $\mathcal{A}$.

1) Унарный предикат D заменяется на бинарный предикат D, при этом жесткость структуры достигается условием

$$\forall z\ \exists y\ [D(r(z), y) = D(r(z), i(y)) \neq D(r(i(z)), y) = D(r(i(z)), i(y))].$$

При построении структур $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ мы по умолчанию полагаем

$$D(z, y) = D(z, i(y)) = D^{\mathcal{B}}(z, y) = D^{\mathcal{B}}(z, i(y)) = 0,$$

если не оговорено противное.

2) При построении активной компоненты вместо вычисления значения $\Phi^{\emptyset}_k(x_k)$ совершается вычисление $\Phi^{\emptyset}_{a(k+1)}(0)$. Компонента перестает быть активной только если это значение уже вычислено. Данное условие дает оценку $\Phi^{\emptyset}_{t(a(k))}(0) \leq \widetilde{h}_k$ при $k > 0$, где как и ранее $\Phi^{\emptyset}_{t(a(k))}(0)$ – количество шагов вычисления $\Phi^{\emptyset}_{a(k)}(0)$, а $\widetilde{h}_k$ – наименьший корень k-й пары компонент.
3) Для каждого нового корня $\widetilde{h}_k$ начинается вычисление $\emptyset''_w(k) = \Phi^{\emptyset}_{\Phi^{\emptyset}_{a(k)}(0)}(0)$, совершающееся параллельно со всеми другими вычислениями и построениями. Как только это вычисление завершается, мы начинаем определять

$$D(\widetilde{h}_k, y) = D(\widetilde{h}_k, i(y)) = 1, \quad D(i(\widetilde{h}_k), y) = D(i(\widetilde{h}_k), i(y)) = 0,$$
$$D^{\mathcal{B}}(\widetilde{h}_k, y) = D^{\mathcal{B}}(\widetilde{h}_k, i(y)) = \emptyset''_w(k), \quad D^{\mathcal{B}}(i(\widetilde{h}_k), y) = D^{\mathcal{B}}(i(\widetilde{h}_k), i(y)) = 1 \dot{-} \emptyset''_w(k)$$

для всех новых аргументов, на которых указанные значение D и $D^{\mathcal{B}}$ еще не определены. Тогда для изоморфизма f из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$ будем иметь

$$\emptyset''_w(k) = 1 \iff f(\widetilde{h}_k) = \widetilde{h}_k \iff f(\Phi^{\emptyset}_{\widetilde{u}(k)}(0)) = \Phi^{\emptyset}_{\widetilde{u}(k)}(0),$$

откуда немедленно получаем $\emptyset''_w \leq_{pr} f'_w$.

Остается проверить $p \leq_{pr} \emptyset'_w$ для изоморфизма p из $\mathcal{A}$ на произвольную пунктуальную структуру $\mathcal{C} = \mathcal{A}_n$. Исходя из предыдущего доказательства, будем иметь $p \equiv_{pr} A_p$, где множество A_p имеет вид

$$A_p(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z = \widetilde{h}_k \text{ для некоторого } k \leq z \text{ и } p(z) = q(z); \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где q – примитивно рекурсивный изоморфизм обедненных структур.

Аналогично доказательству теоремы 16 из неравенства $\Phi^{\emptyset}_{t(a(k))}(0) \leq \widetilde{h}_k$ при $k > 0$ следует существование примитивно рекурсивной функции c такой, что $\Phi^{\emptyset}_{a(k)}(0) = c(k, \widetilde{h}_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ (для случая $k = 0$ функцию c можно доопределить отдельно).

Если $z = \widetilde{h}_k$, то можем считать что число $y_z = z + \Phi^{\emptyset}_{t(c(k,z))}(0)$ достаточно велико, чтобы наше построение не успело определить по умолчанию $D(z, y) = 0$ до момента вычисления $\Phi^{\emptyset}_{c(k,z)}(0) = \emptyset''_w(k)$. Тогда существует примитивно рекурсивная функция e такая, что

$$p(z) = q(z) \iff D(z, y_z) = D^{\mathcal{C}}(q(z), q(y_z)) \iff \emptyset'_w(e(z)) = 1,$$

откуда в силу примитивной рекурсивности отношения “$z = \widetilde{h}_k$” следует $p \equiv_{pr} A_p \leq_{pr} \emptyset'_w$. □

Список литературы

[1] D. Cenzer, J. Remmel, *Polynomial-time abelian groups*, Ann. Pure Appl. Log. **56** (1–3), 313–363 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1016/0168-0072(92)90076-C

[2] D. Cenzer, R.G. Downey, J.B. Remmel, Z. Uddin, *Space complexity of Abelian groups*, Arch. Math. Log. **48** (1), 115–140 (2009).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00153-008-0113-3

[3] I.Sh. Kalimullin, A.G. Melnikov, K.M. Ng, *Algebraic structures computable without delay*, Theoret. Comput. Sci. **674**, 73–98 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2017.01.029

[4] N.A. Bazhenov, R.G. Downey, A.G. Melnikov, I.Sh. Kalimullin, *Foundations of online structure theory*, Bull. Symb. Log. **25** (2), 141–181 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1017/bsl.2019.20

[5] И.Ш. Калимуллин, А.Г. Мельников, К.М. Нг, *Различные версии категоричности без задержек*, Алгебра и логика **56** (2), 256–256 (2017).
DOI: https://doi.org/10.17377/alglog.2017.56.207

[6] E.B. Fokina, I. Kalimullin, R. Miller, *Degrees of categoricity of computable structures*, Arch. Math. Log. **49** (1), 51–67 (2010).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00153-009-0160-4

[7] I.Sh. Kalimullin, A.G. Melnikov, *Punctual categoricity relative to a computable oracle*, Lobachevskii J. Math. **42** (4), 735–742 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221040107

[8] Р.И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Казан. матем. о-во, Казань, 2000.

[9] S.C. Kleene, *Extension of an effectively generated class of functions by enumeration*, Colloq. Math. **6** (1), 68–78 (1958).

[10] A. Urquhart, *The complexity of decision procedures in relevance logic* II, J. Symb. Log. **64** (4), 1774–1802 (1999).
DOI: https://doi.org/10.2307/2586811

[11] S. Schmitz, *Complexity hierarchies beyond elementary*, ACM Trans. Comput. Theory, **8** (1), Article 3, 1–36 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1145/2858784

[12] W. Czerwiński, Ł. Orlikowski, *Reachability in vector addition systems is Ackermann-complete*, 2021 IEEE 62nd Annual symposium on foundations of computer science (FOCS), Denver, CO, USA, 1229–1240 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1109/FOCS52979.2021.00120

[13] J. Leroux, *The Reachability problem for Petri nets is not primitive recursive*, 2021 IEEE 62nd Annual symposium on foundations of computer science (FOCS), Denver, CO, USA, 1241–1252 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1109/FOCS52979.2021.00121

[14] L. Kristiansen, *Information content and computational complexity of recursive sets*, Gödel '96: Logical foundations of mathematics, computer science and physics – Kurt Gödel's legacy. Lecture Notes in Logic, 235–246 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1017/9781316716939.018

Искандер Шагитович Калимуллин
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: Iskander.Kalimullin@kpfu.ru

Александра Алексеевна Курмачева
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: xsanca@mail.ru

Volume 2, Issue 2
pp. 47–69 (2024)

UDC 510.54, 510.57
MSC 03D45, 03D25

Punctual categoricity and a jump operation in the primitive recursive degrees

I.Sh. Kalimullin, A.A. Kurmacheva

Abstract. The paper is devoted to the study of punctual structures such that any isomorphism between any of its punctual copies is primitive recursively reducible to a fixed $0,1$-valued oracle function. To estimate the complexity of such punctual structures and isomorphisms between them we introduce and investigate the weak ($0,1$-valued) jump operation. In the paper we establish that there is a rigid punctual structure for which all isomorphisms are low under the weak jump, and at least one of them is not primitive recursive. Also we construct a rigid punctual structure with every isomorphism reducible to the weak jump of the zero function, and with at least one having a high degree.

Keywords: primitive recursive reducibility, punctual categorcity, jump operation.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.47-69

References

[1] D. Cenzer, J. Remmel, *Polynomial-time abelian groups*, Ann. Pure Appl. Log. **56** (1–3), 313–363 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1016/0168-0072(92)90076-C

[2] D. Cenzer, R.G. Downey, J.B. Remmel, Z. Uddin, *Space complexity of Abelian groups*, Arch. Math. Log. **48** (1), 115–140 (2009).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00153-008-0113-3

[3] I.Sh. Kalimullin, A.G. Melnikov, K.M. Ng, *Algebraic structures computable without delay*, Theoret. Comput. Sci. **674**, 73–98 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2017.01.029

[4] N.A. Bazhenov, R.G. Downey, A.G. Melnikov, I.Sh. Kalimullin, *Foundations of online structure theory*, Bull. Symb. Log. **25** (2), 141–181 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1017/bsl.2019.20

Acknowledgements. The work is supported by the grant of the «BASIS» Foundation. Also the results of the first paragraph were performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2024-1438).

Received: 07 June 2024. Accepted: 02 July 2024. Published: 16 July 2024.

[5] I.S. Kalimullin, A.G. Melnikov, K.M. Ng, *The diversity of categoricity without delay*, Algebra Logic **56** (2), 171–177 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-017-9437-6

[6] E.B. Fokina, I. Kalimullin, R. Miller, *Degrees of categoricity of computable structures*, Arch. Math. Log. **49** (1), 51–67 (2010).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00153-009-0160-4

[7] I.Sh. Kalimullin, A.G. Melnikov, *Punctual categoricity relative to a computable oracle*, Lobachevskii J. Math. **42** (4), 735–742 (2021).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221040107

[8] R.I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987.
URL: https://link.springer.com/book/9783540666813

[9] S.C. Kleene, *Extension of an effectively generated class of functions by enumeration*, Colloq. Math. **6** (1), 68–78 (1958).

[10] A. Urquhart, *The complexity of decision procedures in relevance logic* II, J. Symb. Log. **64** (4), 1774–1802 (1999).
DOI: https://doi.org/10.2307/2586811

[11] S. Schmitz, *Complexity hierarchies beyond elementary*, ACM Trans. Comput. Theory, **8** (1), Article 3, 1–36 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1145/2858784

[12] W. Czerwiński, Ł. Orlikowski, *Reachability in vector addition systems is Ackermann-complete*, 2021 IEEE 62nd Annual symposium on foundations of computer science (FOCS), Denver, CO, USA, 1229–1240 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1109/FOCS52979.2021.00120

[13] J. Leroux, *The Reachability problem for Petri nets is not primitive recursive*, 2021 IEEE 62nd Annual symposium on foundations of computer science (FOCS), Denver, CO, USA, 1241–1252 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1109/FOCS52979.2021.00121

[14] L. Kristiansen, *Information content and computational complexity of recursive sets*, Gödel '96: Logical foundations of mathematics, computer science and physics – Kurt Gödel's legacy. Lecture Notes in Logic, 235–246 (1996).
DOI: https://doi.org/10.1017/9781316716939.018

Iskander Shagitovich Kalimullin
Kazan Federal University,
Department of Algebra and Mathematical Logic,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: Iskander.Kalimullin@kpfu.ru

Alexandra Alekseevna Kurmacheva
Kazan Federal University,
Department of Algebra and Mathematical Logic,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: xsanca@mail.ru

Том 2, Выпуск 2
Стр. 70–83 (2024)

УДК 515.122
MSC 54D35, 54D10

К теории H-собранных пространств. II

М.И. Кудряшова, М.В. Швидефски

Аннотация. Мы показываем, что обобщенные собрификации аппроксимационных пространств гомеоморфны пространствам специальных базисных идеалов исходных пространств. Используя эту характеризацию, мы обобщаем ряд известных результатов о собрификациях аппроксимационных пространств.

Ключевые слова: аппроксимационное пространство, собранное пространство, T_0-пространство.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.70-83

Введение

Понятие H-собранности было введено С. Сю в работе [1] как удобное обобщение многих широко известных понятий в теории топологических T_0-пространств. Среди них можно отметить, например, так называемые направленно полные пространства или d-пространства, вполне фильтрованные пространства, собранные пространства и так далее, см. [2–4]. Это дало унифицированный подход к изучению всех подобных понятий.

Настоящая работа является продолжением работы [5]. В [5] были описаны H-собрификации T_0-пространств для I-систем H, а также были получены характеризации H-собранных пространств. Нашей главной целью здесь является описание строения H-собрификаций α-пространств, см. раздел 2. Мы делаем это, используя подход Ю.Л. Ершова, представленный в его недавней монографии [6]. В [7] Ю.Л. Ершов доказал, что так называемый d-ранг α-пространства не превосходит 1. Здесь, основываясь на характеризации H-собрификаций с использованием идеалов базисных подпространств, представленной в теореме 8, мы даем обобщение этого утверждения для произвольной I-системы H в теореме 10 и следствии 13, см. также следствие 12. Мы также даем обобщения для ряда результатов из глав 5 и 8 в монографии [6].

Наша терминология по T_0-пространствам соответствует монографиям Ю.Л. Ершова [6], Г. Гирца *и др.* [2], а также Ж. Губоль-Ларрека [8]. За всеми понятиями и обозначениями, не определенными здесь, мы отсылаем читателя к [5, 6].

Благодарности. Работа была поддержана Российским научным фондом, проект № 24-11-00227.

Поступила: 10.06.2024. Принята: 02.07.2024. Опубликована: 16.07.2024.

1. Понятие H-собранности

Для топологического T_0-пространства $\mathbb{X}$ рассмотрим следующие семейства подмножеств в X:

- $\mathsf{I}(\mathbb{X})$, множество всех непустых неприводимых подмножеств в X;
- $\mathsf{S}(\mathbb{X})$, множество всех одноэлементных подмножеств в X;
- $\mathsf{D}(\mathbb{X})$, множество всех непустых направленных вверх подмножеств в X;
- $\mathsf{WF}(\mathbb{X})$, множество всех непустых вполне фильтрованных подмножеств в X;
- $\mathsf{R}(\mathbb{X})$, множество всех непустых подмножеств Рудина в X;
- $\mathsf{I}^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных неприводимых подмножеств в X;
- $\mathsf{D}^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных направленных вверх подмножеств в X;
- $\mathsf{WF}^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных вполне фильтрованных подмножеств в X;
- $\mathsf{R}^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных подмножеств Рудина в X.

Определение 1 ([1])**.** Ковариантный функтор $\mathsf{H}\colon \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{Set}$ называется *системой подмножеств*, если $\mathsf{S}(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{H}(\mathbb{X}) \subseteq 2^X$ и для любого пространства $\mathbb{Y} \in \mathbf{Top}_0$ и любого непрерывного отображения $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ имеет место равенство $\mathsf{H}(f)(A) = f(A) \in \mathsf{H}(\mathbb{Y})$ для всех $A \in \mathsf{H}(\mathbb{X})$.

Система подмножеств H называется *неприводимой системой* или просто *I-системой*, если $\mathsf{H}(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{I}(\mathbb{X})$ для всех $\mathbb{X} \in \mathbf{Top}_0$.

Из определения 1 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Если* $\mathsf{X} \in \{\mathsf{D}, \mathsf{D}^b, \mathsf{WF}, \mathsf{WF}^b, \mathsf{R}, \mathsf{R}^b, \mathsf{I}, \mathsf{I}^b\}$*, то* X *является I-системой.*

Для системы подмножеств H полагаем $\mathsf{H}_c(\mathbb{X}) = \big\{\mathrm{cl}_{\mathbb{X}}\, A \mid A \in \mathsf{H}(\mathbb{X})\big\}$.

Определение 3 ([1])**.** Пусть H – система подмножеств. T_0-пространство $\mathbb{X}$ называется H-*собранным*, если $\mathsf{H}_c(\mathbb{X}) = \mathsf{S}_c(\mathbb{X})$.

Непосредственно видно, что класс всех S-собранных пространств совпадает с классом всех T_0-пространств, а класс всех I-собранных пространств совпадает с классом всех собранных пространств.

Определение 4. Пусть H – система подмножеств. Следуя Ю.Л. Ершову [9], назовем H-*рангом* топологического пространства $\mathbb{X}$ наименьший ординал κ такой, что пространство $\mathbb{X}_\kappa$, построенное в доказательстве [5, теорема 17], является H-собранным.

2. H-собрификации α-пространств

Для расширения $\mathbb{Y} \leq \mathbb{X}$ T_0-пространств и для элемента $x \in X$ полагаем

$$\downarrow\!\!\downarrow x = \{y \in X \mid y \prec_{\mathbb{X}} x\} \quad \text{и} \quad \downarrow\!\!\downarrow_{\mathbb{Y}} x = \{y \in Y \mid y \prec_{\mathbb{X}} x\}.$$

Лемма 5. *Пусть $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$. Пусть также $\mathbb{Z}$ – T_0-пространство и пусть отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ непрерывно. Тогда $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}}\, f(\downarrow\!\!\!\!\downarrow_{\mathbb{Y}} x) = \downarrow f(x)$. В частности, если H является I-системой, то $\downarrow\!\!\!\!\downarrow_{\mathbb{Y}} x \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$.*

Доказательство. Так как $f(\downarrow\!\!\!\!\downarrow x) \subseteq \downarrow f(x)$, мы заключаем, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}}\, f(\downarrow\!\!\!\!\downarrow_{\mathbb{Y}} x) \subseteq \downarrow f(x)$. Для доказательства обратного включения достаточно показать, что $f(x)$ является предельной точкой множества $f(\downarrow\!\!\!\!\downarrow_{\mathbb{Y}} x)$. Действительно, пусть $f(x) \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{Z})$. Тогда $x \in f^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Так как $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$, существует элемент $y \in Y$ такой, что $y \in \downarrow\!\!\!\!\downarrow_{\mathbb{Y}} x \cap f^{-1}(U)$. Следовательно, $f(y) \in U$, откуда и следует требуемое заключение.

Последнее утверждение непосредственно следует из первого. □

Определение 6. Пусть $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$. Множество $J \subseteq Y$ называется $\mathbb{Y}$-*идеалом* в $\mathbb{X}$, если следующие свойства выполняются для всех $y_0, y_1 \in Y$:

(1) если $y_0 \leq y_1 \in J$, то $y_0 \in J$;

(2) если $y_0, y_1 \in J$, то существует $y \in J$ такой, что $y_0 \prec y$ и $y_1 \prec y$.

Через $I(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ мы обозначаем множество всех $\mathbb{Y}$-идеалов в $\mathbb{X}$. Если H является I-системой, то через $I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ мы обозначаем множество всех $\mathbb{Y}$-идеалов в $\mathbb{X}$, которые принадлежат семейству $\mathsf{H}^d(\mathbb{X})$.

Определим на множестве $I(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ топологию $\mathcal{T}^\sharp$ базисом открытых множеств вида

$$V_F = \bigl\{J \in I(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \mid F \subseteq J\bigr\}, \quad \text{где множество } F \subseteq Y \text{ конечно.}$$

Пусть $\mathcal{T}_H^\sharp$ обозначает ограничение $\mathcal{T}^\sharp$ на $I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Обозначим полученные топологические пространства через $\mathbb{I}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ и $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ соответственно.

Пусть $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$ и пусть H является I-системой. Рассмотрим следующее отображение:

$$\iota_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}\colon \mathbb{X} \to \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}); \quad \iota_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}\colon x \mapsto \downarrow\!\!\!\!\downarrow_{\mathbb{Y}} x.$$

Ввиду леммы 5 отображение $\iota_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$ определено корректно.

Следующее утверждение обобщает [6, теорема 5.7.2].

