

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Издается с 2023 года
Выходит 4 раза в год
ISSN 2949-3919

Том 2
Выпуск 3



Казань
2024

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Издается с 2023 года

Выходит 4 раза в год

ISSN 2949-3919

Том 2
Выпуск 3

Казань
2024

Учредитель: ФГАОУ ВО КИФУ
Адрес редакции: 420008, Республика Татарстан,
г. Казань, Казанский федеральный университет,
Институт математики и механики, ул. Кремлевская,
д. 35, комн. 501.
Тел. +7 843 233-70-60
E-mail: mathematics.tcs@gmail.com
URL: <https://mathtcs.ru/>

Издается с 2023 года.
Выходит 4 раза в год.
ISSN 2949-3919
Регистрационный номер СМИ: Эл № ФС77-84704

Сетевое издание «Математика и теоретические компьютерные науки» основано в 2023 году Научно-образовательным математическим центром Приволжского федерального округа (НОМЦ ПФО). Его учредителем является ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет». Издание ориентировано на публикацию научных статей по следующим направлениям фундаментальной и прикладной

математики, теоретической информатики и компьютерных наук:

- вещественный, комплексный и функциональный анализ;
- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление;
- математическая физика;
- геометрия и топология;
- теория вероятностей и математическая статистика;
- математическая логика, алгебра и теория чисел;
- вычислительная математика;
- теория вычислимости и сложности вычислений;
- дискретная математика и математическая кибернетика;
- теоретическая информатика;
- математические методы в искусственном интеллекте.

Также принимаются к печати обзоры, научно-популярные статьи, статьи о математической жизни. Все статьи проходят процедуру рецензирования. Все опубликованные статьи находятся в открытом доступе. Языки журнала – русский и английский.

Главный редактор

Арсланов М.М. (Россия, г. Казань)

Заместители главного редактора

Бикчентаев А.М. (Россия, г. Казань)

Калимуллин И.Ш. (Россия, г. Казань)

Файзрахманов М.Х. (Россия, г. Казань)

Ответственный секретарь

Тапкин Д.Т. (Россия, г. Казань)

Редакционная коллегия

Абызов А.Н. (Россия, г. Казань)

Авхадиев Ф.Г. (Россия, г. Казань)

Асташкин С.В. (Россия, г. Самара)

Баженов Н.А. (Россия, г. Новосибирск)

Володин А.И. (Канада, Реджайна)

Востоков С.В. (Россия, г. Санкт-Петербург)

Герман О.Н. (Россия, г. Москва)

Данчев П.В. (Болгария, г. София)

Демиденко Г.В. (Россия, г. Новосибирск)

Касымов Н.Х. (Узбекистан, г. Ташкент)

Каюмов И.Р. (Россия, г. Казань)

Мищенко А.С. (Россия, г. Москва)

Морозов А.С. (Россия, г. Новосибирск)

Мусин И.Х. (Россия, г. Уфа)

Насыров С.Р. (Россия, г. Казань)

Попов А.А. (Россия, г. Казань)

Семенов А.Л. (Россия, г. Москва)

Туганбаев А.А. (Россия, г. Москва)

Турилова Е.А. (Россия, г. Казань)

Фоменко А.Т. (Россия, г. Москва)

СОДЕРЖАНИЕ

Абызов А.Н., Буй Т.Д. Мало квазипроективные модули	4
Григорян С.А., Григорян Т.А. Полугрупповая C^* -алгебра, порожденная свободным произведением абелевых полугрупп	29
Ершов Ю.Л. Топология для дискретной математики	46
Изъюрова А.Е., Швидефски М.В. Квазимногообразие $\mathbf{SP}(M_3)$: базис тождеств	53
Хворостухина Е.В. О мономорфизмах универсальных гиперграфических автоматов . . .	63
Ямалеев М.М. Плотность вниз в n -вычислимо перечислимых тьюринговых степенях и равномерные конструкции	76

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

День математика	92
Лобачевские чтения-2024	93
Мальцевские чтения 2024	94
Календарь конференций (ноябрь 2024 г. – январь 2025 г.)	95

Мало квазипроективные модули

А.Н. Абызов, Т.Д. Буй

Аннотация. Исследованы мало квазипроективные модули и близкие к ним классы модулей. Понятие мало квазипроективного модуля двойственно к понятию существенно квазиинъективного модуля, которое в последнее время было изучено в ряде работ. Показано, что над совершенными справа кольцами класс мало квазипроективных правых модулей совпадает с рядом классов правых модулей, близких к проективным, исследованных в статье. В качестве следствия полученных результатов приведена хорошо известная теорема А.А. Туганбаева о совпадении классов квазипроективных правых модулей и эндоморфизм-поднимаемых правых модулей над совершенными справа кольцами. Также получены характеристики модулей M , для которых в категории $\sigma[M]$ каждый (конечнопорожденный, циклический, полупростой, простой) модуль является малопроективным в $\sigma[M]$.