Теорема 7. *Пусть $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$ и пусть H является I-системой. Тогда*

(1) *$\iota_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$ является гомеоморфным вложением $\mathbb{X}$ в $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$;*

(2) *$\iota_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}(\mathbb{Y})$ является базисным подпространством в $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.*

(3) *$\iota_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}(\mathbb{X})$ является H^d-базисом для $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.*

Доказательство. Для краткости мы используем в этом доказательстве обозначение ι вместо $\iota_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$ и $\mathbb{I} = \langle I, \mathcal{T}_H^\sharp\rangle$ вместо $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Тот факт, что отображение $\iota\colon \mathbb{X} \to \mathbb{I}$ определено корректно, вытекает из леммы 5.

(1) Пусть $x_0 \nleq x_1$ в $\mathbb{X}$, т. е. существует $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ такое, что $x_0 \in U$ и $x_1 \notin U$. Так как $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$, найдется $x_0' \in Y \cap U \cap \downarrow\!\!\!\!\downarrow x_0$. Отсюда следует,

что $x'_0 \not\leqslant x_1$, поэтому $x'_0 \notin \Downarrow x_1$. Таким образом, отображение ι взаимно-однозначно. Покажем, что ι непрерывно. Для этого достаточно доказать, что прообраз каждого базисного открытого множества из $\mathcal{T}_H^\sharp$ открыт в пространстве $\mathbb{X}$. Рассмотрим произвольное конечное множество $F \subseteq Y$. Тогда

$$\iota^{-1}(V_F) = \{x \in X \mid F \subseteq \Downarrow_{\mathbb{Y}} x\} = \bigcap_{f \in F} \operatorname{int} \uparrow f \in \mathcal{T}(\mathbb{X}),$$

поскольку множество F конечно. Заметим, что $U = \bigcup_{u \in U \cap Y} \operatorname{int} \uparrow u$ для каждого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Действительно, если $x \in U$, то существует $u \in U \cap Y \cap \Downarrow x$, поскольку $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$, откуда $x \in \operatorname{int} \uparrow u$. Обратное включение очевидно. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\iota(U) &= \bigcup_{u \in U \cap Y} \iota(\operatorname{int} \uparrow u) = \bigcup_{u \in U \cap Y} \{\Downarrow_{\mathbb{Y}} x \mid x \in \operatorname{int} \uparrow u\} = \bigcup_{u \in U \cap Y} \{\Downarrow_{\mathbb{Y}} x \mid u \in \Downarrow_{\mathbb{Y}} x\} \\ &= \bigcup_{u \in U \cap Y} \iota(X) \cap V_{\{u\}} \in \mathcal{T}_H^\sharp \cap \iota(X).\end{aligned}$$

Поэтому получаем, что ι является гомеоморфным вложением.

(2) Докажем сначала, что $\iota(j) \prec_{\mathbb{I}} J$ для всех $J \in I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ и всех $j \in J$. Действительно, непосредственно видно, что $J \in V_{\{j\}} \in \mathcal{T}_H^\sharp$. Более того, $j \in J'$ для каждого $J' \in V_{\{j\}}$, поэтому $\iota(j) \subseteq J'$. Это означает, что $J \in V_{\{j\}} \subseteq \uparrow \iota(j)$, что и доказывает требуемое утверждение.

Далее, пусть F является конечным подмножеством в Y и пусть $J \in V_F \in \mathcal{T}_H^\sharp$ для некоторого $J \in I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Это означает, что $F \subseteq J$. Если $F = \varnothing$, то $\iota(j) \prec_{\mathbb{I}} J$ и $\iota(j) \in V_F = I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ для всех $j \in J$. Если $F \neq \varnothing$, то существует $j \in J$ такой, что $f \prec_{\mathbb{X}} j$ для всех $f \in F$, так как J является $\mathbb{Y}$-идеалом. Как и выше, мы заключаем, что $\iota(j) \prec_{\mathbb{I}} J$. Более того, $F \subseteq \iota(j)$, откуда $\iota(j) \in V_F$.

(3) Возьмем произвольный $\mathbb{Y}$-идеал $J \in I$ и рассмотрим множество $A = \{\Downarrow_{\mathbb{Y}} y \mid y \in J\}$; тогда $A \subseteq \downarrow_{\mathbb{I}} J$. Пусть $\mathbb{Z}$ – H-собранное пространство и пусть отображение $f\colon \iota(\mathbb{X}) \to \mathbb{Z}$ непрерывно. Рассмотрим отображение $f'\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$, $f'\colon x \mapsto f\iota(x)$. Тогда f' также непрерывно. Так как $J \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$, существует $z \in Z$ такой, что $\downarrow z = \operatorname{cl}_{\mathbb{Z}} f'(J) = \operatorname{cl}_{\mathbb{Z}} f(A)$, так как ι является гомеоморфным вложением согласно утверждению (1). Следовательно $A \in \mathsf{H}^d\big(\iota(\mathbb{X})\big)$. Наконец, пусть $J \in V_F$ для некоторого конечного множества $F \subseteq Y$, т. е. $F \subseteq J$. Поскольку множество F конечно, мы получаем по определению $\mathbb{Y}$-идеала, что существует $a \in J$ такой, что $F \subseteq \Downarrow_{\mathbb{X}} a$, поэтому $\Downarrow_{\mathbb{X}} a \in A \cap V_F$ и, следовательно, $J \in \operatorname{cl}_{\mathbb{I}} A$. Это влечет равенство $\downarrow_{\mathbb{I}} J = \operatorname{cl}_{\mathbb{I}} A$. Доказательство утверждения (3) завершено. □

Следующая теорема обобщает [6, предложение 5.7.3].

Теорема 8. *Пусть $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$ и пусть* H *является I-системой. Тогда $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \cong \mathbb{S}_H(\mathbb{X})$.*

Доказательство. Рассмотрим два отображения

$$\varphi\colon \mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \to \mathbb{S}_H(\mathbb{X}); \quad \varphi\colon I \mapsto \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} I;$$
$$\psi\colon \mathbb{S}_H(\mathbb{X}) \to \mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{Y}); \quad \psi\colon A \mapsto \bigcup_{a\in A} \downarrow\!\!\downarrow_{\mathbb{X}} a \cap Y.$$

Покажем, что φ и ψ являются взаимно обратными гомеоморфизмами.

Утверждение 1. *Отображения φ и ψ определены корректно.*

Доказательство утверждения. Покажем, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} I \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ для каждого $I \in I_H(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Действительно, рассмотрим произвольное H-собранное пространство $\mathbb{Z}$ и непрерывное отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$. Так как $I \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$, то $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(I) = {\downarrow} z$ для некоторого $z \in Z$. В силу [6, лемма 1.5.1(iii)] имеем $f(\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} I) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(I)$, поэтому $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} I) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(I)$. С другой стороны, очевидно, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(I) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} I)$, поэтому ${\downarrow} z = \mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(I) = \mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} I)$. Это означает, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} I \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$, т. е. отображение φ определено корректно.

Докажем теперь, что ψ также корректно определено. Для этого рассмотрим произвольное множество $A \in S_H(X)$. Если $y \leq x \in \psi(A)$ для некоторого $y \in Y$, то существует $a \in A$ такой, что $y \leq x \prec a$, т. е. $y \prec a$ и $y \in \psi(A)$. Если $y_0, y_1 \in \psi(A)$, то найдутся элементы $a_i \in \mathrm{int}\,{\uparrow} y_i \cap A$, $i < 2$. Согласно [5, лемма 4], $\mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ является I-системой. Таким образом, A является неприводимым множеством, поэтому существует $a \in \mathrm{int}\,{\uparrow} y_0 \cap \mathrm{int}\,{\uparrow} y_1 \cap A$. Так как $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$, существует $b \in Y$ такой, что $b \in \mathrm{int}\,{\uparrow} y_0 \cap \mathrm{int}\,{\uparrow} y_1 \cap \downarrow\!\!\downarrow_{\mathbb{X}} a$. Отсюда следует, что $b \in \psi(A)$ и $y_0 \prec b$, $y_1 \prec b$. Поэтому $\psi(A)$ является $\mathbb{Y}$-идеалом.

Наконец, остается показать, что $\psi(A) \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$. Мы докажем сначала равенство $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} \psi(A) = \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} A$. Так как $\psi(A) \subseteq {\downarrow} A$, мы получаем, что $\psi(A) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} A$ и $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} \psi(A) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} A$. Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} A$ и предположим, что $x \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Тогда найдется $a \in A \cap U$. Поскольку $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$, существует $y \in Y \cap U \cap \downarrow\!\!\downarrow_{\mathbb{X}} a$. Но тогда $y \in \psi(A)$ и $x \in \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} \psi(A)$. Следовательно, $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} A \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} \psi(A)$, и справедливо искомое равенство $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} \psi(A) = \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} A$. Принимая во внимание включение $A \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$, мы получаем, что $\psi(A) \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ в силу [5, лемма 5]. Таким образом, $\psi(A) \in I_H(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, что и требовалось. $\square$

Утверждение 2. *Отображение φ непрерывно.*

Доказательство утверждения. Для каждого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ имеем

$$\varphi^{-1}(U^*) = \big\{J \in I_H(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \mid \varphi(J) \cap U \neq \varnothing\big\} = \big\{J \in I_H(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \mid \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} J \cap U \neq \varnothing\big\}$$
$$= \big\{J \in I_H(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \mid J \cap U \neq \varnothing\big\} = \bigcup_{y\in U\cap Y} V_{\{y\}} \in \mathcal{T}_H^{\sharp},$$

что и является требуемым заключением. $\square$

Утверждение 3. *Отображение ψ непрерывно.*

Доказательство утверждения. Достаточно показать, что прообраз каждого базисного открытого множества из $\mathcal{T}_H^\sharp$ открыт в $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$. Действительно, пусть множество $F \subseteq Y$ конечно. Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(V_F) &= \big\{A \in S_H(X) \mid \psi(A) \in V_F\big\} = \big\{A \in S_H(X) \mid F \subseteq \psi(A)\big\} \\ &= \bigcap_{f\in F}\big\{A \in S_H(X) \mid f \in \psi(A)\big\} = \bigcap_{f\in F}\big\{A \in S_H(X) \mid A \cap \operatorname{int}{\uparrow} f \neq \varnothing\big\} \\ &= \bigcap_{f\in F}(\operatorname{int}{\uparrow} f)^* \in \mathcal{T}_H^*(\mathbb{X}),\end{aligned}$$

откуда и следует требуемое заключение. □

Утверждение 4. *Отображения φ и ψ взаимно обратны.*

Доказательство утверждения. Для произвольного $A \in S_H(X)$ в силу доказательства утверждения 1 имеем

$$\varphi\psi(A) = \mathrm{cl}_{\mathbb{X}}\,\psi(A) = \mathrm{cl}_{\mathbb{X}}\,A = A,$$

откуда $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{S}_H(\mathbb{X})}$.

Далее, пусть $J \in I_H(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ и пусть $y \in \cap\psi\varphi(J)$. Тогда существует $a \in \varphi(J) = \mathrm{cl}_{\mathbb{X}}\,J$ такой, что $a \in \mathrm{int}_{\mathbb{X}}{\uparrow} y \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Поскольку a является предельной точкой для J, существует $b \in J \cap \mathrm{int}_{\mathbb{X}}{\uparrow} y$, откуда получаем, что $y \prec b \in J$ и, следовательно, $y \in J$. Таким образом, мы установили, что $\psi\varphi(J) \subseteq J$. Более того, $J \subseteq \psi\varphi(J)$ по определению отображений φ и ψ. Поэтому $\psi\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{Y})}$. □

Доказательство теоремы 8 завершено. □

Так как D является I-системой, D^d также является I-системой ввиду [5, лемма 4]. Таким образом, $\mathbb{D}^d(\mathbb{X})$ является топологическим T_0-пространством по утверждению 1 из доказательства теоремы 17 в [5] для каждого топологического T_0-пространства $\mathbb{X}$. Более того, $\mathbb{D}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}_S^d(\mathbb{X})$ по теореме 23 и лемме 16 в [5].

Определение 9. Пусть D_H обозначает I-систему такую, что $\mathsf{D}_H(\mathbb{X})$ состоит из всех направленных вверх (относительно порядка специализации) подмножеств в X, которые принадлежат $\mathsf{H}^d(\mathbb{X})$. Другими словами, $\mathsf{D}_H = \mathsf{D} \cap \mathsf{H}^d$.

Следующая теорема обобщает [6, теорема 8.1.7].

Теорема 10. *Пусть $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством в $\mathbb{X}$ и пусть H является I-системой. Тогда*

$$\mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{H}^d(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}_H(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}_{HS}(\mathbb{X}).$$

Доказательство. Как и в доказательстве [6, теорема 8.1.7] рассмотрим следующее отображение:

$$\xi_H \colon \mathbb{D}_H(\mathbb{X}) \to \mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{Y}); \quad \xi_H \colon [S] \mapsto \bigcup_{s\in S}\{y \in Y \mid y \prec s\}.$$

Утверждение 1. *Отображение ξ_H определено корректно.*

Доказательство утверждения. В силу [6, лемма 8.1.4] имеем

$$\bigcup_{s\in S}\{y \in Y \mid y \prec s\} = \bigcup_{s\in S'}\{y \in Y \mid y \prec s\},$$

если $S, S' \in \mathsf{D}_H(\mathbb{X})$ таковы, что $S' \in [S]$. Ввиду [6, лемма 8.1.2] $\xi_H([S])$ является $\mathbb{Y}$-идеалом в $\mathbb{X}$. Остается показать, что $\xi_H([S]) \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ для всех $S \in \mathsf{D}_H(\mathbb{X})$.

Действительно, пусть $\mathbb{Z}$ – H-собранное пространство и пусть отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ непрерывно. Поскольку $S \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$, существует $z \in Z$ такой, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(S) = {\downarrow_{\mathbb{Z}}} z$. Покажем, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f\big(\xi_H([S])\big) = {\downarrow_{\mathbb{Z}}} z$. Действительно, пусть $a \in \mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f\big(\xi_H([S])\big)$ и пусть $a \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{Z})$. Так как a является предельной точкой для множества $f\big(\xi_H([S])\big)$, найдется $a' \in \xi_H([S])$ такой, что $f(a') \in U$, т. е. $a' \in f^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Включение $a' \in \xi_H([S])$ означает, что $a' \prec s$ для некоторого $s \in S$. Поэтому $s \in f^{-1}(U) \cap S$. Из того, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(S) = {\downarrow_{\mathbb{Z}}} z$, мы получаем неравенства $f(a') \leq f(s) \leq z$. Следовательно $z \in U$. Таким образом, $a \leq z$ по определению порядка специализации и $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f\big(\xi_H([S])\big) \subseteq {\downarrow_{\mathbb{Z}}} z$.

Обратно, пусть $z \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{Z})$. Так как z является предельной точкой для множества $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(S)$, мы заключаем, что существует $s \in S$ такой, что $f(s) \in U$. Следовательно $s \in f^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Из того, что $\mathbb{Y}$ является базисным подпространством, существует $y \in Y \cap f^{-1}(Y)$ в $\mathbb{X}$ с условием $y \prec s$. Таким образом, $y \in \xi_H([S])$ и $f(y) \in f\big(\xi_H([S])\big) \cap U$. Это доказывает, что z является предельной точкой для множества $f\big(\xi_H([S])\big)$. Поэтому ${\downarrow_{\mathbb{Z}}} z \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f\big(\xi_H([S])\big)$, откуда и следует требуемое утверждение. □

Заметим, что отображение ξ_H взаимно-однозначно в силу [6, лемма 8.1.4]. Более того, $\xi_H([I]) = I$ для всех $I \in I_H(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ ввиду [6, лемма 8.1.5]. Поэтому ξ_H является отображением "на".

Утверждение 2. *Отображение ξ_H является гомеоморфизмом.*

Доказательство утверждения. Мы используем обозначения из доказательства [5, теорема 17] и теоремы 8. Для произвольного открытого множества $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ имеем

$$\xi_H(U^*) = \big\{\xi_H([S]) \mid S \cap U \neq \varnothing\big\} = \big\{I \in I_H(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \mid I \cap U \neq \varnothing\big\} = \bigcup_{y\in U\cap Y} V_{\{y\}} \in \mathcal{T}_H^\sharp.$$

Отсюда следует, что отображение ξ_H открыто. Далее, покажем, что прообраз любого предбазисного открытого множества топологии $\mathcal{T}_H^\sharp$ открыт в $\mathcal{T}^*$. Для произвольного $a \in Y$

имеем

$$\begin{aligned}\xi_H^{-1}\big(V_{\{a\}}\big) &= \big\{[S] \in D_H(\mathbb{X}) \mid \xi_H([S]) \in V_{\{a\}}\big\}\\ &= \big\{[S] \in D_H(\mathbb{X}) \mid a \in \xi_H([S])\big\}\\ &= \big\{[S] \in D_H(\mathbb{X}) \mid a \prec s \text{ для некоторого } s \in S\big\}\\ &= \big\{[S] \in D_H(\mathbb{X}) \mid \operatorname{int}{\uparrow}a \cap S \neq \varnothing\big\} = (\operatorname{int}{\uparrow}a)^* \in \mathcal{T}^*,\end{aligned}$$

поэтому отображение ξ_H непрерывно. □

Таким образом, по теореме 8 мы имеем $\mathbb{D}_H(\mathbb{X}) \cong \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$. Это означает, что $\mathbb{D}_H(\mathbb{X})$ является H-собрификацией пространства $\mathbb{X}$ (с точностью до гомеоморфизма). В силу [5, теорема 23] мы получаем, что $\mathbb{D}_H(\mathbb{X})$ является наименьшим расширением пространства $\mathbb{X}$, которое является H^d-собранным. Так как $\mathsf{D}_H \subseteq \mathsf{H}^d$, заключаем, что пространство $\mathbb{D}_H(\mathbb{X})$ также D_H-собранно. Согласно построению из доказательства [5, теорема 17], без ограничения общности мы можем предполагать, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{D}_H(\mathbb{X}) \leq \mathbb{D}_{HS}(\mathbb{X})$. Применяя утверждение (iv) из [5, теорема 23], имеем $\mathbb{D}_H(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}_{HS}(\mathbb{X})$. Наконец,

$$\mathbb{H}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}_H(\mathbb{X}) \leq \mathbb{H}^d(\mathbb{X}) \leq \mathbb{H}_S^d(\mathbb{X}) \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$$

ввиду [5, теорема 23]. Следовательно, $\mathbb{H}^d(\mathbb{X}) \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$. Доказательство завершено. □

Для α-пространства $\mathbb{X}$ мы полагаем для краткости $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{X}) = \mathbb{I}_H(\mathbb{X})$. Более того, пишем просто $\iota_{\mathbb{X}}$ вместо $\iota_{\mathbb{X},\mathbb{X}}$. Следующее утверждение обобщает [6, следствие 8.1.9].