Ключевые слова: существенно инъективные модули, мало проективные модули, мало эндоморфизм поднимаемые модули, совершенные кольца.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.4-28

Введение

В последние десятилетия были систематически изучены модули инвариантные относительно специальных эндоморфизмов своих инъективных оболочек и их двойственные аналоги. Модули инвариантные относительно всех эндоморфизмов своих инъективных оболочек под названием квазиинъективных модулей впервые были введены и исследованы в работе [1]. С квазиинъективными модулями тесно связаны эндоморфизм-продолжаемые модули. Модуль M называется эндоморфизм-продолжаемым, если для любого подмодуля X модуля M каждый эндоморфизм модуля X продолжается до эндоморфизма модуля M . В [2, предложение 10.22] было доказано, что каждый эндоморфизм продолжаемый полуартиновый модуль является квазиинъективным. Двойственным аналогом квазиинъективных модулей являются квазипроективные модули, с которыми тесно связаны эндоморфизм-поднимаемые модули. Модуль M называется эндоморфизм-поднимаемым, если эндоморфизм каждого фактор-модуля модуля M поднимается до эндоморфизма M .

Благодарности. Работа А.Н. Абызова поддержана грантом Российского научного фонда и Кабинета министров Республики Татарстан (проект № 23-21-10086).

© 2024 А.Н. Абызов, Т.Д. Буй

Поступила: 07.05.2024. Принята: 10.08.2024. Опубликовано: 17.10.2024.

В 1979 году в работе А.А. Туганбаева [3] было показано, что над совершенным справа кольцом R правый R -модуль M является квазипроективным в точности тогда, когда M – эндоморфизм-поднимаемый модуль.

Важным обобщением квазиинъективных модулей являются автоморфизм-инвариантные модули, т. е. модули инвариантные относительно автоморфизмов своих инъективных оболочек. Автоморфизм-инвариантные модули были введены в [4] и в последнее время были изучены во многих работах. Двойственным аналогом автоморфизм-инвариантных модулей являются автоморфизм-коинвариантные модули, введенные и исследованные в работе [5]. С автоморфизм-коинвариантными модулями тесно связаны автоморфизм-поднимаемые модули, которые впервые были изучены в работе [6] и являются естественным расширением класса эндоморфизм-поднимаемых модулей.

Модуль M называется существенно квазиинъективным, если M инвариантен относительно всех эндоморфизмов своей инъективной оболочки, у которых ядра существенны. Примерами существенно квазиинъективных модулей являются автоморфизм-инвариантные модули. Существенно квазиинъективные модули были изучены в работах [7, 8]. В работе [8] были введены существенно эндоморфизм-продолжаемые модули. Модуль M называется существенно эндоморфизм-продолжаемым, если для любого подмодуля X модуля M каждый эндоморфизм X с существенным ядром продолжается до эндоморфизма модуля M . В [8] было показано, что над такими классами колец, как нетеровы кольца и полуартиновы кольца, классы существенно квазиинъективных модулей и существенно эндоморфизм-продолжаемых модулей совпадают.

Двойственным аналогом к понятию существенно квазиинъективного модуля является понятие мало квазипроективного модуля. В нашей работе исследуются мало квазиинъективные модули и близкие к ним классы модулей. В первом параграфе изучаются мало проективные модули и приводятся характеристики модулей M , для которых в категории $\sigma[M]$ каждый (конечнопорожденный, циклический, полупростой, простой) модуль является малопроективным в $\sigma[M]$. Второй параграф посвящен мало квазипроективным модулям и близким к ним классам модулей. В третьем параграфе вводится и изучается понятие мало эндоморфизм поднимаемого модуля. Доказывается основной результат статьи, согласно которому над совершенным справа кольцом совпадают следующие классы правых модулей: мало квазипроективные модули, мало квазипроективные модули[#], мало эндоморфизм-поднимаемые модули, мало эндоморфизм-поднимаемые[#] модули (теорема 42). В качестве следствия полученных в работе результатов приведен расширенный вариант упомянутого выше утверждения А.А. Туганбаева, согласно которому над совершенным справа кольцом совпадают следующие классы правых модулей: квазипроективные модули, эндоморфизм-поднимаемые модули, квазипроективные[#] модули, эндоморфизм-поднимаемые[#] модули, сильно эндоморфизм-поднимаемые модули, сильно эндоморфизм-поднимаемые[#] модули (теорема 43).