Следствие 11. *Если $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ являются α-пространствами, а отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ непрерывно, то существует единственное непрерывное отображение*

$$\mathbb{I}_H(f)\colon \mathbb{I}_H(\mathbb{X}) \to \mathbb{I}_H(\mathbb{Y})$$

такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_{\mathbb{X}}"'] & \mathbb{Y} \arrow[d, "\iota_{\mathbb{Y}}"] \\ \mathbb{I}_H(\mathbb{X}) \arrow[r, "\mathbb{I}_H(f)"] & \mathbb{I}_H(\mathbb{Y}) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Как и в доказательстве [6, следствие 8.1.9], см. [6, замечание 8.1.10], мы полагаем:

$$\mathbb{I}_H(f)\colon \mathbb{I}_H(\mathbb{X}) \to \mathbb{I}_H(\mathbb{Y}); \quad \mathbb{I}_H(f)\colon I \mapsto \xi_H f(I).$$

Пусть G – конечное подмножество в Y. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_H(f)^{-1}(V_G) &= \{I \in I_H(\mathbb{X}) \mid G \subseteq \xi_H f(I)\} \\
&= \bigcap_{g\in G} \{I \in I_H(\mathbb{X}) \mid f(I) \cap \operatorname{int}{\uparrow}g \neq \varnothing\} \\
&= \bigcap_{g\in G} \{I \in I_H(\mathbb{X}) \mid I \cap f^{-1}\big(\operatorname{int}{\uparrow}g\big) \neq \varnothing\} \\
&= \bigcap_{g\in G} \bigcup_{x\in f^{-1}\left(\operatorname{int}{\uparrow}g\right)} \{I \in I_H(\mathbb{X}) \mid x \in I\} \\
&= \bigcap_{g\in G} \bigcup_{x\in f^{-1}\left(\operatorname{int}{\uparrow}g\right)} V_{\{x\}} \in \mathcal{T}^{\sharp}_{\mathbb{X}},
\end{aligned}$$

поэтому отображение $\mathbb{I}_H(f)$ непрерывно. Ясно, что для всех $x \in X$ имеем

$$\iota_{\mathbb{Y}} f(x) = {\downarrow\!\!\downarrow} f(x) = \xi_H f(x) = \xi_H f\big({\downarrow\!\!\downarrow} x\big) = \mathbb{I}_H(f)\iota_{\mathbb{X}}(x),$$

т. е. диаграмма коммутативна.

Наконец, предположим, что непрерывное отображение $f' \colon \mathbb{I}_H(\mathbb{X}) \to \mathbb{I}_H(\mathbb{Y})$ таково, что $f'\iota_{\mathbb{X}}(x) = \iota_{\mathbb{Y}} f(x) = \mathbb{I}_H(f)\iota_{\mathbb{X}}(x)$ для всех $x \in X$. Тогда отображения f' и $\mathbb{I}_H(f)$ совпадают на $\iota_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$. По теореме 7 (3) $\iota_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$ является H^d-базисом для $\mathbb{I}_H(\mathbb{X})$. По предложению 7 и лемме 8 из работы [5] $\iota_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}) \leq \mathbb{I}_H(\mathbb{X})$ является u-расширением. Таким образом, $f' = \mathbb{I}_H(f)$. □

Следствие 12. *Пусть* H *является* I*-системой такой, что* $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{H}$*, и пусть* $\mathbb{Y}$ *является базисным подпространством в* $\mathbb{X}$*. Тогда*

$$\mathbb{D}(\mathbb{X}) \cong \mathbb{H}(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{S}(\mathbb{X}) \cong \mathbb{I}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}).$$

В частности,

$$\mathbb{D}(\mathbb{X}) \cong \mathbb{WF}(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{WF}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{S}(\mathbb{X}).$$

Доказательство. Напомним, что $\mathbb{S}(\mathbb{X}) = \mathbb{I}_S(\mathbb{X})$ обозначает в [6] собрификацию пространства $\mathbb{X}$. Поскольку каждый идеал из $I(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ является направленным вверх множеством, мы заключаем, что $I(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subseteq \mathsf{D}(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{H}(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$, т. е. $I(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = I_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Согласно теореме 8 и доказательству теоремы 10, имеем

$$\mathbb{S}(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{D}(\mathbb{X}) \leq \mathbb{H}(\mathbb{X}) \leq \mathbb{H}_S(\mathbb{X}) \cong \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathbb{I}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \cong \mathbb{S}(\mathbb{X}).$$

Следовательно, требуемое утверждение вытекает из [5, теорема 23]. □

В следующем утверждениии, которое является прямым следствием теоремы 10 и следствия 12, мы ссылаемся на определение 4.

Следствие 13. *Пусть* $\mathbb{X}$ *является* α*-пространством и пусть* H *является* I*-системой.*

(1) D_H*-ранг и* H*-ранг пространства* $\mathbb{X}$ *совпадают и не превосходят* 1*. Более того,* $\mathbb{D}_H(\mathbb{X})$ *является* H*-собрификацией пространства* $\mathbb{X}$*.*

(2) *Если* $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{H}$*, то* D*-ранг и* H*-ранг пространства* $\mathbb{X}$ *совпадают и не превосходят* 1*. Более того,* $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ *является* H*-собрификацией пространства* $\mathbb{X}$*.*

Следствие 13 обобщает [6, следствие 8.3.2], см. также Ю.Л. Ершов [7]. Из [6, предложение 5.7.5] и теоремы 8 получаем

Следствие 14. *Для* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$ *равносильны следующие утверждения.*

(1) $\mathbb{X}$ *является* α*-пространством* [φ*-пространством*]*.*

(2) $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ *является* α*-пространством* [φ*-пространством соответственно*] *для каждой* I*-системы* H*.*

(3) $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ *является* α*-пространством* [φ*-пространством соответственно*] *для некоторой* I*-системы* H*.*

Доказательство. Очевидно, что (2) влечет (3). Пусть выполнено (1) и пусть H – произвольная I-система. По теореме 8 имеем $\mathbb{S}_H(\mathbb{X}) \cong \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. По теореме 7 (3) $\iota_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}(\mathbb{X})$ является H^d-базисом для $\mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. По предложению 7 и лемме 8 из работы [5] $\iota_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}(\mathbb{X}) \leq \mathbb{I}_H(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ является u-расширением. Из [6, следствие 5.6.5(v)–(vi)] вытекает, что (1) влечет (2) и (3) влечет (1). □

Следствие 15. *Пусть* H *является* I*-системой такой, что* $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{H}$*, и пусть* $\mathbb{X}$ *является* T_0*-пространством. Если* $\mathbb{X}$ *является* A*-пространством, то* $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ *является* A_d*-пространством.*

Доказательство. По следствию 12 имеем $\mathbb{S}_H(\mathbb{X}) \cong \mathbb{S}(\mathbb{X})$. В силу [6, предложение 5.7.5] $\mathbb{S}(\mathbb{X})$ является A-пространством. Так как каждое собранное пространство является d-пространством, мы заключаем, что $\mathbb{S}_H(\mathbb{X}) \cong \mathbb{S}(\mathbb{X})$ является A_d-пространством. □

За определением b-пространства мы отсылаем читателя к работе Ю.Л. Ершова [10]. Подмножество $F \subseteq X$ в T_0-пространстве $\mathbb{X}$ называется *совершенным*, если выполнено следующее условие. Если $x \in X$ является верхней границей для непустого подмножества $F' \subseteq F$, то существует $f \in F$ такой, что f является верхней границей для F' и $f \leq x$. Тогда φ-пространство $\mathbb{X}$ назывется *b-пространством*, если каждое конечное непустое множество, состоящее из компактных элементов, содержится в некотором конечном совершенном подмножестве множества всех компактных элементов.

Следующее утверждение обобщает [6, следствие 5.7.6].

Следствие 16. *Для* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$ *равносильны следующие утверждения.*

(1) $\mathbb{X}$ *является* f*-пространством* [b*-пространством соответственно*]*.*

(2) $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ *является* f*-пространством* [b*-пространством соответственно*] *для каждой* I*-системы* H*.*

(3) $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ *является* f*-пространством* [b*-пространством соответственно*] *для некоторой* I*-системы* H*.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathbb{X}$ является f-пространством. Пусть $\mathbb{C}$ обозначает его f-базисное подпространство (т. е. множество всех его компактных элементов). Рассмотрим произвольную I-систему H. По теореме 7 (3) $\mathbb{C}' = \iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(\mathbb{X})$ является H^d-базисом для $\mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{C})$. По предложению 7 и лемме 8 из [5] $\mathbb{C}' \leq \mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{C})$ является u-расширением. Согласно [6, следствие 5.6.5(iv)], $\mathbb{C}'$ является φ-базисным подпространством в $\mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{C})$. Покажем, что $\mathbb{C}'$ является парусом. Пусть $a,b \in C$ и $J \in I_H(\mathbb{X},\mathbb{C})$ таковы, что $\downarrow_{\mathbb{C}} a, \downarrow_{\mathbb{C}} b \subseteq J$. Это означает, что $a,b \in J$. Так как J является $\mathbb{C}$-идеалом, существует $c \in J$ такой, что $a,b \leq_{\mathbb{X}} c$. Так как $\mathbb{X}$ является f-пространством, мы заключаем, что существует $a \vee b \in C$. Отсюда следует, что $\iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(a \vee b) = \iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(a) \vee \iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(b)$ в $\mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{C})$, поэтому $\mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{C})$ является f-пространством. По теореме 8 имеем $\mathbb{S}_H(\mathbb{X}) \cong \mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{C})$. Таким образом, (1) влечет (2).

Утверждение (2) очевидным образом влечет утверждение (3). Покажем теперь, что (3) влечет (1). Действительно, пусть I-система H такова, что $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является f-пространством. В частности, $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является φ-пространством. По следствию 14 $\mathbb{X}$ является φ-пространством. Пусть $\mathbb{C}$ обозначает его φ-базисное подпространство. По теореме 8 $\mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является f-пространством. В силу теоремы 7 (2) и [6, следствие 5.6.5(iv)] $\mathbb{C}' = \iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ является φ-базисным подпространством в $\mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{C})$. Поскольку $\mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{C})$ является f-пространством, $\mathbb{C}'$ является парусом. Покажем, что $\mathbb{C}$ также является парусом. Действительно, пусть элементы $a,b \in C$ таковы, что $a,b \leq x$ для некоторого $x \in X$. По теореме 7 (1) отображение $\iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}} \colon \mathbb{X} \to \mathbb{I}_H(\mathbb{X},\mathbb{C})$ является гомеоморфным вложением, поэтому $\iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(a), \iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(b) \subseteq \iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(x)$. Так как $\mathbb{C}'$ является парусом, существует $\mathbb{C}$-идеал $J \in I_H(\mathbb{X},\mathbb{C})$ такой, что $\iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(a) \vee \iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(b) = J$. Как и выше, это означает, что $a,b \in J$ и $a,b \leq_{\mathbb{X}} c$ для некоторого $c \in J$. Это дает включения $\iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(a), \iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(b) \subseteq \iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(c) \subseteq J$. Поскольку J является наименьшей верхней границей для $\iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(a), \iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(b)$, мы заключаем, что $J = \iota_{\mathbb{X},\mathbb{C}}(c)$, поэтому $a \vee b = c$ в $\mathbb{X}$. Следовательно, $\mathbb{C}$ является f-базисным подпространством в $\mathbb{X}$, и утверждение (3) выполнено.

В случае b-пространств доказательство аналогично доказательству выше, но оно проще, поэтому мы не приводим его здесь. □

Список литературы

[1] X. Xu, *On H-sober spaces and H-sobrifications of T_0-spaces*, Topology Appl. **289**, article no. 107548, 37 pp. (2021).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107548

[2] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *Continuous lattices and domains*, Encyclopedia Math. Appl. **93**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511542725

[3] Yu.L. Ershov, *On d-spaces*, Theoret. Comput. Sci. **224** (1–2), 59–72 (1999).
DOI: https://doi.org/10.1016/S0304-3975(98)00307-7

[4] Ю.Л. Ершов, *Сопредельные точки и и-расширения*, Алгебра и логика **56** (4), 443–452 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-017-9450-9

[5] М.И. Кудряшова, М.В. Швидефски, *К теории* H*-собранных пространств*, Сиб. матем. журн. **65** (4) (2024).

[6] Ю.Л. Ершов, *Топология для дискретной математики*, Изд-во СО РАН, Новосибирск, 2020.

[7] Ю.Л. Ершов, *d-ранг α-пространства не превосходит* 1, Алгебра и логика **58** (6), 706–713 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-020-09566-z

[8] J. Goubault-Larrecq, *Non-Hausdorff topology and domain theory: selected topics in point-set topology*, New Math. Monogr. **22**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781139524438

[9] Ю.Л. Ершов, *О d-ранге топологического пространства*, Алгебра и логика **56** (2), 150–163 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-017-9432-y

[10] Yu.L. Ershov, *Theory of domains and nearby*, in: “Formal methods in programming and their applications”, Lecture Notes in Computer Science **735**, 1–7 (2005).
DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0039696

Мария Игоревна Кудряшова
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: m.kudryashova@g.nsu.ru

Марина Владимировна Швидефски
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: m.schwidefsky@g.nsu.ru

Volume 2, Issue 2
pp. 70–83 (2024)

UDC 515.122
MSC 54D35, 54D10

To the theory of H-sober spaces. II

M.I. Kudryashova, M.V. Schwidefsky

Abstract. We show that generalized sobrifications of approximation spaces are homeomorphic to spaces of special basic ideals of the given spaces. Using this characterization, we generalize a series of known results on sobrifications of approximation spaces.

Keywords: approximation space, sober space, T_0-space.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.70-83

References

[1] X. Xu, *On H-sober spaces and H-sobrifications of T_0-spaces*, Topology Appl. **289**, article no. 107548, 37pp. (2021).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107548

[2] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *Continuous lattices and domains*, Encyclopedia Math. Appl. **93**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511542725

[3] Yu.L. Ershov, *On d-spaces*, Theoret. Comput. Sci. **224** (1–2), 59–72 (1999).
DOI: https://doi.org/10.1016/S0304-3975(98)00307-7

[4] Yu.L. Ershov, *Solimit points and u-extensions*, Algebra and Logic **56** (4), 295–301 (2017).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-017-9450-9

[5] M.I. Kudryashova, M.V. Schwidefsky, *To the theory of* H*-sober spaces*, Siberian Math. J. **65** (4) (2024).

[6] Yu.L. Ershov, *Topology for discrete mathematics*, Publishing House SB RAS, Novosibirsk, 2020 [in Russian].

[7] Yu.L. Ershov, *The d-rank of an α-space does not exceed* 1, Algebra and Logic **58** (6), 470–474 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-020-09566-z

[8] J. Goubault-Larrecq, *Non-Hausdorff topology and domain theory: selected topics in point-set topology*, New Math. Monogr. **22**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.

Acknowledgements. The work is supported by the Russian Science Foundation, project no. 24-21-00227.

Received: 10 June 2024. Accepted: 02 July 2024. Published: 16 July 2024.

DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781139524438

[9] Yu.L. Ershov, *The d-rank of a topological space*, Algebra and Logic **56** (2), 98–107 (2017). DOI: https://doi.org/10.1007/s10469-017-9432-y

[10] Yu.L. Ershov, *Theory of domains and nearby*, in: “Formal methods in programming and their applications”, Lecture Notes in Computer Science **735**, 1–7 (2005). DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0039696

Maria Igorevna Kudryashova
Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: m.kudryashova@g.nsu.ru

Marina Vladimirovna Schwidefsky
Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: m.schwidefsky@g.nsu.ru

Том 2, Выпуск 2 УДК 517.55
Стр. 84–106 (2024) MSC 32C15

Хаотические и часто-гиперциклические операторы в весовом пространстве целых функций

А.И. Рахимова

Аннотация. Изучаются вопросы хаотичности и часто-гиперцикличности различных операторов в весовом пространстве $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, определенном как проективный предел банаховых пространств. В теоремах 8–13 рассматриваются случаи операторов дифференцирования и сдвига, а также их композиций в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Для линейных непрерывных операторов, коммутирующих с дифференцированием, в теореме 14 показана хаотичность в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. В теореме 15 для таких операторов доказана часто-гиперцикличность в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, а также указаны наиболее важные следствия из этих утверждений.

Ключевые слова: весовое пространство, целые функции, хаотический оператор, часто-гиперциклический оператор, оператор дифференцирования, оператор сдвига.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.84-106

Введение

0.1. Обзор литературы. В топологическом пространстве X для любого линейного непрерывного оператора $T: X \to X$ можно построить дискретную динамическую систему $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. При изучении вопроса об описании поведения этой системы были введены такие характеристики для операторов, как цикличность, гиперцикличность, хаотичность, часто-гиперцикличность и многие другие.

Понятие хаотического оператора было определено Р.Л. Девани в 1989 г. в работе [1]. Далее в статье [2] 1992 г. Дж. Бэнкс, Дж. Брукс и другие изучили условия хаотичности Девани и доказали, что свойство существенной зависимости оператора от начальных условий следует из его топологической транзитивности и наличия плотного множества периодических точек. В 1991 г. в работе Г. Годефруа и Дж. Шапиро [3] было показано, что по теореме Годефруа–Шапиро любой оператор свертки, характеристическая функция которого непостоянна, хаотический в $H(\mathbb{C})$. В 2000 г. Р.М. Кроновер написал книгу [4] с подробными сведениями по хаотическим операторам в динамических системах. В работе [5] 2005 г. Дж.Дж. Бетанкур и другие авторы изучили гиперцикличность и хаотичность операторов свертки в $H(\mathbb{C})$.

Поступила: 23.04.2024. Принята: 02.07.2024. Опубликована: 16.07.2024.

Основы теории часто-гиперциклических операторов были положены Ф. Баярт и С. Гривакс в 2006 г. в статье [6] в $H(\mathbb{C})$. А. Бонилла и К.-Г. Гроссе-Эрдманн в работе [7] 2006 г. доказали, что непрерывные операторы, коммутирующие со сдвигом, часто-гиперциклические в пространстве $H(\mathbb{C}^n)$. В 2007 г. они опубликовали работу [8] по часто-гиперциклическим операторам и векторам в $H(\mathbb{C})$.

В книгах Ф. Баярт, Э. Матерон [9] 2009 г., К.-Г. Гроссе-Эрдманн, А. Пэрис [10] 2011 г. и М.В. Хирш, С. Смэйл, Р.Л. Девани [11] 2013 г. изложены основные положения теории динамических систем, в том числе по хаотическим и часто-гиперциклическим операторам. В статье С. Гривакс [12] 2011 г. приведены примеры различных часто-гиперциклических операторов в $H(\mathbb{C})$. В 2009 г. Дж. Бонет [13] изучил динамические свойства дифференциального оператора в весовом пространстве целых функций. В статьях А.В. Абанина, Т.И. Абаниной, Ф.Ч. Тиен [14, 15] 2017 г. были рассмотрены динамические свойства классических операторов и операторов композиции в весовых пространствах голоморфных функций. В.Э. Ким в статьях [16] 2008 г. и [17] 2010 г. показал, что все операторы обобщенной свертки гиперциклические и хаотические в $H(\mathbb{C})$.

0.2. Цель работы. В данной работе будем изучать свойства хаотичности и часто-гиперцикличности классических линейных непрерывных операторов в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Пространства вида $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ в связи с различными задачами комплексного анализа встречались в работах многих математиков [18,19]. Определим весовое пространство $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ целых функций комплексных переменных следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ – семейство выпуклых неотрицательных функций $\varphi_m : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

$i_1)$ $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\varphi_m(z)}{\|z\|} = +\infty$;

$i_2)$ $\lim\limits_{z\to\infty} (\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z)) = +\infty$.

Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим пространство

$$\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n),\ f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} : \quad p_m(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} (|f(z)| e^{-\varphi_m(z)}) < \infty \right\}.$$

Отметим, что $\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$ – банахово пространство. В силу условия $i_2)$ при всех $m \in \mathbb{N}$ вложения $\mathcal{F}_{m+1}(\mathbb{C}^n) \subset \mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$ вполне непрерывны. Положим $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$. С обычными операциями сложения элементов и умножения на комплексные числа $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ образует линейное пространство. Снабдим его топологией проективного предела пространств $\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$. Поскольку оно является проективным пределом компактной последовательности банаховых пространств $\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$, то $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ – пространство Фреше–Шварца.

Далее на семейство φ также будем накладывать дополнительные условия вида:

$i_3)$ существуют постоянные $a_m > 0$ и $b_m > 0$ такие, что

$$\varphi_{m+1}(z + t) \le \varphi_m(z) + b_m,$$

где $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n: \ |t| \le a_m$;

или более жесткое:

$i_4)$ для любого $R > 0$ существует постоянная $b_m(R, m) > 0$ такая, что

$$\varphi_{m+1}(z+t) \le \varphi_m(z) + b_m,$$

где $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n: \ |t| \le R$.