Пусть M – правый R -модуль и A – подмодуль модуля M . Через $\sigma_M^A : M \rightarrow M/A$ будем обозначать естественный гомоморфизм. Тот факт, что N является подмодулем (соот-

ветственно, существенным подмодулем, малым подмодулем) модуля M будем обозначать через $N \leq M$ (соответственно, через $N \leq_e M$, $N \ll M$). Инъективная оболочка модуля M обозначается $E(M)$. В работе используются стандартные понятия и факты теории модулей и теории абелевых групп (см., например, [9–11]).

1. Мало проективные модули

Определение 1. Пусть M, N – правые R -модули. Модуль N называется *мало M -проективным* (соответственно, *мало M -проективным[#]*), если для любого подмодуля (соответственно, малого подмодуля) A модуля M каждый гомоморфизм $f : N \rightarrow M/A$, у которого $\text{Im } f \ll M/A$, можно поднять до гомоморфизма $f' : N \rightarrow M$. Если модуль M мало проективен (соответственно, мало проективен[#]) относительно каждого правого R -модуля, то такой модуль M называется *мало проективным* (соответственно, *мало проективным[#]*).

Замечание 2. Понятие мало M -проективного (соответственно, мало M -проективного[#]) модуля под названием Im -мало M -проективного (соответственно, мало Im -мало M -проективного) модуля введены в [12, 4.33]. Отметим, что термин “мало проективный модуль” в литературе встречается в разных значениях. Например, в работе [3] под малым проективным модулем подразумевается эндоморфизм-поднимаемый модуль, а в монографии [12] M -проективный[#] модуль называется мало M -проективным.

При доказательстве следующего утверждения используется способ рассуждения из доказательства теоремы 3.10 работы [7].

Теорема 3. Пусть M и N – правые R -модули, а $\alpha_M : P_M \rightarrow M$ и $\alpha_N : P_N \rightarrow N$ – проективные накрытия. Следующие условия эквивалентны:

- 1) модуль N является мало M -проективным[#];
- 2) для любого гомоморфизма $f : P_N \rightarrow P_M$, у которого $f(P_N) \ll P_M$, выполнено условие $f(\text{Ker } \alpha_N) \leq \text{Ker } \alpha_M$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Предположим, что имеет место гомоморфизм $f : P_N \rightarrow P_M$ правых R -модулей, для которого $\text{Im } f \ll P_M$. Пусть $K = \text{Ker } \alpha_M + f(\text{Ker } \alpha_N)$. Ясно, что $K \ll P_M$. Без ограничения общности можем предположить, что $M = P_M / \text{Ker } \alpha_M$. Пусть $\sigma : P_M / \text{Ker } \alpha_M \rightarrow P_M / K$ – естественная проекция, тогда $\text{Ker } \sigma = K / \text{Ker } \alpha_M \ll M$.

Поскольку $\sigma \circ \alpha_M \circ f(\text{Ker } \alpha_N) = 0$, существует гомоморфизм $g : N \rightarrow P_M / K$ такой, что $\sigma \circ \alpha_M \circ f = g \circ \alpha_N$. Так как модуль N мало M -проективен[#], то существует гомоморфизм $g' : N \rightarrow M$ такой, что $\sigma \circ g' = g$. Поскольку P_N – проективный модуль, существует гомоморфизм $f' : P_N \rightarrow P_M$ такой, что $\alpha_M \circ f' = g' \circ \alpha_N$. Таким образом,

$$\sigma \circ \alpha_M \circ f = g \circ \alpha_N = \sigma \circ g' \circ \alpha_N = \sigma \circ \alpha_M \circ f'.$$

Тогда $(f - f')(P_N) \leq K$. Для любого $p \in P_N$ существуют $p_1 \in \text{Ker } \alpha_M$ и $p_2 \in \text{Ker } \alpha_N$ такие, что $(f - f')(p) = p_1 + f(p_2)$. Тогда $(f - f')(p - p_2) = f'(p_2) + p_1 \in \text{Ker } \alpha_M$. Следовательно,

$\alpha_M \circ (f - f')(p - p_2) = 0$ и $\text{Ker}(\alpha_M \circ (f - f')) + \text{Ker} \alpha_N = P_N$. Так как $\text{Ker} \alpha_N \ll P_N$, то $\text{Ker}(\alpha_M \circ (f - f')) = P_N$. Тогда $(f - f')(P_N) \leq \text{Ker} \alpha_M$. Поскольку $f'(\text{Ker} \alpha_N) \leq \text{Ker} \alpha_M$, имеем

$$f(\text{Ker} \alpha_N) \leq (f - f')(\text{Ker} \alpha_N) + f'(\text{Ker} \alpha_N) \leq \text{Ker} \alpha_M.$$

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть $A \ll M$ и $f : N \rightarrow M/A$ – гомоморфизм, у которого $\text{Im } f \ll M/A$. Так как P_N – проективный модуль, то найдется гомоморфизм $g : P_N \rightarrow P_M$ такой, что $f \circ \alpha_N = \sigma_M^A \circ \alpha_M \circ g$. Поскольку $\text{Im } f \ll M/A$, то $\text{Im } g \ll P_M$. Согласно п. 2), получаем $g(\text{Ker} \alpha_N) \leq \text{Ker} \alpha_M$. Следовательно, найдется гомоморфизм $f' : N \rightarrow M$ такой, что $f' \circ \alpha_N = \alpha_M \circ g$. Таким образом, $\sigma_M^A \circ f' \circ \alpha_N = \sigma_M^A \circ \alpha_M \circ g = f \circ \alpha_N$ и, следовательно, $\sigma_M^A \circ f' = f$. $\square$

Из предыдущей теоремы и [7, теорема 3.10] вытекает

Следствие 4. Если R – совершенное справа кольцо и M – правый R -модуль, то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) модуль N является мало M -проективным;
- 2) модуль N является мало M -проективным[#];
- 3) для любого гомоморфизма $f : P_N \rightarrow P_M$, у которого $f(P_N) \ll P_M$, выполнено условие $f(\text{Ker} \alpha_N) \leq \text{Ker} \alpha_M$.

Модуль M называется слабо дополняемым, если для каждого его подмодуля A существует такой подмодуль B модуля M , что $A + B = M$ и $A \cap B \ll M$.

Теорема 5 ([12, 17.14]). Пусть M и L – правые R -модули. Если M является слабо дополняемым модулем, то имеют место утверждения:

- 1) модуль L M -проективен в точности тогда, когда L – M -проективен[#];
- 2) модуль L мало M -проективен в точности тогда, когда L – мало M -проективен[#].

Следствие 6. Пусть R – совершенное справа кольцо. Тогда модуль M является мало проективным в точности тогда, когда M является мало проективным[#] модулем.

Следующее утверждение доказывается с помощью стандартных рассуждений.

Лемма 7. Пусть M – правый R -модуль и $\{L_i\}_{i \in I}$ – семейство правых R -модулей. Тогда

- 1) прямая сумма $\bigoplus_{i \in I} L_i$ является мало M -проективной в точности тогда, когда модуль L_i мало M -проективен для любого $i \in I$;
- 2) прямая сумма $\bigoplus_{i \in I} L_i$ является мало M -проективной[#] в точности тогда, когда модуль L_i мало M -проективен[#] для любого $i \in I$.

Следствие 8. Пусть $\{L_i\}_{i \in I}$ – семейство правых R -модулей. Тогда

- 1) прямая сумма $\bigoplus_{i \in I} L_i$ является мало проективной в точности тогда, когда L_i мало проективен для любого $i \in I$;
- 2) прямая сумма $\bigoplus_{i \in I} L_i$ является мало проективной[#] в точности тогда, когда L_i мало проективен[#] для любого $i \in I$.

Правый R -модуль M называется V -модулем, если каждый собственный подмодуль модуля M является пересечением его максимальных подмодулей. Если R_R (соответственно, ${}_R R$) – V -модуль, то кольцо R называется *правым V -кольцом* (соответственно, *левым V -кольцом*).

Модуль, изоморфный подмодулю гомоморфного образа прямых сумм копий правого R -модуля M , называется M -подпорожденным модулем. Полная подкатегория категории всех правых R -модулей, состоящая из всех M -подпорожденных модулей, обозначается через $\sigma[M]$.

Модуль из категории $\sigma[M]$, существенно инъективный относительно любого модуля из $\sigma[M]$, называется *существенно инъективным в $\sigma[M]$* . Модуль из категории $\sigma[M]$, мало проективный относительно любого модуля из $\sigma[M]$, называется *мало проективным в $\sigma[M]$* . Модуль N называется M -сингулярным, если $N \cong A/B$ для некоторого правого R -модуля A в $\sigma[M]$ и $B \leq_e A$.