Отметим, что при выполнении условия $i_3)$ пространство $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ инвариантно относительно дифференцирования (см. [20, лемма 5]). В случае справедливости требования $i_4)$ $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ является инвариантным относительно как дифференцирования, так и сдвига (см. [20, теорема 4]).

Цель данной работы – изучение задач о хаотичности и часто-гиперцикличности в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ операторов дифференцирования, сдвига, их различных композиций и линейных непрерывных операторов, коммутирующих с дифференцированием. Во введении даны основные определения и необходимые в дальнейшем утверждения. Раздел 1 посвящен изучению свойств различных операторов: теорема 8 утверждает о хаотичности композиции дифференцирования и сдвига, теорема 9 – о хаотичности и часто-гиперцикличности оператора дифференцирования, теорема 11 – о хаотичности и часто-гиперцикличности оператора сдвига, теорема 12 – об условии хаотичности и часто-гиперцикличности композиции дифференцирования, сдвига и умножения переменной на константу, теорема 13 – об условии не хаотичности и не часто-гиперцикличности композиции дифференцирования, сдвига и умножения переменной на константу. В разделе 2 изучены линейные непрерывные операторы, коммутирующие с дифференцированием: в теореме 14 доказана хаотичность таких операторов, в теореме 15 – их часто-гиперцикличность, в следствиях 16–22 приведены примеры по этим утверждениям.

0.3. Обозначения. Для точек $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ из $\mathbb{C}^n$ определим $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, где $\|u\|$ – евклидова норма в $\mathbb{C}^n$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ и точек $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ полагаем $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots n$, $D_z^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}$.

Для произвольной вещественнозначной функции φ в $\mathbb{C}^n$ такой, что $\lim\limits_{\|z\| \to +\infty} \dfrac{\varphi(z)}{\|z\|} = +\infty$, определим преобразование Юнга–Фенхеля $\widetilde{\varphi}(z) = \sup\limits_{t \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re}\langle z, t \rangle - \varphi(t))$, $z \in \mathbb{C}^n$. Отметим, что из условия $i_1)$ следует, что для функций φ_m, $m \in \mathbb{N}$, их преобразования Юнга–Фенхеля $\widetilde{\varphi}_m$ принимают конечные значения в $\mathbb{C}^n$.

0.4. Основные определения. Обозначим через X топологическое векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. *Орбитой* элемента x оператора $T: \ X \to X$ [9] называется множество

$$\operatorname{Orb}(T, x) = \{T^n x\}_{n=0}^{\infty}.$$

Элемент $x \in X$ является *периодической точкой* оператора T [9, определение 6.5], если найдется натуральное число $n \geq 2$ такое, что $T^n x = x$. Оператор $T: X \to X$ *нетривиальный*, если он не совпадает с оператором умножения на отличную от нуля константу.

Линейный непрерывный оператор $T: X \to X$ называется *гиперциклическим* [9] в пространстве X, если существует элемент $x \in X$, орбита которого плотна в X. Данный элемент $x \in X$ является *гиперциклическим вектором* оператора T в X.

Непрерывный оператор $T: X \to X$ *топологически транзитивный* в X [9, теорема 1.2], если для любой пары непустых открытых множеств $A,\ B \subset X$ существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что $T^n(A) \cap B \neq \varnothing$. Линейный топологически транзитивный оператор и гиперциклический оператор являются эквивалентными понятиями в пространстве Фреше [9, теорема 1.2].

Непрерывный оператор $\Phi : Y \to Y$ в метрическом пространстве (Y, d) называется *хаотическим* (по Девани), если выполнены следующие условия Девани [1, определение 8.5]:

(A) оператор Φ обладает существенной зависимостью от начальных условий: существует $\delta > 0$ такое, что для произвольного элемента $x \in Y$ и его любой окрестности U найдутся точка $y \in U$ и число $n \in \mathbb{N}$, для которых $d(\Phi^n x, \Phi^n y) > \delta$;

(B) оператор Φ является топологически транзитивным;

(C) множество периодических точек оператора Φ плотно в пространстве Y.

Для произвольного множества $A \subset \mathbb{N}$ *нижняя плотность* множества A [9, § 6.3.1] $\underline{\mathrm{dens}}A$ определяется в виде

$$\underline{\mathrm{dens}}A = \liminf_{N \to \infty} \frac{\#\{n \in A: \ n \leq N\}}{N}.$$

Линейный непрерывный оператор $T: X \to X$ в топологическом векторном пространстве X называется *часто-гиперциклическим* [10, определение 9.2], если найдется такой элемент $x \in X$, что для любого непустого открытого подмножества $U \subset X$ выполняется условие

$$\underline{\mathrm{dens}}\big\{n \in \mathbb{N}: \ T^n x \in U\big\} > 0.$$

Данный элемент $x \in X$ является *часто-гиперциклическим вектором* оператора T в X. Заметим, что класс часто-гиперциклических операторов содержится в множестве гиперциклических операторов [10, определение 9.2].

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения.

Теорема 1 (**теорема о хаотичности и часто-гиперцикличности**, [9, теорема 6.10, теорема 6.18], [10, теорема 9.9, предложение 9.11]). *Пусть $T: X \to X$ – линейный непрерывный оператор в сепарабельном пространстве Фреше X и существуют плотное подмножество $X_0 \subset X$ и отображение $S: X_0 \to X_0$ такие, что*:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n x$ *– ряд сходится безусловно для всех $x \in X_0$;*

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S^n x$ – *ряд сходится безусловно для всех* $x \in X_0$;

3) $TSx = x \quad \forall\, x \in X_0$.

Тогда T *– хаотический и часто-гиперциклический оператор в* X.

В работах [2] и [4] доказаны следующие факты:

Лемма 2 ([2, теорема]). *Если в метрическом пространстве* X *непрерывный оператор* $T: X \to X$ *топологически транзитивный и множество его периодических точек плотно в* X, *то оператор* T *обладает существенной зависимостью от начальных условий.*

Лемма 3 (**теорема Биркгофа о транзитивности**, [9, теорема 1.2]). *Если* X *– пространство Фреше, то для линейного непрерывного оператора* $T: X \to X$ *топологическая транзитивность и гиперцикличность равносильны.*

В силу леммы 2 условие (A) в определении хаотичности следует из условий (B) и (C), а по лемме 3 условие (B) в пространстве Фреше равносильно гиперцикличности оператора. Поэтому для доказательства хаотичности гиперциклического оператора в пространстве Фреше достаточно проверить, что множество его периодических точек плотно в этом пространстве.

Теорема 4 ([10, теорема 2.33]). *Пусть* T *– линейный оператор в комплексном векторном пространстве* X. *Тогда множество периодических точек оператора* T *образует линейное подпространство в* X, *которое задается в виде*

$$\mathrm{Per}(T) = \mathrm{span}\{x \in X : \exists\, \alpha \in \mathbb{Q} : Tx = e^{\alpha\pi \mathrm{i}} x\}.$$

Пусть X – комплексное пространство Фреше, $T: X \to X$ – линейный непрерывный оператор в X, $J \subset \mathbb{N}$ – множество индексов, $\mathbb{T}$ – единичная окружность. Тогда множество функций $\{E_j\}_{j\in J}$ таких, что $E_j : \mathbb{T} \to X$ при всех $j \in J$, каждая из которых для любого $\lambda \in \mathbb{T}$ является либо собственным вектором для собственного значения λ, либо 0, называется *охватывающим полем собственных векторов, соответствующих собственным значениям с единичным модулем,* если $E_j(\lambda) \in \ker(\lambda I - T)$ для любых $\lambda \in \mathbb{T}$ и $j \in J$ и множество $\mathrm{span}\{E_j(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{T},\, j\in J}$ плотно в X [10, определение 9.21]. Векторное поле называется *непрерывным* или C^2*-гладким*, если функции E_j при всех $j \in J$ соответственно непрерывны или дважды непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{T}$ [10, определение 9.21].

Теорема 5 ([10, теорема 9.22]). *Пусть* T *– линейный непрерывный оператор в комплексном сепарабельном пространстве Фреше* X. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

a) *если оператор* T *имеет в* X *непрерывное охватывающее поле собственных векторов, соответствующих собственным значениям с единичным модулем, то он хаотический*;

b) *если оператор* T *имеет в* X C^2*-гладкое охватывающее поле собственных векторов, соответствующих собственным значениям с единичным модулем, то он часто-гиперциклический.*

1. Операторы дифференцирования и сдвига

Приведем следующие необходимые в дальнейшем утверждения.

Лемма 6 ([20, лемма 3])**.** *Пусть S – линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ при выполнении условия i_3). Тогда его преобразование Фурье–Лапласа $\widehat{S}(\xi) = S_z(e^{\langle \xi, z\rangle})$ – целая функция, причем для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняется равенство $D_\xi^\alpha \widehat{S}(\xi) = S_z(z^\alpha e^{\langle \xi, z\rangle})$, $\xi \in \mathbb{C}^n$.*

Лемма 7. *Пусть $r = (r_1, \ldots, r_n)$, где при всех $i = 1, \ldots, n$ $r_i > 0$ – постоянные величины,*

$$D_r = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \ |z_i| < r_i, \ i = 1, \ldots, n\},$$

φ – непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$ и $B \subset \mathbb{C}$ – некоторое непустое множество. Тогда если существует точка $\lambda_0 \in D_r$ такая, что $\varphi(\lambda_0)$ – предельная точка множества B, то система экспонент

$$\left\{e^{\langle \xi, z\rangle}\right\}_{\xi \in D_r :\, \varphi(\xi) \in B}$$

полна в пространстве $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ при выполнении условия i_3).

Доказательство. В силу условия i_1) для любого фиксированного значения $\xi \in \mathbb{C}^n$ функция $e^{\langle \xi, z\rangle}$ лежит в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Возьмем произвольный линейный непрерывный функционал $S \in \mathcal{F}_\varphi^*(\mathbb{C}^n)$ такой, что $S_z(e^{\langle \xi, z\rangle}) = 0$ для всех $\xi \in D_r \cap \varphi^{-1}(B)$. Покажем, что функционал S нулевой.

По условию леммы существует точка $\lambda_0 \in D_r$, для которой $\varphi(\lambda_0)$ – предельная точка множества B. Тогда найдется последовательность точек $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset B$ таких, что $w_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi(\lambda_0)$. Поскольку $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ – непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$, то по [22, приложение B, теорема 6] она является открытым отображением в $\mathbb{C}$. Из этого получим, что при всех $k \in \mathbb{N}$ точкам $w_k \in B$ соответствуют $\lambda_k \in \mathbb{C}^n$, определенные в виде $\lambda_k = \varphi^{-1}(w_k)$. Следовательно, имеется последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^n$ таких, что $\varphi(\lambda_k) \in B$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi(\lambda_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi(\lambda_0)$. Так как φ – открытое отображение, то $\lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_0$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ построим прямую L_k в $\mathbb{C}^n$, проходящую через точки λ_0 и λ_k, причем если несколько точек λ_k совпадают, то берем только одну из них. Теперь перенумеруем эту последовательность $\{L_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, выкинув все прямые, на которых функция φ постоянна. Поскольку φ – непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$, то для любого w_k, кроме, может быть, одного значения, существует подпространство размерности $n-1$ соответствующих ему точек λ_k. Тогда совокупность прямых $\{L_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ охватывает все направления в $\mathbb{C}^n$, значит, множество $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} L_k$ плотно в $\mathbb{C}^n$.

Возьмем произвольное число $k \in \mathbb{N}$. Поскольку φ – непостоянная аналитическая функция на прямой L_k, то $\varphi|_{D_r \cap L_k}$ является открытым отображением. Отсюда и из того, что $\varphi(\lambda_0)$ – предельная точка множества B, получим, что λ_0 – предельная точка множества $D_r \cap L_k \cap \varphi^{-1}(B)$. Так как по условию теоремы $S_z(e^{\langle \xi, z\rangle}) = 0$ для всех $\xi \in D_r \cap \varphi^{-1}(B)$, то по следствию из теоремы единственности $S_z(e^{\langle \xi, z\rangle}) = 0$ при всех $\xi \in D_r \cap L_k$. Множество $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} L_k$ плотно в $\mathbb{C}^n$, поэтому $S_z(e^{\langle \xi, z\rangle}) = 0$ при всех $\xi \in D_r$.

По лемме 6 $\widehat{S}(\xi)$ – целая функция и $S_z(e^{\langle \xi, z\rangle}) = 0$ при всех $\xi \in D_r$, поэтому по теореме единственности получим $S_z(e^{\langle \xi, z\rangle}) = 0$ для всех $\xi \in \mathbb{C}^n$. Поскольку при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$ справедлива формула $D_\xi^\alpha \widehat{S}(\xi) = S_z(z^\alpha e^{\langle \xi, z\rangle})$, то выполняется равенство $D_\xi^\alpha \widehat{S}(\xi) = S_z(z^\alpha e^{\langle \xi, z\rangle}) = 0$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$. Значит, при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ следует, что $S_z(z^\alpha) = 0$. Тогда для любых полиномов $p \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ $S(p) = 0$. Ввиду плотности полиномов по [20, лемма 1] в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ получим $S(f) = 0$ для всех $f \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, поэтому S – нулевой функционал. Следовательно, система экспонент $\{e^{\langle \xi, z\rangle}\}_{\xi \in D_r:\, \varphi(\xi) \in B}$ полна в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. $\square$

Приведем пример по лемме 7. Пусть $D_r = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_i| < r_i, \ i = 1, \ldots, n\}$, где $r_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ – постоянные величины, $\varphi = z_1 z_2 \ldots z_n$ и $B = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < r_1 r_2 \ldots r_n\}$. Тогда множество $\left\{e^{\langle \xi, z\rangle}\right\}_{\{\xi \in \mathbb{C}^n:\, |\xi_i| < r_i,\, i = 1, \ldots, n\}}$ полно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ при выполнении условия $i_3)$ в силу [20, лемма 4].

Докажем следующее утверждение, используя определение хаотичности.

Теорема 8. *Пусть $N \in \mathbb{N}$, заданы точки $c_\alpha \in \mathbb{C}$ и $a_\alpha \in \mathbb{C}^n$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда при выполнении условия $i_4)$ оператор*

$$Tf(z) = \sum_{\alpha:\, |\alpha| = 0}^{N} c_\alpha (D^\alpha f)(z + a_\alpha),$$

не кратный тождественному, является хаотическим в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. В [20, следствие 2] установлена гиперцикличность оператора T в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Тогда по леммам 2 и 3 следует, что требования (A) и (B) из определения хаотичности выполнены. Далее покажем выполнение условия (C).

По теореме 4 линейное подпространство периодических точек оператора T имеет вид

$$V = \operatorname{span}\Big\{f \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) : \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{Q} : \ Tf(z) = e^{\alpha \pi \mathrm{i}} f(z)\Big\}.$$

Рассмотрим следующее подмножество V:

$$V_0 = \operatorname{span}\Big\{e^{\langle \lambda, z\rangle}\Big\}_{\lambda \in W},$$

где $W = \left\{\lambda \in \mathbb{C}^n : \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{Q} : \ \sum\limits_{\beta:\, |\beta| = 0}^{N} c_\beta \lambda^\beta e^{\langle \lambda,\, a_\beta\rangle} = e^{\alpha \pi \mathrm{i}}\right\}$.

Введем обозначение $\varphi(\lambda) = \sum\limits_{\beta:\, |\beta| = 0}^{N} c_\beta \lambda^\beta e^{\langle \lambda,\, a_\beta\rangle}$. Поскольку $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ – непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$, то по [22, приложение B, теорема 6] она является открытым отображением в $\mathbb{C}$. Значит, пересечение ее образа $\varphi(\mathbb{C}^n)$ с единичной окружностью $\mathbb{T}$ всюду совпадает с $\mathbb{T}$, кроме, может быть, одной точки. Отметим, что на $\mathbb{T}$ лежит бесконечно много точек $e^{\alpha \pi \mathrm{i}}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, причем каждая из них является предельной на $\mathbb{T}$. В силу того, что φ – открытое отображение и $\mathbb{T}$ ограничено, бесконечно много точек вида $\lambda = \varphi^{-1}(e^{\alpha \pi \mathrm{i}})$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, лежат в некотором поликруге D_r в $\mathbb{C}^n$. Поэтому существует хотя бы одна точка $\lambda_0 \in D_r$, для которой $\varphi(\lambda_0)$ – предельная точка множества $\mathbb{T}$. По лемме 7 V_0 плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Следовательно, оператор T хаотический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. □

Докажем свойства некоторых операторов в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, используя теорему 1.

Теорема 9. *При выполнении условия i_3) оператор дифференцирования*

$$Tf(z) = D^\alpha f(z) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}} f(z),$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. Непрерывность оператора $T : \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ доказана в [20, лемма 5]. Докажем с помощью теоремы 1 хаотичность и часто-гиперцикличность T в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. В качестве множества W определим линейную оболочку множества мономов $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\beta_n}$, где $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. По [20, лемма 1] W плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Действие оператора T на мономы имеет вид

$$T^k z^\beta = \begin{cases} \frac{\beta!}{(\beta - k\alpha)!} z^{\beta - k\alpha} & \text{при } k \le k_0, \\ 0 & \text{при } k > k_0, \end{cases}$$

где k_0 – минимальное из чисел $\left[\frac{\beta_j}{\alpha_j}\right]$, $j = 1, \ldots, n$. Отсюда получим равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k z^\beta = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{\beta!}{(\beta - k\alpha)!} z^{\beta - k\alpha}.$$

Очевидно, условие 1) теоремы 1 выполнено.

Определим оператор $S : W \to W$ в виде

$$S^k z^\beta = \frac{\beta!}{(\beta + k\alpha)!} z^{\beta + k\alpha} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Условие 3) теоремы 1 справедливо при любых $z^\beta \in W$:

$$TSz^\beta = \frac{(\beta + \alpha)!}{\beta!} \frac{\beta!}{(\beta + \alpha)!} z^{\beta + \alpha - \alpha} = z^\beta.$$

Проверим выполнение условия 2) теоремы 1 на W. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} S^k z^\beta = \beta! z^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta + k\alpha)!} z^{k\alpha}.$$

По условию i_1) для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ существует постоянная

$C_M \in \mathbb{R}_+$ такая, что при произвольном $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\varphi_m(z_1, \dots, z_n) \ge M(|z_1| + \ldots + |z_n|) - C_M,$$

поэтому справедлива оценка

$$e^{\sup\limits_{z\in\mathbb{C}^n}\left((\beta_1+k\alpha_1)\ln|z_1|+\ldots+(\beta_n+k\alpha_n)\ln|z_n|-\varphi_m(z_1,\ldots,z_n)\right)} \le e^{C_M}\frac{(\beta+k\alpha)^{\beta+k\alpha}}{(Me)^{|\beta|+k|\alpha|}}.$$

Ряд сходится в $\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$ при всех $m \in \mathbb{N}$:

$$p_m\left(\sum_{k=0}^{\infty} S^k z^\beta\right) \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta!}{(\beta+k\alpha)!}\, e^{\sup\limits_{z\in\mathbb{C}^n}\left((\beta_1+k\alpha_1)\ln|z_1|+\ldots+(\beta_n+k\alpha_n)\ln|z_n|-\varphi_m(z)\right)}$$
$$\le \frac{e^{C_M}\beta!}{M^{|\beta|}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^{n/2}M^{k|\alpha|}} < \infty.$$

Итак, условие 2) теоремы 1 выполнено, поскольку по условию i_1) число M можно взять сколь угодно большим. Следовательно, T хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. □

Лемма 10. *При выполнении условия i_4) для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ последовательность*

$$f_{\alpha k}(z) = z^\alpha \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\sin(z_j/k)}{z_j/k}\right)^{\alpha_j+2} \rightrightarrows z^\alpha$$

равномерно сходится при $k \to \infty$ в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Система функций $\{f_{\alpha k}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ полна в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ при любом $k > k_0$, где $k_0 \in \mathbb{N}$ – номер, начиная с которого функции $f_{\alpha k}(z)$ и z^α сколь угодно близки в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. Из того, что $f_{\alpha k}(z) \in H(\mathbb{C}^n)$ и $p_m(f_{\alpha k}) < \infty$ для любого $m \in \mathbb{N}$, получается $f_{\alpha k}(z) \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Покажем сходимость $f_{\alpha k}(z) \rightrightarrows z^\alpha$ при $k \to \infty$ в $\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$ при произвольном $m \in \mathbb{N}$.

В силу i_1) для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ существует постоянная $C_M \in \mathbb{R}_+$ такая, что при всех $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ $\varphi_m(z_1, \dots, z_n) \ge M(|z_1| + \ldots + |z_n|) - C_M$, поэтому для произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ получим следующие оценки:

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^n}\left(|z|^\alpha e^{-\varphi_m(z_1,\ldots,z_n)}\right) \le e^{C_M}\frac{\alpha^\alpha}{(Me)^{|\alpha|}} < \infty,$$
$$\sup_{z\in\mathbb{C}^n}\left(|z|^\alpha e^{\|z\|}e^{-\varphi_m(z_1,\ldots,z_n)}\right) \le e^{C_{M-1}}\frac{\alpha^\alpha}{\left((M-1)e\right)^{|\alpha|}} < \infty.$$

Известно, что $f_{\alpha k}(z)$ равномерно на компактах из $\mathbb{C}^n$ стремится при $k \to \infty$ к z^α. Пусть $B_R \subset \mathbb{C}^n$ – замкнутый шар с центром в 0 конечного радиуса R. Тогда в силу условия

i_1) для любого $\varepsilon > 0$ число R можно выбрать настолько большим, что

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^n\setminus B_R}\left(|z|^{\alpha}e^{\|z\|}e^{-\varphi_m(z)}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем номер k_0 таким, что для всех $k > k_0$

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{|\sin(z_j/k)|}{|z_j|/k}\right)^{\alpha_j+2} \le e^{\|z\|}.$$

Оценим норму разности функций вне шара B_R при любых $k > k_0$ и $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p_{m,\mathbb{C}^n\setminus B_R}(f_{\alpha k}(z) - z^{\alpha}) &= \sup_{z\in\mathbb{C}^n\setminus B_R}\left(|z|^{\alpha}\left|\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\sin(z_j/k)}{z_j/k}\right)^{\alpha_j+2} - 1\right|e^{-\varphi_m(z)}\right) \\ &\le \sup_{z\in\mathbb{C}^n\setminus B_R}\left(|z|^{\alpha}e^{-\varphi_m(z)}\right) + \sup_{z\in\mathbb{C}^n\setminus B_R}\left(|z|^{\alpha}e^{\|z\|}e^{-\varphi_m(z)}\right) \\ &\le 2\sup_{z\in\mathbb{C}^n\setminus B_R}\left(|z|^{\alpha}e^{\|z\|}e^{-\varphi_m(z)}\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, выполняется сходимость $f_{\alpha k}(z) \rightrightarrows z^{\alpha}$ при $k \to \infty$ в $\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n)$.

По [20, лемма 1] множество мономов $\{z^{\alpha}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ полно в $\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n)$. Следовательно, система $\{f_{\alpha k}(z)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ полна в $\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n)$. $\square$

Теорема 11. *При выполнении условия i_4) оператор сдвига*

$$Tf(z) = f(z+a),$$

где $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. Непрерывность оператора $T : \mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n)$ показана в [20, теорема 4]. Докажем по теореме 1 хаотичность и часто-гиперцикличность T в $\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n)$.

Возьмем множество W для любого фиксированного номера $k > k_0$ в виде

$$W = \operatorname{span}\left\{f_{\alpha k}(z) = z^{\alpha}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\sin(z_j/k)}{z_j/k}\right)^{\alpha_j+2}\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}.$$

По лемме 10 W плотно в $\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n)$.

Определим оператор $S : W \to W$ в виде

$$Sf(z) = f(z-a).$$

Очевидно, справедливо условие 3) теоремы 1. Проверим выполнение условия 1) на

W. Действие оператора T любой степени $s \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$T^s f_{\alpha k}(z) = k^{|\alpha|+2} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(z_j + sa_j)^2} \sin^{\alpha_j+2}\left(\frac{z_j + sa_j}{k}\right).$$

Отсюда, используя полученную в теореме 9 в силу условия i_1) оценку для экспоненты, получим формулу

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \left(\left|T^s f_{\alpha k}(z)\right| e^{-\varphi_m(z)}\right)$$
$$\leq k^{|\alpha|+2} \frac{e^{C_M}}{a^2} \sum_{s=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \left(\frac{1}{s^2} e^{\frac{(\alpha_j+2)}{k}|\operatorname{Im} z_j| - M|z_j|}\right) \leq k^{|\alpha|+2} \frac{e^{C_M}}{a^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} < \infty.$$

Условие 1) теоремы 1 выполнено. Условие 2) проверяется аналогично условию 1). Таким образом, T хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. □

Наложим на семейство φ дополнительное условие:

i_5) при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для любых $R > 0$ существует постоянная $b_m = b_m(R, m) > 0$ такая, что $\varphi_{m+1}(\lambda z + t) \leq \varphi_m(z) + b_m$, где $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n : |t| \leq R$.

Теорема 12. *При выполнении условия* i_5) *оператор* $Tf(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(\lambda z + b)$, *где* $j = 1, \ldots, n$, *а числа* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *и* $b \in \mathbb{C}^n$ *фиксированные, хаотический и часто-гиперциклический в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ *в случае* $|\lambda| \geq 1$.

Доказательство. Сначала проверим, что оператор T линейный для произвольных α, $\beta \in \mathbb{C}$ и f, $g \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$:

$$T(\alpha f + \beta g) = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial z_j} f + \beta \frac{\partial}{\partial z_j} g\right)(\lambda z + b) = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(\lambda z + b) + \beta \left(\frac{\partial}{\partial z_j} g\right)(\lambda z + b)$$
$$= \alpha T f + \beta T g.$$

Теперь докажем его непрерывность в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Введем обозначение $\widetilde{z} = \lambda z + b$. Возьмем некоторую функцию $f \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. В силу аналитичности f в $\mathbb{C}^n$ следует, что $Tf \in H(\mathbb{C}^n)$. Используя интегральную формулу Коши, получим следующее равенство:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(\widetilde{z}) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int\limits_{\Pi_{\widetilde{z}}} \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n}{(\xi_1 - \widetilde{z}_1) \cdot \ldots \cdot (\xi_{j-1} - \widetilde{z}_{j-1})(\xi_j - \widetilde{z}_j)^2 (\xi_{j+1} - \widetilde{z}_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (\xi_n - \widetilde{z}_n)},$$

где R и r_j, $j = 1, \ldots, n$ – положительные константы, точка $\widetilde{z}$ лежит в некотором шаре $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| \leq R, \ j = 1, \ldots, n\}$, а ξ – точка из границы поликруга

$$\Pi_{\widetilde{z}} = \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) : |\xi_j - \widetilde{z}_j| = r_j, \, r_j > 0, \ j = 1, \ldots, n\}.$$

Далее введем обозначения $k_1 = \max\limits_{j=1,\dots,n}\{r_j\}$, $k_2 = \min\limits_{j=1,\dots,n}\{r_j\}$ и найдем оценку сверху:

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial z_j} f\Big)(\widetilde{z})\right| \le \frac{(R+k_1)^n}{k_2^{n+1}} \max_{\xi\in\Pi_{\widetilde{z}}} |f(\xi)| \le \frac{(R+k_1)^n}{k_2^{n+1}} \max_{\xi\in\Pi_z} |f(\lambda\xi+b)|,$$

где $\Pi_z = \{\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) : \ |\xi_j - z_j| = \widetilde{r}_j, \, \widetilde{r}_j > 0, \ j = 1,\dots,n\}$.

Из определения нормы для любых $m \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$ получим формулу

$$|f(\lambda\xi+b)| \le p_{m+1}(f)\, e^{\varphi_{m+1}(\lambda\xi+b)}.$$

Тогда следует, что

$$|Tf| = \left|\Big(\frac{\partial}{\partial z_j} f\Big)(\lambda z + b)\right| \le \frac{(R+k_1)^n}{k_2^{n+1}}\, p_{m+1}(f)\, \exp\left(\max_{\xi\in\Pi_z} \varphi_{m+1}(\lambda\xi+b)\right).$$

В силу i_5) при всех $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^n}\Big(\exp\big(\max_{\xi\in\Pi_z}\varphi_{m+1}(\lambda\xi+b)\big)\exp\big(-\varphi_m(z)\big)\Big) \le \exp\left(\sup_{z\in\mathbb{C}^n}\big(\varphi_{m+1}(\lambda z+b)-\varphi_m(z)\big)\right) \le e^{b_m}.$$

Оценим норму действия оператора при произвольном $m \in \mathbb{N}$:

$$p_m(Tf) \le \frac{e^{b_m}(R+k_1)^n}{k_2^{n+1}} p_{m+1}(f) < \infty.$$

Таким образом, T действует из $\mathcal{F}_{m+1}(\mathbb{C}^n)$ в $\mathcal{F}_m(\mathbb{C}^n)$ для любых $m \in \mathbb{N}$, значит, он непрерывен и $T : \ \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Действие оператора k раз на функцию $f \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ имеет вид

$$T^k f(z) = \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{\partial^k}{\partial z_j^k} f\right)\left(\lambda^k z + b\left(\frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}\right)\right).$$

Докажем по теореме 1 хаотичность и часто-гиперцикличность T в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Определим множество W как линейную оболочку всех мономов вида $z^\beta = z_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\beta_n}$, где $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. В силу [20, лемма 1] W плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Вычислим действие T на моном z^β для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$T^k z^\beta = \begin{cases} \lambda^k \frac{\beta_j!}{(\beta_j-k)!} z_j^{-k} z^\beta + b & \text{при } k \le \beta_j, \\ 0 & \text{при } k > \beta_j. \end{cases}$$

Введем оператор S для монома z^β в виде

$$S z^\beta = \frac{1}{\lambda\beta_j} z_j (z^\beta - b).$$

Тогда действие S на моном z^β для любых $k\in\mathbb{N}$ и $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$ определяется по формуле

$$S^k z^\beta = \frac{(\beta_j-k)!}{\lambda^k\beta_j!} z_j^k (z^\beta - b).$$

Условие 3) теоремы 1 на множестве W выполнено:

$$TSz^\beta = \lambda\beta_j z_j^{-1}\frac{z_j}{\lambda\beta_j}(z^\beta-b)+b = z^\beta.$$

По условию i_1) для любого сколь угодно большого $M\in\mathbb{R}_+$ существует постоянная $C_M\in\mathbb{R}_+$ такая, что при всех $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ $\varphi_m(z_1,\ldots,z_n)\geq M(|z_1|+\ldots+|z_n|)-C_M$, значит, выполняется соотношение

$$e^{\sup\limits_{z\in\mathbb{C}^n}\left(\beta_1\ln|z_1|+\ldots+\beta_n\ln|z_n|-\varphi_m(z_1,\ldots,z_n)\right)} \leq e^{C_M}\frac{\beta^\beta}{(Me)^{|\beta|}}.$$

Проверим условие 1) теоремы 1 на W. Справедлива следующая оценка для всех фиксированных значений $z\in\mathbb{C}^n$ при условии $|\lambda|\geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^\infty \sup_{z\in\mathbb{C}^n}\left(|T^k z^\beta| e^{-\varphi_m(z)}\right) &= \sum_{k=0}^{\beta_j}\sup_{z\in\mathbb{C}^n}\left(\left|\lambda^k\frac{\beta_j!}{(\beta_j-k)!}z_j^{-k}z^\beta+b\right|e^{-\varphi_m(z)}\right)\\ &\leq \sum_{k=0}^{\beta_j}|\lambda|^k\beta_j(\beta_j-1)\ldots(\beta_j-k+1)e^{C_M}\frac{\beta^\beta}{(Me)^{|\beta|}}<\infty.\end{aligned}$$

Условие 1) выполнено.

Проверим условие 2) теоремы 1 на W. Для всех фиксированных значений $z\in\mathbb{C}^n$, где $k_0=(k,k,\ldots,k)\in\mathbb{Z}^n$, при условии $|\lambda|\geq 1$ выполняется соотношение:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^\infty \sup_{z\in\mathbb{C}^n}\left(|S^k z^\beta| e^{-\varphi_m(z)}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta_j-k)!}{\beta_j!}\sup_{z\in\mathbb{C}^n}\left(\left|\frac{1}{\lambda^k}z_j^k(z^\beta-b)\right|e^{-\varphi_m(z)}\right)\\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|^k\beta_j(\beta_j-1)\ldots(\beta_j-k+1)}e^{C_M}\frac{(\beta+k_0)^{\beta+k_0}}{(Me)^{|\beta|+nk}}<\infty.\end{aligned}$$

Условие 2) выполнено. Следовательно, в случае $|\lambda|\geq 1$ оператор T хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. $\square$

Из теоремы 12 следует, что при выполнении условия i_5) оператор

$$Tf(z) = \big(D^\alpha f\big)(\lambda z+b),$$

где $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, а числа $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и $b\in\mathbb{C}^n$ фиксированные, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ в случае $|\lambda|\geq 1$.

Приведем пример не хаотического и не часто-гиперциклического, а также не гиперциклического оператора в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Теорема 13. *При выполнении условия* i_5) *оператор* $Tf(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(\lambda z+b)$, *где* $j = 1, \ldots, n$, *а числа* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *и* $b \in \mathbb{C}^n$ *фиксированные, не хаотический и не часто-гиперциклический в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ *в случае* $|\lambda| < 1$.

Доказательство. В теореме 12 показано, что оператор T линейный и непрерывно отображает $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Действие T на функцию $f \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ для любых $k \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$T^k f(z) = \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{\partial^k}{\partial z_j^k} f\right) \left(\lambda^k z + b\left(\frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}\right)\right).$$

Определим множество W как линейную оболочку всех мономов вида $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\beta_n}$, где $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. В силу [20, лемма 1] W плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Вычислим действие оператора на степенную функцию для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$T^k z^\beta = \begin{cases} \lambda^k \frac{\beta_j!}{(\beta_j-k)!} z_j^{-k} z^\beta + b & \text{при } k \le \beta_j, \\ 0 & \text{при } k > \beta_j. \end{cases}$$

Тогда с помощью оценки для экспоненты, полученной в теореме 12 в силу i_1), для всех фиксированных значений $z \in \mathbb{C}^n$ при условии $|\lambda| < 1$ получим формулу:

$$\begin{aligned} p_m(T^k z^\beta) &\le \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \left(\left| \lambda^k \frac{\beta_j!}{(\beta_j-k)!} z_j^{-k} z^\beta + b \right| e^{-M(|z_1|+\ldots+|z_n|)+C_M} \right) \\ &\le |\lambda|^k e^{C_M} \beta_j(\beta_j-1)\ldots(\beta_j-k+1) \frac{\beta^\beta}{(Me)^{|\beta|}} + |b|e^{C_M} \xrightarrow[k\to\infty]{} |b|e^{C_M}. \end{aligned}$$

Таким образом, $T^k f \to |b|e^{C_M}$ при $k \to \infty$ в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Поэтому не существует функции $f \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ такой, что

$$\overline{\operatorname{span}\{T^k f\}_{k=0}^\infty} = \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n).$$

Итак, в случае $|\lambda| < 1$ оператор T не хаотический и не часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. □

2. Операторы, коммутирующие с дифференцированием

Для операторов, коммутирующих с дифференцированием, справедливы следующие утверждения.

Теорема 14. *Пусть при выполнении условия* i_3) *линейный непрерывный оператор* T *в пространстве* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ *коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественного отображения. Тогда* T *– хаотический оператор в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. В [20, теорема 5] было показано, что T – гиперциклический оператор в пространстве Фреше $\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n)$. Отсюда по леммам 2 и 3 следует, что условия хаотичности (A) и (B) выполнены. Докажем выполнение условия (C).

При доказательстве [20, теорема 5] получили, что действие оператора T на экспоненты определяется по формуле

$$T\left(e^{\langle\lambda,z\rangle}\right) = a_T(\lambda)e^{\langle\lambda,z\rangle},$$

где $a_T(\lambda)$ – непостоянная целая функция. Введем обозначение $\varphi(\lambda) = a_T(\lambda)$.

По теореме 4 совокупность периодических точек оператора T задается в виде

$$V = \mathrm{span}\Big\{f \in \mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n):\ \exists\, \alpha \in \mathbb{Q}:\ Tf(z) = e^{\alpha\pi \mathrm{i}}f(z)\Big\}.$$

Возьмем подмножество V:

$$V_0 = \mathrm{span}\Big\{e^{\langle\lambda,z\rangle}\Big\}_{\lambda\in W},$$

где $W = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}^n:\ \exists\, \alpha \in \mathbb{Q}:\ \varphi(\lambda) = e^{\alpha\pi \mathrm{i}}\Big\}$.

Поскольку $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ – непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$, то по [22, приложение B, теорема 6] она является открытым отображением в $\mathbb{C}$. Значит, пересечение ее образа $\varphi(\mathbb{C}^n)$ с единичной окружностью $\mathbb{T}$ всюду совпадает с $\mathbb{T}$, кроме, может быть, одной точки. Отметим, что на $\mathbb{T}$ лежит бесконечно много точек $e^{\alpha\pi \mathrm{i}}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, причем каждая из них является предельной на $\mathbb{T}$. В силу того, что φ – открытое отображение и $\mathbb{T}$ ограничено, бесконечно много точек вида $\lambda = \varphi^{-1}(e^{\alpha\pi \mathrm{i}})$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, лежат в некотором поликруге D_r в $\mathbb{C}^n$. Поэтому существует хотя бы одна точка $\lambda_0 \in D_r$, для которой $\varphi(\lambda_0)$ – предельная точка множества $\mathbb{T}$. По лемме 7 V_0 плотно в $\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n)$. Следовательно, оператор T хаотический в $\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n)$. □

Теорема 15. *Пусть при выполнении условия i_3) линейный непрерывный оператор T в пространстве $\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественного отображения. Тогда T – часто-гиперциклический оператор в $\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n)$.*

Доказательство. Согласно [20, теорема 5] оператор T гиперциклический в пространстве Фреше $\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{C}^n)$. Как показано в ее доказательстве, действие оператора T на экспоненты имеет вид

$$T\left(e^{\langle\lambda,z\rangle}\right) = a_T(\lambda)e^{\langle\lambda,z\rangle},$$

где $a_T(\lambda)$ – непостоянная целая функция. Обозначим $\varphi(\lambda) = a_T(\lambda)$. Из теоремы 14 видно, что числа $\varphi(\lambda)$ входят в множество собственных значений T, а экспоненты $e^{\langle\lambda,z\rangle}$ – в совокупность его собственных функций. Докажем теорему по схеме из утверждения [7, теорема 1.3].

Возьмем некоторую точку $\lambda_0 \in \mathbb{C}^n$ такую, что $w_0 = \varphi(\lambda_0) \in \mathbb{T}$. Любая точка w_0 на окружности $\mathbb{T}$ предельная, поэтому найдется последовательность точек $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ таких, что $w_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi(\lambda_0)$. Поскольку $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ – непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$, то по [22, приложение B, теорема 6] она является открытым отображением в $\mathbb{C}$. Из этого получим, что при всех $k \in \mathbb{N}$ точкам $w_k \in B$ соответствуют $\lambda_k \in \mathbb{C}^n$, определенные в виде $\lambda_k = \varphi^{-1}(w_k)$. Значит, имеется последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^n$ таких, что $\varphi(\lambda_k) \in B$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi(\lambda_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi(\lambda_0)$. Так как φ – открытое отображение, то следует, что $\lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_0$. По схеме из леммы 7 построим последовательность прямых $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{C}^n$.