Теорема 9. *Следующие условия эквивалентны для правого R -модуля M :*

- 1) $M/\text{Soc}(M)$ является V -модулем;
- 2) для каждого модуля N из категории $\sigma[M]$ фактор-модуль $N/\text{Soc}(N)$ является V -модулем;
- 3) каждый M -сингулярный модуль является V -модулем;
- 4) каждый M -сингулярный модуль является полупрIMITИВНЫМ;
- 5) $J(M/A) = 0$ для каждого существенного подмодуля A модуля M ;
- 6) каждый конечно-копорожденный M -сингулярный модуль является полупростым модулем;
- 7) для каждого существенного подмодуля A модуля M , для которого M/A конечно-копорожден, фактор-модуль M/A является полупростым;
- 8) каждый простой правый R -модуль из $\sigma[M]$ является существенно инъективным в категории $\sigma[M]$;
- 9) каждый правый R -модуль из $\sigma[M]$ является мало проективным в $\sigma[M]$;
- 10) каждый циклический (конечно порожденный, конечно копорожденный, полупростой) модуль из $\sigma[M]$ является мало проективным в $\sigma[M]$;
- 11) каждый простой модуль из $\sigma[M]$ является мало проективным в $\sigma[M]$.

Доказательство. Импликации 3) $\Rightarrow$ 4), 4) $\Rightarrow$ 5), 6) $\Rightarrow$ 7), 9) $\Rightarrow$ 10) и 10) $\Rightarrow$ 11) очевидны.

1) $\Rightarrow$ 2) Пусть $N \in \sigma[M]$. Тогда для некоторого множества индексов I модуль $\bigoplus_{i \in I} M_i$, где $M_i \cong M$ для каждого $i \in I$, обладает такими подмодулями A и B , что $B \leq A$ и $N \cong A/B$. Пусть $f : A \rightarrow A/B$ – естественный гомоморфизм. Этот гомоморфизм индуцирует эпиморфизм $f' : A/\text{Soc}(A) \rightarrow (A/B)/(\text{Soc}(A/B))$. Так как $\text{Soc}(A) = \text{Soc}(\bigoplus_{i \in I} M_i) \cap A$, то

$$A/\text{Soc}(A) \cong (A + \text{Soc}(\bigoplus_{i \in I} M_i))/\text{Soc}(\bigoplus_{i \in I} M_i) \leq (\bigoplus_{i \in I} M_i)/\text{Soc}(\bigoplus_{i \in I} M_i) \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i/\text{Soc}(M_i)).$$

Тогда согласно [10, 23.4] $A/\text{Soc}(A)$ является V -модулем и, следовательно, модуль $N/\text{Soc}(N)$ также является V -модулем.

2) $\Rightarrow$ 3) Предположим, что $N \cong A/B$ где $B \leq_e A \in \sigma[M]$. Тогда $\text{Soc}(A) \leq B$. Поскольку $A/\text{Soc}(A)$ является V -модулем, A/B – V -модуль.

4) $\Rightarrow$ 6) Следует из того факта, что всякий конечно-копорожденный полупрimitивный модуль является полупростым.

5) $\Rightarrow$ 7) Доказательство аналогично импликации 4) $\Rightarrow$ 6).

7) $\Rightarrow$ 8) Пусть $A \leq_e M$, S – простой модуль и $f : A \rightarrow S$ – гомоморфизм, у которого $\text{Ker } f \leq_e A$. Рассмотрим инъективную оболочку $E_M(S)$ модуля S в $\sigma[M]$. Тогда для некоторого гомоморфизма $g : M \rightarrow E_M(S)$ следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & M \\ & & \downarrow f & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{i'} & E_M(S), \end{array}$$

где i, i' – вложения. Поскольку $\text{Ker } f \leq \text{Ker } g$, имеем $\text{Ker } g \leq_e M$. Так как $\text{Im } g \leq E_M(S)$, то $\text{Im } g$ – конечно-копорожденный модуль. Согласно пункту 7), $\text{Im } g$ – полупростой модуль, и, следовательно, $\text{Im } g = S$. Таким образом, модуль S существенно M -инъективен.

8) $\Rightarrow$ 1) Пусть $A/\text{Soc}(M) \leq M/\text{Soc}(M)$, S – простой правый R -модуль и задан гомоморфизм правых R -модулей $f : A/\text{Soc}(M) \rightarrow S$. Рассмотрим естественные гомоморфизмы $\pi : A \rightarrow A/\text{Soc}(M)$, $\pi' : M \rightarrow M/\text{Soc}(M)$ и естественные вложения $\iota_1 : A \rightarrow M$, $\iota_2 : A/\text{Soc}(M) \rightarrow M/\text{Soc}(M)$. Покажем, что $\text{Ker}(f \circ \pi) \leq_e A$. Если $aR \cap \text{Ker}(f \circ \pi) = 0$ для некоторого ненулевого элемента $a \in A$, то $f(aR) = S$ и, следовательно, $aR \cong S$. Получили противоречие с тем фактом, что $\text{Soc}(M) \leq \text{Ker}(f \circ \pi)$. Таким образом, $\text{Ker}(f \circ \pi) \leq_e A$ и из существенной M -инъективности модуля S следует, что для некоторого гомоморфизма $g : M \rightarrow S$ имеет место равенство $f \circ \pi = g \circ \iota_1$. Так как $g(\text{Soc}(M)) = 0$, то для некоторого гомоморфизма $f' : M/\text{Soc}(M) \rightarrow S$ имеем $f' \circ \pi' = g$. Тогда

$$f \circ \pi = g \circ \iota_1 = f' \circ \pi' \circ \iota_1 = f' \circ \iota_2 \circ \pi.$$

Следовательно, $f = f' \circ \iota_2$.