В силу того, что непостоянная аналитическая функция $\varphi|_{L_k}$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ является открытым отображением, при любом $k \in \mathbb{N}$ можно взять некоторое собственное значение $w_k \in \mathbb{T}$ и содержащую его непустую открытую дугу $\gamma_k \subset \mathbb{T}$. Построим аналитическую на $\mathbb{T}$ функцию $\psi_k : \gamma_k \to L_k$ так, что $\varphi(\psi_k(w_k)) = w_k$. Теперь построим не тождественную нулю C^2–гладкую функцию $f_k : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ такую, что $f_k(w_k) \neq 0$, f_k не тождественна нулю на γ_k и $f_k \equiv 0$ вне γ_k. Определим функцию $E_k : \mathbb{T} \to \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ в виде $E_k(w) = f_k(w)e^{\langle\psi_k(w),z\rangle}$, $z \in \mathbb{C}^n$ при $w \in \gamma_k$ и $E_k(w) = 0$ при $w \notin \gamma_k$. Поскольку функция f_k C^2-гладкая на $\mathbb{T}$ и $e^{\langle\psi_k(w),z\rangle}$ бесконечно дифференцируемая по w на $\mathbb{T}$, то E_k – C^2-гладкая по w на $\mathbb{T}$ функция.

E_k при всех $k \in \mathbb{N}$ являются собственными функциями оператора T, соответствующими изолированным собственным значениям $w_k = \varphi(\lambda_k)$, где $w_k \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда множество

$$\widetilde{E} = \operatorname{span}\big\{f_k(w)e^{\langle\psi_k(w),z\rangle} : \ w \in \gamma_k\big\}_{k\in\mathbb{N}} = \operatorname{span}\big\{f_k(\varphi_k(\lambda))e^{\langle\lambda,z\rangle} : \ \lambda \in W\big\}_{k\in\mathbb{N}},$$

где

$$W = \big\{\lambda \in \mathbb{C}^n : \ \lambda \in \psi_k(\gamma_k)\big\}_{k\in\mathbb{N}},$$

определяет поле собственных функций T, соответствующих собственным значениям с единичным модулем. Из того, что для всех $k \in \mathbb{N}$ E_k являются C^2-гладкими по w функциями, следует, что $\widetilde{E}$ – C^2-гладкое поле собственных функций оператора T, соответствующих собственным значениям с единичным модулем.

Заметим, что $\widetilde{E}$ содержит подмножество

$$V_0 = \operatorname{span}\Big\{e^{\langle\lambda,z\rangle}\Big\}_{\lambda\in W},$$

где $W = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}^n : \quad \exists\ \alpha \in \mathbb{Q} : \ \varphi(\lambda) = e^{\alpha\pi \mathrm{i}}\Big\}$. Как показано в теореме 14, V_0 плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. Следовательно, $\widetilde{E}$ также плотно в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Таким образом, T имеет в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ C^2-гладкое охватывающее поле собственных функций, соответствующих собственным значениям с единичным модулем. Тогда по теореме 5 оператор T часто-гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. □

Из теорем 14 и 15 вытекают следующие утверждения.

Следствие 16. *Пусть полином* $P(z) = \sum\limits_{\alpha:\ |\alpha|=0}^{m} a_\alpha z^\alpha$, *где* $m \in \mathbb{N}$ *и* $a_\alpha \in \mathbb{C}$ *при любых* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, *отличен от постоянной. Тогда при выполнении условия* i_3) *оператор* $T = \sum\limits_{\alpha\colon |\alpha|=0}^{m} a_\alpha D_z^\alpha$ *хаотический и часто-гиперциклический в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Очевидно, что оператор коммутирует с дифференцированием. В [20, теорема 2] показаны его линейность и непрерывность в $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Следствие 17. *Пусть заданы числа* $m \in \mathbb{N}$ *и точки* $a_\alpha \in \mathbb{C}^n$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, *где* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. *Тогда при выполнении условия* i_4) *оператор* $Tf(z) = \sum\limits_{\alpha\colon |\alpha|=1}^{m} c_\alpha f(z + a_\alpha)$, *не кратный тождественному, хаотичен и часто-гиперцикличен в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

В силу [20, следствие 1] оператор линейный и непрерывный. Поскольку очевидно, что он коммутирует с дифференцированием, то утверждение верно.

Следствие 18. *Пусть* $N \in \mathbb{N}$ *и* $m \in \mathbb{N}$, *заданы точки* $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ *и* $a_\alpha \in \mathbb{R}^n$, *где* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$. *Тогда при выполнении условия* i_4) *оператор* $Tf(z) = \sum\limits_{\alpha\colon |\alpha|=0}^{N} \sum\limits_{\beta\colon |\beta|=1}^{m} c_{\alpha\beta} (D^\alpha f)(z + a_\alpha)$, *не кратный тождественному, хаотический и часто-гиперциклический в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

По [20, следствие 2] для оператора выполняются линейность и непрерывность, а свойство коммутирования с дифференцированием очевидно.

Следствие 19. *Пусть* $\Phi(z) = \sum\limits_{\alpha\colon |\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha z^\alpha$ – *непостоянная целая функция в пространстве* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, *где* $c_\alpha \in \mathbb{C}$ *при любых* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, *определим оператор*

$$T : f(z) \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\Phi(D)} \sum_{\alpha\colon |\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha D_z^\alpha f(z).$$

Тогда если $\Phi(z)$ – *функция экспоненциального типа, то при выполнении условия* i_3) *оператор* T *хаотический и часто-гиперциклический в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

В [20, теорема 3] показано, что оператор линейный и непрерывный. Поскольку он коммутирует с дифференцированием, то справедливо данное следствие.

Если $\Lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha\colon |\alpha|=1}^{\infty}$ – заданная последовательность точек $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}^n$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, то для семейства функций φ в силу условия i_4) при всех $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ существует зависящая от нее совокупность чисел $b_{\alpha,m}(\Lambda) = \sup\limits_{z \in \mathbb{C}^n} (\varphi_{m+1}(z + \lambda_\alpha) - \varphi_m(z))$.

Следствие 20. *Пусть для семейства* φ *заданы последовательность* $(d_\alpha)_{\alpha\colon |\alpha|=1}^{\infty}$ *чисел* $d_\alpha \in \mathbb{C}$, *где* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, *и последовательность* $\Lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha\colon |\alpha|=1}^{\infty}$ *точек* $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}^n$, *где* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, *таких, что* $\lim\limits_{\alpha \to \infty} |\lambda_\alpha| = \infty$ *и* $\sum\limits_{\alpha\colon |\alpha|=1}^{\infty} |d_\alpha| e^{b_{\alpha,m}(\Lambda)} < \infty$ *для любого* $m \in \mathbb{N}$. *Определим при выполнении условия* i_4) *на* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ *оператор* $T : f(z) \in \mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n) \to \sum\limits_{\alpha\colon |\alpha|=1}^{\infty} d_\alpha f(z + \lambda_\alpha)$. *Тогда* T *хаотичен и часто-гиперцикличен в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

Как показано в [20, следствие 3], для оператора выполнены свойства линейности и непрерывности. Его свойство коммутирования с дифференцированием очевидно.

Следствие 21. *Пусть в пространстве* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$ S *– обобщенная функция с компактным носителем, причем ее преобразование Фурье–Лапласа* $\widehat{S}(z) = S_\xi(e^{\langle \xi, z\rangle})$ *не является константой. Тогда при выполнении условия* i_4) *оператор свертки вида* $M_S[f](z) = S_t(f(z+t))$ *хаотический и часто-гиперциклический в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

По [20, следствие 4] оператор линейный и непрерывный. В [21, теорема 17.3] доказано, что он коммутирует с дифференцированием.

Следствие 22. *Пусть для семейства функций* φ *выполняется условие*

$$\forall\, m,\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, l = l_{m,k} \in \mathbb{N},\ r = r_{m,k} > 0 :\ \forall\, z,\, t \in \mathbb{C}^n \ \ \varphi_l(z+t) \leq \varphi_m(z) + \varphi_k(t) + r,$$

а S *определен как линейный непрерывный функционал на* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, *преобразование Фурье–Лапласа которого* $\widehat{S}(z) = S_\xi(e^{\langle \xi, z\rangle})$ *не является константой. Тогда при выполнении условия* i_4) *оператор свертки* $M_S[f](z) = S_t(f(z+t))$ *хаотичен и часто-гиперцикличен в* $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$.

В [20, лемма 7] были доказаны линейность и непрерывность оператора. В [20, лемма 6] показано, что он коммутирует с дифференцированием.

Список литературы

[1] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Publ., Redwood City, CA, 1989.
DOI: http://doi.org/10.1201/9780429280801

[2] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **99** (4), 332–334 (1992).
DOI: https://doi.org/10.2307/2324899

[3] G. Godefroy, J.H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (2), 229–269 (1991).
DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(91)90078-J

[4] Р.М. Кроновер, *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории*, Постмаркет, М., 2000.

[5] J.J. Betancor, M. Sifi, K. Trimeche, *Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with Dunkl operators on C*, Acta Math. Hung. **106** (1–2), 101–116 (2005).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-005-0009-1

[6] F. Bayart, S. Grivaux, *Frequently hypercyclic operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (11), 5083–5117 (2006).

DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-06-04019-0

[7] A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann, *On a theorem of Godefroy and Shapiro*, Integral Equ. Oper. Theory **56** (2), 151–162 (2006).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00020-006-1423-7

[8] A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann, *Frequently hypercyclic operators and vectors*, Ergodic Th. & Dynam. Systems **27** (2), 383–404 (2007).
DOI: https://doi.org/10.1017/S014338570600085X

[9] F. Bayart, E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511581113

[10] K.-G. Grosse-Erdmann, A.M. Peris, *Linear chaos*, Springer, London, 2011.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2170-1

[11] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2013.
DOI: https://doi.org/10.1016/C2009-0-61160-0

[12] S. Grivaux, *A new class of frequently hypercyclic operators*, Indiana Univ. Math. J. **60** (4), 1177–1202 (2011).
URL: https://doi.org/10.1512/iumj.2011.60.4350

[13] J. Bonet, *Dynamics of the differentiation operator on weighted spaces of entire functions*, Math. Z. **261** (3), 649–657 (2009).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00209-008-0347-0

[14] А.В. Абанин, Ф.Ч. Тиен, *Классические операторы в весовых банаховых пространствах голоморфных функций*, Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. **142**, 3–13 (2017).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/into249

[15] А.В. Абанин, Т.И. Абанина, *О композиционных операторах в гильбертовых пространствах целых функций*, Изв. вузов. Матем. (10), 3–7 (2017).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/ivm9284

[16] В.Э. Ким, *Гиперциклические и хаотические операторы на пространстве целых функций*, Тр. Института математики с ВЦ УНЦ РАН **1**, 126–130 (2008).

[17] В.Э. Ким, *Полнота систем производных функций Эйри и гиперциклические операторы*, Уфимск. матем. журн. **2** (4), 52–57 (2010).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/ufa71

[18] B.A. Taylor, *On weighted polynomial approximation of entire functions*, Pacific J. Math. **36** (2), 523–539 (1971).
DOI: http://doi.org/10.2140/pjm.1971.36.523

[19] F. Haslinger, *Weighted spaces of entire functions*, Indiana Univ. Math. J. **35** (1), 193–208 (1986).
URL: https://doi.org/10.1512/iumj.1986.35.35011

[20] А.И. Рахимова, *О гиперциклических операторах в весовых пространствах целых функций*, Таврический вестник информатики и математики (1), 88–110 (2023).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/tvim162

[21] В.В. Напалков, *Уравнения свертки в многомерных пространствах*, Наука, М., 1982.

[22] Р. Ганнинг, Х. Росси, *Аналитические функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1969.

Алсу Ильдаровна Рахимова
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, д. 112, г. Уфа, 450008, Россия,
E-mail: alsu1405@mail.ru

Volume 2, Issue 2 UDC 517.55
pp. 84–106 (2024) MSC 32C15

Chaotic and frequently hypercyclic operators in the weighted space of entire functions

A.I. Rakhimova

Abstract. We study the issues of chaoticity and frequently hypercyclicity of various operators in the weighted space $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, defined as the projective limit of Banach spaces. Theorems 8–13 consider the cases of differentiation and shift operators, as well as their compositions in $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. For linear continuous operators commuting with differentiation, Theorem 14 shows that they are chaotic in $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$. In Theorem 15, such operators are proved to be frequently hypercyclic in $\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{C}^n)$, and also are the most important consequences of these statements are indicated.

Keywords: weight space, entire functions, chaotic operator, frequently hypercyclic operator, differentiation operator, shift operator.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.84-106

References

[1] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Publ., Redwood City, CA, 1989.
DOI: http://doi.org/10.1201/9780429280801

[2] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **99** (4), 332–334 (1992).
DOI: https://doi.org/10.2307/2324899

[3] G. Godefroy, J.H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (2), 229–269 (1991).
DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(91)90078-J

[4] R.M. Crownover, *Introduction to fractals and chaos*, Jones and Bartlet, Boston, 1995.

[5] J.J. Betancor, M. Sifi, K. Trimeche, *Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with Dunkl operators on C*, Acta Math. Hung. **106** (1–2), 101–116 (2005).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-005-0009-1

[6] F. Bayart, S. Grivaux, *Frequently hypercyclic operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (11), 5083–5117 (2006).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-06-04019-0

Received: 23 April 2024. Accepted: 02 July 2024. Published: 16 July 2024.

[7] A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann, *On a theorem of Godefroy and Shapiro*, Integral Equ. Oper. Theory **56** (2), 151–162 (2006).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00020-006-1423-7

[8] A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann, *Frequently hypercyclic operators and vectors*, Ergodic Th. & Dynam. Systems **27** (2), 383–404 (2007).
DOI: https://doi.org/10.1017/S014338570600085X

[9] F. Bayart, E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511581113

[10] K.-G. Grosse-Erdmann, A.M. Peris, *Linear chaos*, Springer, London, 2011.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2170-1

[11] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2013.
DOI: https://doi.org/10.1016/C2009-0-61160-0

[12] S. Grivaux, *A new class of frequently hypercyclic operators*, Indiana Univ. Math. J. **60** (4), 1177–1202 (2011).
URL: https://doi.org/10.1512/iumj.2011.60.4350

[13] J. Bonet, *Dynamics of the differentiation operator on weighted spaces of entire functions*, Math. Z. **261** (3), 649–657 (2009).
DOI: https://doi.org/10.1007/s00209-008-0347-0

[14] A.V. Abanin, Ph.T. Tien, *Classical operators in weighted Banach spaces of holomorphic functions*, J. Math. Sci. **241** (6), 647–657 (2019).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04452-1

[15] A.V. Abanin, T.I. Abanina, *On composition operators on Hilbert spaces of entire functions*, Russian Math. (Iz. VUZ) **61** (10), 1–4 (2017).
DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X17100012

[16] V. E. Kim, *Hypercyclic and chaotic operators on the space of entire functions*, Proc. of the Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science **1**, 126–130 (2008) [in Russian].

[17] V.E. Kim, *Completeness of systems of derivatives of Airy functions and hypercyclic operators*, Ufimsk. Mat. Zh. **2** (4), 52–57 (2010) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/eng/ufa71

[18] B.A. Taylor, *On weighted polynomial approximation of entire functions*, Pacific J. Math. **36** (2), 523–539 (1971).
DOI: http://doi.org/10.2140/pjm.1971.36.523

[19] F. Haslinger, *Weighted spaces of entire functions*, Indiana Univ. Math. J. **35** (1), 193–208 (1986).
URL: https://doi.org/10.1512/iumj.1986.35.35011

[20] A.I. Rakhimova, *On hypercyclic operators in weighted spaces of entire functions*, Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics (1), 88–110 (2023) [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/eng/tvim162

[21] V. V. Napalkov, *Convolution equations in multidimensional spaces*, Nauka, Moscow, 1982 [in Russian].

[22] R. C. Gunning, H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1965.

Alsu Il'darovna Rakhimova
Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science,
Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science,
112 Chernyshevsky str., Ufa 450008, Russia,
E-mail: alsu1405@mail.ru

Том 2, Выпуск 2 УДК 517.922
Стр. 107–121 (2024) MSC 35L82

Начально-краевая задача для одного псевдогиперболического уравнения с ненулевыми граничными условиями

В.В. Шеметова

Аннотация. Рассматривается смешанная краевая задача в четверти плоскости для одного псевдогиперболического уравнения. Указываются условия на граничные условия, при которых смешанная задача однозначно разрешима в соболевских пространствах с экспоненциальным весом.

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, условие Лопатинского, пространство Соболева.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.107-121

Введение

В работе продолжается исследование корректности смешанных краевых задач в четверти плоскости $\mathbb{R}^2_{++} = \{t > 0, x > 0\}$ для псевдогиперболического уравнения

$$(I - D_x^2)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = f(t, x), \tag{1}$$

здесь I – тождественный оператор, $a \in \mathbb{R}$. Подобное уравнение (1) возникает при математическом описании крутильных колебаний стержня [1, 2], а также при моделировании продольных колебаний стержня [3, 4]. Данное уравнение является уравнением, не разрешенным относительно старшей производной по времени. Такие уравнения часто называют уравнениями соболевского типа, именно с работы С.Л. Соболева (см., например, [5], с. 333–447) началось интенсивное развитие этого направления в теории уравнений с частными производными.

В монографии Г.В. Демиденко и С.В. Успенского [6] была введена классификация линейных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, вида

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t, x),$$

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00370, https://rscf.ru/project/24-21-00370.

Поступила: 31.01.2024. Принята: 04.06.2024. Опубликована: 16.07.2024.

где $L_0(D_x)$ является квазиэллиптическим оператором и построена теория краевых задач для некоторых классов. В [6] был введён класс псевдогиперболических дифференциальных уравнений и для них была изучена задача Коши. Задача Коши для некоторых нелинейных псевдогиперболических уравнений изучена в [7]. В целом теория краевых задач для псевдогиперболических уравнений на данный момент еще не построена. Существуют некоторые результаты по отдельным начально-краевым задачам (см., например, [8–10]).

Работа посвящена рассмотрению следующей смешанной задачи

$$\begin{gathered}(I - D_x^2)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad D_t u|_{t=0} = 0, \\ \big(b_{11} + b_{12}D_x\big)u|_{x=0} = \varphi_1(t), \\ \big(b_{21} + b_{22}D_x\big)u|_{x=0} = \varphi_2(t),\end{gathered} \tag{2}$$

здесь $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ и $j = 1, 2$. Будем предполагать, что задача (2) удовлетворяет условию Лопатинского (см., например, [6]). В случае, если правая часть уравнения ненулевая, а $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, результат опубликован в [11].

Цель работы состоит в том, чтобы доказать однозначную разрешимость задачи (2) в анизотропном весовом соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^2_{++})$.

1. Полученный результат

Перед тем как сформулировать основной результат, напомним определение анизотропного весового соболевского пространства (см., например, [12, 13]).

Определение 1. Функция $u(t, x)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству $W_2^{l_1,l_2}(G)$, $l_1 > 0$, $l_2 > 0$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$, если существуют обобщенные производные $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t, x)$ в области G при $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ такие, что

$$\frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2} \leq 1,$$

при этом $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t, x) \in L_2(G)$. Норма в $W_2^{l_1,l_2}(G)$ имеет вид

$$\|u(t, x), W_2^{l_1,l_2}(G)\| = \sum_{\alpha:\, \alpha_1/l_1 + \alpha_2/l_2 \leq 1} \|D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t, x), L_2(G)\|.$$

Определение 2. Функция $u(t, x)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству с экспоненциальным весом $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G)$, $l_1 > 0$, $l_2 > 0$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$, если функция $e^{-\gamma t}u(t, x)$ принадлежит $W_2^{l_1,l_2}(G)$. Норма в этом пространстве задается следующим образом

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G)\| = \|e^{-\gamma t}u(t, x), W_2^{l_1,l_2}(G)\|.$$

Далее перейдем к формулировке условия Лопатинского для задачи (2). Рассмотрим краевую задачу на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+ = \{\tau \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\tau > \gamma\}$, $\gamma > 0$

$$\begin{aligned}
&\tau^2(I - D_x^2)v + D_x^4 v - a^2 D_x^2 v = 0, \quad x > 0,\\
&\big(b_{11} + b_{12}D_x\big)v|_{x=0} = \psi_1,\\
&\big(b_{12} + b_{22}D_x\big)v|_{x=0} = \psi_2,\\
&\sup_{x>0}|v| < \infty.
\end{aligned} \tag{3}$$

Определение 3. Смешанная задача (2) удовлетворяет условию Лопатинского, если краевая задача (3) однозначно разрешима при любых ψ_1, ψ_2.

Очевидно, что при $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma > 0$, характеристическое уравнение для дифференциального уравнения в задаче (3)

$$L(\tau, \lambda) = \lambda^4 - (\tau^2 + a^2)\lambda^2 + \tau^2 = 0 \tag{4}$$

не имеет чисто мнимых корней. Более того, два корня характеристического уравнения (4) λ_1^-, λ_2^- лежат в левой полуплоскости, а два корня λ_1^+, λ_2^+ находятся в правой.

Характеристические многочлены граничных операторов рассматриваемой задачи можно представить в виде

$$\begin{aligned}
b_1(\lambda) &= b_{11} + b_{12}\lambda,\\
b_2(\lambda) &= b_{21} + b_{22}\lambda.
\end{aligned}$$

Матрицу Лопатинского можно записать следующим образом

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}.$$

Согласно [6] краевая задача (3) однозначно разрешима, если

$$\det B \neq 0.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие Лопатинского для краевой задачи* (2) *и существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что для любых*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t) \in W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+), \quad \gamma > \gamma_0, \quad \varphi_1(t)\big|_{t=0} = D_t\varphi_1(t)\big|_{t=0} = D_t^2\varphi_1(t)\big|_{t=0} = 0,\\
&\varphi_2(t) \in W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+), \quad \gamma > \gamma_0, \quad \varphi_2(t)\big|_{t=0} = D_t\varphi_2(t)\big|_{t=0} = D_t^2\varphi_2(t)\big|_{t=0} = 0.
\end{aligned}$$

Тогда краевая задача (2) *однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства* $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$ *таких, что* $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$ *и* $\gamma > \gamma_0$*, для решения* $u(t,x)$ *имеет* *место оценка*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\| \le c(\gamma_0)\big(\|\varphi_1(t), W^3_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\| + \|\varphi_2(t), W^3_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|\big),$$

где константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от функций* $\varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$.

При доказательстве теоремы имеет большое значение обобщенная теорема Пэли–Винера [6, 14]). Напомним ее формулировку.

Рассмотрим функции $v(\tau,x)$, $\tau = i\eta+\sigma$, принадлежащие для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$ пространству $\widetilde{L}_2(\mathbb{C}^+_\gamma)$, т. е.

а) для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$ функция $v(\tau,x)$ – аналитическая в $\mathbb{C}^+_\gamma$;

б) $\sup\limits_{\sigma>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} |v(i\eta+\sigma,x)|^2\,dx\,d\eta < \infty$.

Введем норму

$$\sup_{\sigma>\gamma}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} |v(i\eta+\sigma,x)|^2\,dx\,d\eta\right)^{1/2}.$$

Полученное таким образом линейное нормированное пространство будем обозначать $\widetilde{L}_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}_+)$. Для описания образа интегрального оператора Лапласа $\mathfrak{L}$ пространства

$$W^{l_1,l_2}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}),\quad l_1\ge 0,\quad l_2 \ge 0,$$

рассмотрим множество функций $v(\tau,x)$, принадлежащих $\widetilde{L}_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}_+)$, таких, что при $l_1, l_2 > 0$

$$\sup_{\sigma>\gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} |\tau|^{2\alpha_1}|D^{\alpha_2}_x v(i\eta+\sigma,x)|^2\,dx\,d\eta < \infty,\quad 0\le \frac{\alpha_1}{l_1}+\frac{\alpha_2}{l_2}\le 1,$$

при $l_1 = 0$

$$\sup_{\sigma>\gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} |D^{\alpha_2}_x v(i\eta+\sigma,x)|^2\,dx\,d\eta < \infty,\quad 0\le\alpha_2\le l_2,$$

при $l_2 = 0$

$$\sup_{\sigma>\gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} |\tau|^{2\alpha_1}|v(i\eta+\sigma,x)|^2\,dx\,d\eta < \infty,\quad 0\le\alpha_1\le l_1,$$

Введем на нем норму

$$\sum_{\alpha}\sup_{\sigma>\gamma}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} |i\eta+\sigma|^{2\alpha_1}|D^{\alpha_2}_x v(i\eta+\sigma,x)|^2\,dx\,d\eta\Big)^{\frac12}.$$

Полученное линейное нормированное пространство будем обозначать через $\widetilde{W}^{l_1,l_2}_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}_+)$.

Теорема 5 (обобщенная теорема Пэли–Винера). *Интегральный оператор Лапласа $\mathfrak{L}$ отображает пространство функций из $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(\mathbb{R}^2_{++})$ таких, что*

$$D_t^k u\big|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \dots, l_1 - 1,$$

на пространство $\widetilde{W}_2^{l_1,l_2}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

2. Доказательство разрешимости краевой задачи

Для доказательства теоремы 4 воспользуемся схемой, предложенной в [6].

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу на полупрямой $x > 0$ с параметром $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, где $\tau = \sigma + i\eta$ и $\sigma > \gamma > 0$, для обыкновенного дифференциального уравнения, которая получается после применения оператора Лапласа по t к задаче (2)

$$\begin{aligned} &D_x^4 v - (\tau^2 + a^2) D_x^2 v + \tau^2 v = 0, \quad x > 0, \\ &\big(b_{11} + b_{12} D_x\big) v|_{x=0} = \tilde{\varphi}_1(\tau), \\ &\big(b_{21} + b_{22} D_x\big) v|_{x=0} = \tilde{\varphi}_2(\tau), \\ &\sup_{x>0} |v| < \infty, \end{aligned} \tag{5}$$

здесь $\tilde{\varphi}_1(\tau)$ и $\tilde{\varphi}_2(\tau)$ – преобразования Лапласа по переменной t функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ соответственно. Дальнейшая проверка состоит в доказательстве того, что задача (5) имеет единственное решение в соболевском пространстве $W_2^4(\mathbb{R}_+)$ при $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$.

Так как для задачи (2) справедливо условие Лопатинского, то краевая задача (5) однозначно разрешима. Решение последней можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} v(\tau, x) = &\frac{b_{21}\big(e^{-\lambda_1^+ x} - e^{-\lambda_2^+ x}\big) + b_{22}\big(e^{-\lambda_2^+ x}\lambda_1^+ - e^{-\lambda_1^+ x}\lambda_2^+\big)}{(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})}\tilde{\varphi}_1(\tau) \\ &- \frac{b_{11}\big(e^{-\lambda_1^+ x} - e^{-\lambda_2^+ x}\big) + b_{12}\big(e^{-\lambda_2^+ x}\lambda_1^+ - e^{-\lambda_1^+ x}\lambda_2^+\big)}{(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})}\tilde{\varphi}_2(\tau) = v_1(\tau, x) - v_2(\tau, x), \end{aligned} \tag{6}$$

где λ_1^+ и λ_2^+ – корни характеристического уравнения (4), расположенные в правой полуплоскости. Сформулируем утверждения о корнях, которые понадобятся при получении оценок (6). Подробные доказательства приведены в работе [11].

Лемма 6. *Для корней характеристического уравнения* (4) *имеют место соотношения*:

$$\begin{gathered} \lambda_j^+(\tau) = -\lambda_j^-(\tau), \quad j = 1, 2, \\ \lambda_1^+(\tau)\lambda_2^+(\tau) = \tau, \quad (\lambda_1^+(\tau))^2 + (\lambda_2^+(\tau))^2 = \tau^2 + a^2, \\ \frac{|\tau|}{2} \le |\lambda_1^+(\tau)| \le 2|\tau|, \quad \frac{1}{2} \le |\lambda_2^+(\tau)| \le 2. \end{gathered}$$

Лемма 7. *Существуют константы $c_1, c_2 > 0$, что при $\sigma > \gamma > \gamma_0 > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$ имеют место оценки*

$$\operatorname{Re}\lambda_1^+(\tau)|\lambda_1^+(\tau)| \geq c_1\sigma|\tau|, \quad \operatorname{Re}\lambda_2^+(\tau)|\lambda_2^+(\tau)| \geq c_2\sigma,$$

где $\lambda_j^+(\tau)$, $j = 1, 2$ – корни уравнения (4), $\operatorname{Re}\lambda_j^+(\tau) > 0$, $j = 1, 2$.

Лемма 8. *Пусть функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 4, тогда при $\operatorname{Re}\tau > \gamma > \gamma_0 > 0$ справедливы оценки:*

$$\|v(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq c(\gamma_0)\big(|\tilde{\varphi}_1(\tau)| + |\tilde{\varphi}_2(\tau)|\big),$$
$$\|D_x^k v(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq c(\gamma_0)|\tau|\big(|\tilde{\varphi}_1(\tau)| + |\tilde{\varphi}_2(\tau)|\big), \quad k = 1, 2,$$
$$\|D_x^k v(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq c(\gamma_0)|\tau|^{k-1}\big(|\tilde{\varphi}_1(\tau)| + |\tilde{\varphi}_2(\tau)|\big), \quad k = 3, 4,$$

где константа c положительная и не зависит от $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$.

Доказательство. Используя функцию Хевисайда $\theta(x)$, функцию $v(\tau,x)$ можно записать в виде

$$v(\tau,x)\theta(x) = v_1(\tau,x)\theta(x) - v_2(\tau,x)\theta(x).$$

Рассмотрим функцию $v_1(\tau,x)\theta(x)$, с учетом формулы преобразования Фурье получаем

$$F[v_1(\tau,x)\theta(x)](\xi) = \left[\frac{b_{21} + b_{22}\lambda_2^+}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} + \frac{b_{22}}{(\lambda_2^+ + i\xi)}\right] \cdot \frac{\tilde{\varphi}_1(\tau)}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}}.$$

Применяя равенство Парсеваля и неравенство Минковского, приходим к следующему

$$\|v_1(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| = \|F[v_1(\tau,x)\theta(x)](\xi), L_2(\mathbb{R})\|$$
$$\leq \left[\left\|\frac{b_{21} + b_{22}\lambda_2^+}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)}, L_2(\mathbb{R})\right\| + \left\|\frac{b_{22}}{(\lambda_2^+ + i\xi)}, L_2(\mathbb{R})\right\|\right] \cdot \frac{|\tilde{\varphi}_1(\tau)|}{|b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}|}.$$

Используя оценки на λ_2^+ и λ_1^+ из леммы 7, имеем

$$\left|\frac{b_{21} + b_{22}\lambda_2^+}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)}\right| \leq \frac{C}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad \left|\frac{b_{22}}{(\lambda_2^+ + i\xi)}\right| \leq \frac{|b_{22}|}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Подставляя полученные выражения в рассматриваемую норму и непосредственно вычисляя интегралы, получаем

$$\|v_1(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq c_1|\tilde{\varphi}_1(\tau)|.$$

Далее перейдем к анализу $D_x^k v_1(\tau,x)$, а именно выражения

$$\frac{b_{21}\big(e^{-\lambda_1^+ x}(-\lambda_1^+)^k - e^{-\lambda_2^+ x}(-\lambda_2^+)^k\big) + b_{22}\big(e^{-\lambda_2^+ x}(-\lambda_2^+)^k\lambda_1^+ - e^{-\lambda_1^+ x}(-\lambda_1^+)^k\lambda_2^+\big)}{(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})}\tilde{\varphi}_1(\tau). \quad (7)$$

Рассмотрим выражение (7) при $k = 2$. Умножив на функцию Хевисайда $\theta(x)$ и применив преобразование Фурье, получаем

$$F[D_x^2 v_1(\tau,x)\theta(x)](\xi) = \left[\frac{\lambda_1^+\lambda_2^+\big(b_{22}\lambda_2^+ - b_{21}\big)}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} + \frac{b_{21}(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{\lambda_2^+ + i\xi} - \frac{b_{22}\lambda_1^+\lambda_2^+}{\lambda_1^+ + i\xi}\right] \cdot \frac{\tilde{\varphi}_1(\tau)}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}}.$$

Используя оценки из леммы 7, имеем

$$\left|\frac{\lambda_1^+\lambda_2^+\big(b_{22}\lambda_2^+ - b_{21}\big)}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)}\right| \le \frac{C_1|\tau|}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad \left|\frac{b_{21}(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{\lambda_2^+ + i\xi}\right| \le \frac{C_2|\tau|}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Тогда для $\|D_x^2 v_1(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\|$ применяя неравенство Минковского, вычисляя соответствующие интегралы, приходим к неравенству

$$\left\|D_x^2 v_1(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\right\| \le c_{12}(\gamma)|\tau||\tilde{\varphi}_1(\tau)|.$$

Рассмотрим выражение (7) при $k=4$. Применяя преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} F[D_x^4 v_1(\tau,x)\theta(x)](\xi) = \Bigg[&\frac{b_{21}\lambda_1^+\lambda_2^+\big((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+\lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2\big) - b_{22}\big((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2\big)\big(\lambda_1^+ + \lambda_2^+\big)}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)} \\ &+ \frac{b_{21}\big((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2\big)\big(\lambda_1^+ + \lambda_2^+\big) - b_{22}\lambda_1^+\lambda_2^+\big((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+\lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2\big)}{(\lambda_1^+ + i\xi)} \\ &+ \frac{b_{22}\lambda_1^+(\lambda_2^+)^2\big((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+\lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2\big) - b_{21}\lambda_2^+\big((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2\big)\big(\lambda_1^+ + \lambda_2^+\big)}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)}\Bigg] \cdot \frac{\tilde{\varphi}_1(\tau)}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}}. \end{aligned}$$

С учетом леммы 7 имеют место оценки

$$\left|\frac{b_{21}\lambda_1^+\lambda_2^+\big((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+\lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2\big) - b_{22}\big((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2\big)\big(\lambda_1^+ + \lambda_2^+\big)}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)}\right| \le \frac{C_3|\tau|^3}{\sqrt{1+\xi^2}},$$

$$\left|\frac{b_{21}\big((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2\big)\big(\lambda_1^+ + \lambda_2^+\big) - b_{22}\lambda_1^+\lambda_2^+\big((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+\lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2\big)}{(\lambda_1^+ + i\xi)}\right| \le \frac{C_3|\tau|^3}{|\lambda_1^+ + i\xi|},$$

$$\left|\frac{b_{22}\lambda_1^+(\lambda_2^+)^2\big((\lambda_1^+)^2 + \lambda_1^+\lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2\big) - b_{21}\lambda_2^+\big((\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2\big)\big(\lambda_1^+ + \lambda_2^+\big)}{(\lambda_1^+ + i\xi)(\lambda_2^+ + i\xi)}\right| \le \frac{C_3|\tau|^3}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Рассмотрим норму

$$\left\|D_x^4 v_1(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\right\| = \left\|F[D_x^4 v_1(\tau,x)\theta(x)](\xi), L_2(\mathbb{R})\right\|.$$

Применив неравенство Минковского и оценки, указанные выше, и вычисляя соответствующие интегралы, приходим к неравенству

$$\left\|D_x^4 v_1(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\right\| \le c_{14}(\gamma)|\tau|^3|\tilde{\varphi}_1(\tau)|.$$

Повторим рассуждения для $v_2(\tau,x)$. Преобразования Фурье от $v_2(\tau,x)\theta(x)$ имеет вид

$$F[v_2(\tau,x)\theta(x)](\xi)=\left[\frac{b_{11}+b_{12}\lambda_2^+}{(\lambda_1^++i\xi)(\lambda_2^++i\xi)}+\frac{b_{12}}{(\lambda_2^++i\xi)}\right]\cdot\frac{\tilde{\varphi}_2(\tau)}{b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12}}.$$

Применяя равенство Парсеваля и неравенство Минковского, приходим к следующему

$$\begin{aligned}\|v_2(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|&=\|F[v_2(\tau,x)\theta(x)](\xi),L_2(\mathbb{R})\|\\&\le\left[\left\|\frac{b_{11}+b_{12}\lambda_2^+}{(\lambda_1^++i\xi)(\lambda_2^++i\xi)},L_2(\mathbb{R})\right\|+\left\|\frac{b_{12}}{(\lambda_2^++i\xi)},L_2(\mathbb{R})\right\|\right]\cdot\frac{|\tilde{\varphi}_2(\tau)|}{|b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12}|}.\end{aligned}$$

Используя оценки на корень λ_2^+ из леммы 7, получаем

$$\left|\frac{b_{11}+b_{12}\lambda_2^+}{(\lambda_1^++i\xi)(\lambda_2^++i\xi)}\right|\le\frac{C}{\sqrt{1+\xi^2}},\quad\left|\frac{b_{12}}{(\lambda_2^++i\xi)}\right|\le\frac{|b_{22}|}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Подставляя полученные выражения в рассматриваемую норму и считая интегралы, имеем

$$\|v_2(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|\le c_2|\tilde{\varphi}_2(\tau)|.$$

Далее перейдем к $D_x^k v_2(\tau,x)$, а именно

$$\frac{b_{11}\big(e^{-\lambda_1^+x}(-\lambda_1^+)^k-e^{-\lambda_2^+x}(-\lambda_2^+)^k\big)+b_{12}\big(e^{-\lambda_2^+x}(-\lambda_2^+)^k\lambda_1^+-e^{-\lambda_1^+x}(-\lambda_1^+)^k\lambda_2^+\big)}{(\lambda_1^+-\lambda_2^+)(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12})}\tilde{\varphi}_2(\tau). \qquad (8)$$

Умножив на функцию Хевисайда $\theta(x)$ и применив преобразование Фурье к выражению (8) при $k=2$, получаем

$$F[D_x^2v_2(\tau,x)\theta(x)](\xi)=\left[\frac{\lambda_1^+\lambda_2^+\big(b_{12}\lambda_2^+-b_{11}\big)}{(\lambda_1^++i\xi)(\lambda_2^++i\xi)}+\frac{b_{11}(\lambda_1^++\lambda_2^+)}{\lambda_2^++i\xi}-\frac{b_{12}\lambda_1^+\lambda_2^+}{\lambda_1^++i\xi}\right]\cdot\frac{\tilde{\varphi}_2(\tau)}{b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12}},$$

используя оценки из леммы 7, имеем

$$\left|\frac{\lambda_1^+\lambda_2^+\big(b_{12}\lambda_2^+-b_{11}\big)}{(\lambda_1^++i\xi)(\lambda_2^++i\xi)}\right|\le\frac{C_1|\tau|}{\sqrt{1+\xi^2}},\quad\left|\frac{b_{11}(\lambda_1^++\lambda_2^+)}{\lambda_2^++i\xi}\right|\le\frac{C_2|\tau|}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Тогда для $\|D_x^2v_2(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|$ справедливо

$$\big\|D_x^2v_2(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\big\|\le c_{12}(\gamma)|\tau||\tilde{\varphi}_2(\tau)|.$$