2) $\Rightarrow$ 9) Пусть $f : N \rightarrow N_1$ – эпиморфизм и $g : K \rightarrow N_1$ – гомоморфизм правых R -модулей такой, что $\text{Im } g \ll N_1$, где N – модуль из $\sigma[M]$. Поскольку $J(N_1/\text{Soc}(N_1)) = 0$, имеем $J(N_1) \leq \text{Soc}(N_1)$. Следовательно, $\text{Im } g$ является полупростым модулем. Гомоморфизм f индуцирует эпиморфизм $f' : N/\text{Soc}(N) \rightarrow N_1/f(\text{Soc}(N))$. Так как $N/\text{Soc}(N)$ – V -модуль, то $N_1/f(\text{Soc}(N))$ также является V -модулем. Поскольку $\text{Im } g \ll N_1$, то $\text{Im } g \leq f(\text{Soc}(N))$. Таким образом, существует гомоморфизм $h : K \rightarrow N$ такой, что $f \circ h = g$.

11) $\Rightarrow$ 1) Пусть модуль M удовлетворяет условию п. 11). Предположим, что $M/\text{Soc}(M)$ не является V -модулем. Тогда существует подмодуль $L \leq M$, содержащий $\text{Soc}(M)$ такой, что M/L – однородный не простой модуль, у которого цокль является простым модулем. Пусть $S = \text{Soc}(M/L)$ и $g : S \rightarrow M/L$ – вложение. Так как $\text{Im } g \ll M/L$, то

существует гомоморфизм $f : S \rightarrow M$ такой, что $\sigma_M^L \circ f = g$. Поскольку $\text{Soc}(M) \leq L$, имеем $\sigma_M^L \circ f = 0$. Получили противоречие. Таким образом, $M/\text{Soc}(M)$ является V -модулем. $\square$

Следствие 10 ([7, теорема 3.14]). *Следующие условия эквивалентны для кольца R :*

- 1) $R/\text{Soc}(R_R)$ – правое V -кольцо;
- 2) каждый правый R -модуль мало проективен;
- 3) каждый конечно порожденный правый R -модуль является мало проективным;
- 4) каждый циклический правый R -модуль является мало проективным;
- 5) каждый полупростой правый R -модуль является мало проективным;
- 6) каждый простой правый R -модуль является мало проективным;
- 7) каждый простой правый R -модуль является существенно инъективным.

Теорема 11. *Для правого R -модуля M следующие условия эквивалентны:*

- 1) $J(N) \leq \text{Soc}(N)$ для любого модуля N из $\sigma[M]$;
- 2) каждый модуль из $\sigma[M]$ является мало проективным[#] в $\sigma[M]$;
- 3) каждый простой модуль из $\sigma[M]$ является мало проективным[#] в $\sigma[M]$.

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 3) Очевидно.

1) $\Rightarrow$ 2) Пусть N, K – модули из категории $\sigma[M]$, $f : N \rightarrow N_1$ – малый эпиморфизм и $g : K \rightarrow N_1$ – гомоморфизм, у которого $\text{Im } g \ll N_1$. Так как $J(N_1) \leq \text{Soc}(N_1)$, то модуль $\text{Im } g$ полупрост. Согласно [11, следствие 9.1.5] $f(J(N)) = J(N_1)$. Поскольку $J(N) \leq \text{Soc}(N)$, имеем $J(N_1) \leq f(\text{Soc}(N))$ и, следовательно, $\text{Im } g \leq f(\text{Soc}(N))$. Таким образом, существует такой гомоморфизм $h : K \rightarrow N$, что $f \circ h = g$.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть $N \in \sigma[M]$. Предположим, что $J(N) \not\leq \text{Soc}(N)$. Тогда существует такой элемент $x \in J(N)$, что $x \notin \text{Soc}(N)$. Отсюда $xR \ll N$ и xR не является полупростым. Тогда xR содержит максимальный существенный подмодуль K . Ясно, что $K \ll N$. Так как $xR \ll N$, то $xR/K \ll N/K$. Поскольку xR/K – простой модуль, то согласно п. 3) существует такой гомоморфизм $f : xR/K \rightarrow N$, что $\sigma_N^K \circ f = \iota$, где $\iota : xR/K \rightarrow N/K$ – вложение. Тогда $f(xR/K) \oplus K = xR$. Получили противоречие с тем, что $K \leq_e xR$. $\square$

2. Мало квазипроективные модули

Определение 12. Пусть M – правый R -модуль. Если M является мало M -проективным (соответственно, мало M -проективным[#]), то M называется *мало квазипроективным* (соответственно, *мало квазипроективным[#]*) модулем. Ясно, что каждый мало проективный модуль является мало квазипроективным и каждый мало проективный[#] модуль является мало квазипроективным[#] модулем.