Рассмотрим выражение (8) при $k = 4$. Применяя преобразование Фурье, получаем

$$F[D_x^4 v_2(\tau,x)\theta(x)](\xi) = \Bigg[\frac{b_{11}\lambda_1^+\lambda_2^+\big((\lambda_1^+)^2+\lambda_1^+\lambda_2^+ +(\lambda_2^+)^2\big) - b_{12}\big((\lambda_1^+)^2+(\lambda_2^+)^2\big)\big(\lambda_1^+ +\lambda_2^+\big)}{(\lambda_1^+ +i\xi)(\lambda_2^+ +i\xi)}$$
$$+\frac{b_{11}\big((\lambda_1^+)^2+(\lambda_2^+)^2\big)\big(\lambda_1^+ +\lambda_2^+\big) - b_{12}\lambda_1^+\lambda_2^+\big((\lambda_1^+)^2+\lambda_1^+\lambda_2^+ +(\lambda_2^+)^2\big)}{(\lambda_1^+ +i\xi)}$$
$$+\frac{b_{12}\lambda_1^+(\lambda_2^+)^2\big((\lambda_1^+)^2+\lambda_1^+\lambda_2^+ +(\lambda_2^+)^2\big) - b_{11}\lambda_2^+\big((\lambda_1^+)^2+(\lambda_2^+)^2\big)\big(\lambda_1^+ +\lambda_2^+\big)}{(\lambda_1^+ +i\xi)(\lambda_2^+ +i\xi)}\Bigg]\cdot\frac{\tilde{\varphi}_2(\tau)}{b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12}}.$$

Отсюда с учетом леммы 7 имеем оценку

$$\big\|D_x^4 v_2(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\big\| \le c_{24}(\gamma)|\tau|^3|\tilde{\varphi}_2(\tau)|.$$

□

Доказательство теоремы 4. Функция $v(\tau,x)$ вида (6) – решение краевой задачи (5), принадлежит пространству $W_2^4(\mathbb{R}_+)$, и для него выполняются оценки из леммы 8. Поскольку константы $c>0$ не зависят от τ, $\tilde{\varphi}_1(\tau)$ и $\tilde{\varphi}_2(\tau)$, то при $\gamma>\gamma_0>0$ справедливо

$$\|v(\tau,x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\| \le c\|\,|\tilde{\varphi}_1(\tau)|+|\tilde{\varphi}_2(\tau)\big|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+)\|,$$
$$\|\tau^2 v(\tau,x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\| + \|\tau^2 D_x^2 v(\tau,x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\|$$
$$+\|D_x^4 v(\tau,x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+) \le c\|\tau^3\big(|\tilde{\varphi}_1(\tau)|+|\tilde{\varphi}_2(\tau)\big|\big), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+)\|.$$

Чтобы воспользоваться обобщенной теоремой Пэли–Винера, нужно проверить аналитичность функции $v(\tau,x)$ из (6) в $\mathbb{C}_\gamma^+$ при $x>0$. Однако, это очевидно, поскольку функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ из $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, $\gamma>\gamma_0$, поэтому $\tilde{\varphi}_1(\tau)$ и $\tilde{\varphi}_2(\tau)$ аналитические в $\mathbb{C}_\gamma^+$. Принимая во внимание явное выражение (6) и выполнение условия Лопатинского, видим, что функция $v(\tau,x)$ является также аналитической в $\mathbb{C}_\gamma^+$ при $x>0$.

Применяя обобщенную теорему Пэли–Винера получаем, что функция

$$u(t,x) = \mathfrak{L}^{-1}_{\tau\to t}(v(\tau,x)),$$

принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma>\gamma_0$, $\gamma_0>0$, при этом $D_t^2 D_x^2 u(t,x)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$. Она является решением задачи (2), и справедлива оценка

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \le c(\gamma)\big(\|\varphi_1(t), W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+)\| + \|\varphi_2(t), W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+)\|\big).$$

Таким образом, краевая задача (2) имеет решение. Далее покажем, что оно единственно. Для этого нужно убедиться, что изучаемое уравнение с нулевыми граничными условиями имеет нулевое решение.

Предположим, что $u(t,x)$ из $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma>\gamma_0>0$, является решением задачи (2) при $\varphi_1(t)\equiv 0$ и $\varphi_2(t)\equiv 0$. Следовательно, ее преобразование Лапласа по t представляет собой решение краевой задачи

$$
\begin{gathered}
D_x^4 v-(\tau^2+a^2)D_x^2 v+\tau^2 v=0, \quad x>0,\\
(b_{11}+b_{12}D_x)v|_{x=0}=0,\\
(b_{21}+b_{22}D_x)v|_{x=0}=0,
\end{gathered}
\tag{9}
$$

принадлежащее $W_2^4(\mathbb{R}_+)$. Тогда по теореме вложения $\sup\limits_{x\geq 0}|v|<\infty$. Но поскольку краевая задача (9) с условием ограниченности решения удовлетворяет условию Лопатинского, то $v(\tau,x)=0$. Следовательно, $u(t,x)=0$ почти всюду. $\square$

Пример 9. Рассмотрим смешанную задачу

$$
\begin{gathered}
(I-D_x^2)D_t^2 u+D_x^4 u=0, \quad x>0, \quad t>0,\\
u|_{t=0}=0, \quad D_t u|_{t=0}=0,\\
u|_{x=0}=\varphi_1(t), \quad D_x u|_{x=0}=0,
\end{gathered}
$$

будем искать решение в соболевском пространстве с экспоненциальным весом $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$. Покажем, что если потребовать от $\varphi_1(t)$ меньше условий гладкости, чем указано в теореме, то решение не будет принадлежать указанному классу.

Предположим, что для любой функции $\varphi_1(t)$ из пространства $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, $\gamma>\gamma_0>0$ и $\varphi_1(t)\big|_{t=0}=D_t\varphi_1(t)\big|_{t=0}=0$ существует решение задачи. Пусть

$$
\varphi_1(t)=\begin{cases}
-3t^3+4t^2, & t\in[0,1],\\
e^{-t+1}, & t>1,\\
0, & t<0.
\end{cases}
$$

Преобразование Лапласа для нее имеет вид

$$
\tilde{\varphi}_1(\tau)=\frac{8+11\mathrm{e}^{-\tau}}{\tau^3+\tau^2}+\frac{\mathrm{e}^{-\tau}\,(28\tau+18)-(10\tau+18)}{\tau^5+\tau^4}, \quad \tau=\sigma+i\eta.
$$

По предположению

$$
\|D_t^2 D_x^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\leq\|u(t,x),W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\leq c<\infty.
$$

Обозначим через $v(\tau,x)$, $\tau=\sigma+i\eta$ – преобразование Лапласа функции $u(t,x)$ по переменной t. Обратимся к $\tau^2 D_x^2 v(x,\tau)\in L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}_+)$

$$
\begin{aligned}
\tau^2 D_x^2 v(x,\tau)&=\left[\frac{8+11\mathrm{e}^{-\tau}}{\tau^3+\tau^2}+\frac{\mathrm{e}^{-\tau}\,(28\tau+18)-(10\tau+18)}{\tau^5+\tau^4}\right]\cdot F^{-1}\left[\frac{\tau^2\lambda_1\lambda_2 i\xi}{(\lambda_1+i\xi)(\lambda_2+i\xi)}\right](x)\\
&=\left[k_1(\tau)+k_2(\tau)\right]\left[w(x,\tau)\right],
\end{aligned}
$$

здесь F^{-1} – обратное преобразование Фурье. Таким образом

$$\|\tau^2 D_x^2 v(\tau,x) - k_2(\tau)w(x,\tau), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\| = \|k_1(\tau)w(x,\tau), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\| < \infty.$$

Рассмотрим подробнее правую часть равенства. С учетом леммы 7 и леммы 6 имеем

$$\left(\sup_{\sigma>\gamma} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{8+11\mathrm{e}^{-\tau}}{(\tau+1)} \cdot \frac{\lambda_1\lambda_2 i\xi}{(\lambda_1+i\xi)(\lambda_2+i\xi)}\right|^2 d\xi d\eta\right)^{1/2}$$

$$\geq \left(\sup_{\sigma>\gamma} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{c_1}{(\tau+1)} \cdot \frac{\tau\xi}{(\lambda_1+i\xi)(\lambda_2+i\xi)}\right|^2 d\xi d\eta\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sup_{\sigma>\gamma} \iint\limits_{\mathbb{R}^2\setminus B_1(0)} \left|\frac{c_1}{(\tau+1)} \cdot \frac{\tau\xi}{(\lambda_1+i\xi)(\lambda_2+i\xi)}\right|^2 d\xi d\eta\right.$$

$$\left. + \sup_{\sigma>\gamma} \iint\limits_{B_1(0)} \left|\frac{c_1}{(\tau+1)} \cdot \frac{\tau\xi}{(\lambda_1+i\xi)(\lambda_2+i\xi)}\right|^2 d\xi d\eta\right)^{1/2},$$

здесь $B_1(0)$ – шар в $\mathbb{R}^2$ с радиусом 1. Тогда интеграл по компакту сходится, так как подынтегральное выражение не имеет особенностей. Остается

$$\left(\sup_{\sigma>\gamma} \iint\limits_{\mathbb{R}^2\setminus B_1(0)} \left|\frac{c_1}{(\tau+1)} \cdot \frac{\tau\xi}{(\lambda_1+i\xi)(\lambda_2+i\xi)}\right|^2 d\xi d\eta\right)^{1/2} \geq C \left(\sup_{\sigma>\gamma} \iint\limits_{\mathbb{R}^2\setminus B_1(0)} \frac{1}{|\lambda_1+i\xi|^2} d\xi d\eta\right)^{1/2}.$$

Учитывая оценку $|\lambda_1+i\xi|^2 \leq \sigma^2+\eta^2+\xi^2$, применим полярную замену. Тогда

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_1^{+\infty} \frac{rdrdy}{\sigma^2+r^2} \geq \pi \lim_{l\to\infty} (\ln(\gamma^2+l^2)) - \ln(\gamma^2+1) = +\infty.$$

Следовательно

$$\infty \leq \|\tau^2 D_x^2 v(\tau,x) - k_2(\tau)w(x,\tau), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R})\| = \|k_1(\tau)w(x,\tau), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R})\| < \infty,$$

противоречие. Отсюда $\varphi_1(t) \in W_{2,\gamma}^3(\mathbb{R}_+)$. Подобный пример можно построить и для функции $\varphi_2(t)$, который будет показывать, что если уменьшить требование на существование производных, то решение не будет принадлежать пространству $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$.

Сформулируем утверждение для краевой задачи

$$
\begin{gathered}
(I-D_x^2)D_t^2u+D_x^4u-a^2D_x^2u=f(t,x), \quad x>0, \quad t>0,\\
u|_{t=0}=0, \quad D_tu|_{t=0}=0,\\
\big(b_{11}+b_{12}D_x\big)u|_{x=0}=\varphi_1(t),\\
\big(b_{21}+b_{22}D_x\big)u|_{x=0}=\varphi_2(t),
\end{gathered}
\tag{10}
$$

которое является следствием доказанной выше теоремы и результата, опубликованного в работе [11].

Теорема 10. *Пусть выполнено условие Лопатинского для краевой задачи* (10) *и существует* $\gamma_0>0$ *такое, что для любых*

$$
\begin{gathered}
f(t,x)\in W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2), \quad \gamma>\gamma_0, \quad f(t,x)\big|_{t=0}=0,\\
\varphi_1(t)\in W_{2,\gamma}^{3}(\mathbb{R}_{+}), \quad \gamma>\gamma_0, \quad \varphi_1(t)\big|_{t=0}=D_t\varphi_1(t)\big|_{t=0}=D_t^2\varphi_1(t)\big|_{t=0}=0,\\
\varphi_2(t)\in W_{2,\gamma}^{3}(\mathbb{R}_{+}), \quad \gamma>\gamma_0, \quad \varphi_2(t)\big|_{t=0}=D_t\varphi_2(t)\big|_{t=0}=D_t^2\varphi_2(t)\big|_{t=0}=0.
\end{gathered}
$$

Тогда краевая задача (2) *однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства* $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$ *таких, что* $D_t^2D_x^2u\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$ *и* $\gamma>\gamma_0$*, для решения* $u(t,x)$ *имеет место оценка*

$$
\|u(t,x),W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\|\le c(\gamma_0)\big(\|f(t,x),W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2)\|+\|\varphi_1(t),W_{2,\gamma}^{3}(\mathbb{R}_{+})\|+\|\varphi_2(t),W_{2,\gamma}^{3}(\mathbb{R}_{+})\|\big),
$$

где константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от функций* $f(t,x)$, $\varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$.

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. Г.В. Демиденко и к.ф.-м.н. Л.Н. Бондарь за внимание к работе и ценные советы.

Список литературы

[1] В.З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Стройиздат, Москва–Ленинград, 1940.

[2] С.И. Герасимов, В.И. Ерофеев, *Задачи волновой динамики элементов конструкций*, ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, Саров, 2014.

[3] J.S. Rao, *Advanced theory of vibration*, Wiley Eastern, New Delhi, 1992.

[4] R.E.D. Bishop, *Longitudinal waves in beams*, Aeronautical Quarterly **3** (4), 280–293 (1952). DOI: https://doi.org/10.1017/S0001925900000706

[5] С.Л. Соболев, *Избранные труды. Т.*1*. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы* (*ред. Г.В. Демиденко, В.Л. Васкевич*), Изд-во Ин-та математики, Филиал “Гео” Изд-ва СО РАН, Новосибирск, 2003.

[6] Г.В. Демиденко, С.В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Научн. кн., Новосибирск, 1998.

[7] Х.Г. Умаров, *Разрушение и глобальная разрешимость задачи Коши для псевдогиперболического уравнения, связанного с обобщенным уравнением Буссинеска*, Сиб. матем. журн. **63** (3), 672–689 (2022).
DOI: https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.315

[8] Л.Н. Бондарь, Г.В. Демиденко, *Краевые задачи для одного псевдогиперболического уравнения в четверти плоскости*, Матем. труды **24** (2), 3–23 (2021).
DOI: https://doi.org/10.33048/mattrudy.2021.24.201

[9] Л.Н. Бондарь, В.В. Шеметова, *О краевых задачах в четверти плоскости для одного псевдогиперболического уравнения*, Матем. труды **25** (2), 3–30 (2022).
DOI: https://doi.org/10.33048/mattrudy.2022.25.201

[10] Л.Н. Бондарь, Г.В. Демиденко, В.С. Нурмахматов, *Краевая задача в цилиндре для одного псевдогиперболического уравнения*, Челяб. физ.-матем. журн. **8** (4), 469–482 (2023).
DOI: https://doi.org/10.47475/2500-0101-2023-8-4-469-482

[11] Г.В. Демиденко, А.А. Кудрявцев, *Краевые задачи в четверти плоскости для уравнения Рэлея–Бишопа*, Матем. заметки СВФУ **28** (3), 5–18 (2021).
DOI: https://doi.org/10.25587/SVFU.2021.81.22.001

[12] О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.

[13] С.В.Ӱспенский, Г.В. Демиденко, В.Г. Перепелкин, *Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям*, Наука, Новосибирск, 1984.

[14] Г.В. Демиденко, Пространства Соболева и обобщенные решения: учеб. пособие, РИЦ НГУ, Новосибирск, 2015.

Валентина Владимировна Шеметова
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: valentina501@mail.ru

Volume 2, Issue 2 UDC 517.922
pp. 107–121 (2024) MSC 35L82

An initial-boundary value problem for a pseudohyperbolic equation with nonzero boundary conditions

V.V. Shemetova

Abstract. An initial-boundary value problem in a quarter-plane for one pseudohyperbolic equation is considered. We establish conditions for boundary functions ender which the initial-boundary value problem is uniquely solvable in Sobolev spaces with an exponential weight.

Keywords: pseudohyperbolic equation, Lopatinskii condition, Sobolev space.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.2.107-121

References

[1] V.Z. Vlasov, *Thin-walled elastic beams*, National Science Foundation, Washington, D.C., 1961.

[2] S.I. Gerasimov, V.I. Erofeev, *Problems of wave dynamics of structural elements*, RFNC-VNIIEF, Sarov, 2014 [in Russian].

[3] J.S. Rao, *Advanced theory of vibration*, Wiley Eastern, New Delhi, 1992.

[4] R.E.D. Bishop, *Longitudinal waves in beams*, Aeronautical Quarterly **3** (4), 280–293 (1952). DOI: https://doi.org/10.1017/S0001925900000706

[5] S.L. Sobolev, *Selected works, vol.* I*: Equations of mathematical physics, computational mathematics, and cubature formulas (eds G.V. Demidenko and V.L. Vaskevich)*, Springer, New York, 2006.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-34149-1

[6] G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii, *Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative*, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.
DOI: https://doi.org/10.1201/9780203911433

[7] K.G. Umarov, *Blow-up and global solvability of the Cauchy problem for a pseudohyperbolic equation related to the generalized Boussinesq equation*, Sib. Math. J. **63** (3), 559–574 (2022).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446622030156

Acknowledgements. The research is supported by the Russian Science Foundation (grant no.24-21-00370), https://rscf.ru/project/24-21-00370.

Received: 31 January 2024. Accepted: 04 June 2024. Published: 16 July 2024.

[8] L.N. Bondar, G.V. Demidenko, *Boundary value problems for one pseudohyperbolic equation in a quarter-plane*, Sib. Adv. Math. **32** (1), 13–28 (2022). DOI: https://doi.org/10.1134/S1055134422010023

[9] L.N. Bondar, V.V. Shemetova, *On boundary value problems in a quarter-plane for a pseudohyperbolic equation*, Sib. Adv. Math. **33** (2), 87–106 (2023). DOI: https://doi.org/10.1134/S1055134423020013

[10] L.N. Bondar, G.V. Demidenko, V.S. Nurmakhmatov *Boundary value problem in a cylinder for a pseudohyperbolic equation*, Chelyab. Phys. Math. J. **8** (4), 469–482 (2023) [in Russian]. DOI: https://doi.org/10.47475/2500-0101-2023-8-4-469-482

[11] G.V. Demidenko, A.A. Kudryavtsev, *Boundary value problems for the Rayleigh–Bishop equation in a quarter plane*, Mathematical notes of NEFU **28** (3), 5–18 (2021) [in Russian]. DOI: https://doi.org/10.25587/SVFU.2021.81.22.001

[12] O.V. Besov, V.P. Il'in, S.M. Nikol'skii, *Integral representations of functions and embedding theorems, vol.* I*,* II, John Wiley & Sons, New York-Toronto-London, 1978, 1979.

[13] S.V. Uspenskii, G.V. Demidenko, V.G. Perepelkin, *Embedding theorems and applications to differential equations*, Nauka, Novosibirsk, 1984 [in Russian].

[14] G.V. Demidenko, Sobolev spaces and generalized solutions, Izdat. Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk, 2015 [in Russian].

Valentina Vladimirovna Shemetova
Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: valentina501@mail.ru

IV Конференция Математических центров России

С 6-го по 11-ое августа в Санкт-Петербурге пройдет IV Конференция математических центров России, посвященная 300-летию СПбГУ и РАН.

К участию в конференции приглашаются представители российской и мировой математической общественности: в первую очередь сотрудники, аспиранты, студенты, слушатели региональных математических центров и математических центров мирового уровня.

В рамках конференции планируется проведение ряда пленарных докладов, доступных для понимания широкой математической аудитории, а также доклады в секциях. Формат участия: очный. Для участия в конференции необходима предварительная регистрация на сайте конференции.

Контакты оргкомитета:
Официальный сайт конференции: **https://mc4-conf.ru**
E-mail: **mc4-conf@eimi.ru**