Очевидно, что каждый модуль с нулевым радикалом является малым квазипроективным[#] модулем.

Замечание 13. Двойственный аналог к понятию мало квазипроективного[#] модуля ввиду существования дополнения по пересечению для каждого подмодуля в произвольном

модуле, очевидно, совпадает с понятием существенно квазиинъективного модуля. Аналогичная ситуация имеет место для других вводимых ниже понятий модулей, близких к проективным.

Из теоремы 3 непосредственно следует

Теорема 14. Пусть M – правый R -модуль, и $\alpha : P \rightarrow M$ – проективное накрытие. Следующие условия эквивалентны:

- 1) модуль M является мало квазипроективным[#];
- 2) для любого эндоморфизма f модуля P с малым образом, выполняется условие $f(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Ker } \alpha$.

Следствие 15. Пусть правый R -модуль M обладает проективным накрытием $\alpha : P \rightarrow M$. Тогда если M – автоморфизм-инвариантный модуль, то M является мало квазипроективным[#] модулем.

Доказательство. Пусть f – эндоморфизм модуля P , у которого $f(P) \ll P$. Тогда $f \in J(\text{End}(P))$. Так как модуль M – автоморфизм-инвариантный модуль, то имеет место включение $(1 + f)(\text{Ker}(\alpha)) \leq \text{Ker}(\alpha)$ и, следовательно, $f(\text{Ker}(\alpha)) \leq \text{Ker}(\alpha)$. Таким образом, согласно теореме 14 M – мало квазипроективный[#] модуль. $\square$

Следующее утверждение вытекает из следствия 4. Также это утверждение следует из п. 2) теоремы 5.

Теорема 16. Пусть R – совершенное справа кольцо и M – правый R -модуль. Тогда модуль M является мало квазипроективным в точности тогда, когда M является мало квазипроективным[#] модулем.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из [13, лемма 3.3] и [12, 4.37].

Лемма 17. Модуль L мало $M \oplus H$ -проективен[#] в точности тогда, когда L мало M -проективен[#] и L мало H -проективен[#].

Лемма 18. Модуль $M = M_1 \oplus M_2$ является мало квазипроективным[#] в точности тогда, когда M_1 и M_2 являются мало квазипроективными[#], а M_1 и M_2 являются взаимно мало проективными[#].

Доказательство. Следует из леммы 7 и леммы 17. $\square$

Если для любого подмодуля (соответственно малого подмодуля) A модуля N , эпиморфизм $f : M \rightarrow N/A$ может быть поднят до гомоморфизма $f' : M \rightarrow N$, то M называется псевдо N -проективным. Если M является псевдо M -проективным, то M называется псевдопроективным модулем. Псевдопроективные модули были изучены в ряде работ, в частности, в [14] был доказан важный результат, согласно которому над произвольным совершенным справа кольцом R классы псевдопроективных и дуально автоморфизм-инвариантных правых R -модулей совпадают.

Предложение 19. Пусть M – правый R -модуль. Тогда если M – псевдопроективный модуль, то M является мало квазипроективным модулем.

Доказательство. Пусть M – псевдопроективный модуль, а A – подмодуль модуля M . Рассмотрим гомоморфизм $f : M \rightarrow M/A$, у которого $\text{Im } f \ll M/A$. Пусть $g : M \rightarrow M/A$ – гомоморфизм, действующий согласно правилу $x \mapsto f(x) + \sigma_M^A(x)$ для любого $x \in M$. Так как $\text{Im } g + \text{Im } f = M/A$, то $\text{Im } g = M/A$. Поскольку модуль M является псевдопроективным модулем, существует эндоморфизм g' модуля M такой, что $\sigma_M^A \circ g' = g$. Положим $f' := g' - 1_M$, тогда $\sigma_M^A \circ f' = \sigma_M^A \circ g' - \sigma_M^A = g - \sigma_M^A = f$. $\square$

Следующее утверждение непосредственно следует из [12, 4.34(1)], а также из [13, лемма 3.3] и [13, лемма 3.13].

Лемма 20. Пусть M – правый R -модуль и N – прямое слагаемое M . Тогда

- 1) если M является мало квазипроективным модулем, то N также является мало квазипроективным модулем;
- 2) если M является мало квазипроективным[#] модулем, то N также является мало квазипроективным[#] модулем.

Лемма 21. Пусть M – правый R -модуль и A является вполне инвариантным подмодулем модуля M . Тогда

- 1) если M является мало квазипроективным модулем, то M/A также является мало квазипроективным модулем;
- 2) если M является мало квазипроективным[#] модулем и $A \ll M$, то M/A также является мало квазипроективным[#] модулем.

Доказательство. 1) Пусть M является мало квазипроективным модулем и L – подмодуль модуля M , причем $A \leq L$. Пусть $f : M/A \rightarrow M/L$ – гомоморфизм правых R -модулей, у которого $\text{Im } f \ll M/L$. Поскольку M является мало квазипроективным модулем, существует эндоморфизм g модуля M такой, что $\sigma_M^L \circ g = f \circ \sigma_M^A$. Так как $g(A) \leq A$, то существует эндоморфизм f' модуля M/A такой, что $f' \circ \sigma_M^A = \sigma_M^L \circ g$. Таким образом,

$$\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f' \circ \sigma_M^A = \sigma_{M/A}^{L/A} \circ \sigma_M^A \circ g = \sigma_M^L \circ g = f \circ \sigma_M^A.$$

Так как σ_M^A – эпиморфизм, то $\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f' = f$.

- 2) Доказательство аналогично доказательству пункта 1). $\square$

Для подмодулей $K \leq L$ модуля M , включение $K \leq L$ называется *комалым* в M , если $L/K \ll M/K$. В этом случае L называется *комалым расширением* подмодуля K в M .

Определение 22. Модуль M называется *сильно эндоморфизм-поднимаемым* (соответственно, *сильно эндоморфизм-поднимаемым[#]*), если для каждого $A \leq M$ (соответственно, $A \ll M$) каждый гомоморфизм $f : M \rightarrow M/A$, для которого существует такой подмодуль L модуля M , что L – комалое расширение A в M и $f(L) \leq L/A$, может быть поднят до некоторого эндоморфизма f' модуля M .

Определение 23. Правый R -модуль M называется *эндоморфизм-поднимаемым[#]*, если для каждого $A \ll M$ и каждый эндоморфизм $f : M/A \rightarrow M/A$ может быть поднят до некоторого эндоморфизма f' модуля M .

Легко видеть, что любой квазипроективный (соответственно, квазипроективный[#]) модуль является сильно эндоморфизм-поднимаемым (соответственно, сильно эндоморфизм-поднимаемым[#]) модулем, а любой сильно эндоморфизм-поднимаемый (соответственно, сильно эндоморфизм-поднимаемый[#]) модуль является эндоморфизм-поднимаемым (соответственно, эндоморфизм-поднимаемым[#]) модулем.

Теорема 24. Пусть M – правый R -модуль. Следующие условия эквивалентны:

- 1) M является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем;
- 2) M является одновременно мало квазипроективным модулем и эндоморфизм-поднимаемым модулем.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть M – сильно эндоморфизм-поднимаемый модуль, $A \leq M$ и $f : M \rightarrow M/A$ – гомоморфизм правых R -модулей, у которого $\text{Im } f \ll M/A$. Положим $L := (\sigma_M^A)^{-1}(\text{Im } f)$. Тогда $L/A = \text{Im } f \ll M/A$ и $f(L) \leq \text{Im } f = L/A$. Поскольку M – сильно эндоморфизм-поднимаемый модуль, f может быть поднят до некоторого эндоморфизма f' модуля M , т. е. M является мало квазипроективным.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть M является мало квазипроективным и эндоморфизм-поднимаемым модулем, A – подмодуль модуля M и $f : M \rightarrow M/A$ – гомоморфизм, для которого существует подмодуль L модуля M такой, что L – комалое расширение A в M и $f(L) \leq L/A$. Существует естественный гомоморфизм $\sigma : M/A \rightarrow M/L$. Поскольку $f(L) \leq L/A$, имеем $\sigma \circ f(L) = 0$. Тогда найдется такой эндоморфизм g модуля M/L , что $g \circ \sigma_M^L = \sigma \circ f$. Так как M является эндоморфизм-поднимаемым модулем, то существует эндоморфизм g' модуля M такой, что $g \circ \sigma_M^L = \sigma_M^L \circ g'$. Пусть $f' = \sigma_M^A \circ g'$. Тогда

$$\sigma \circ f' = \sigma \circ \sigma_M^A \circ g' = \sigma_M^L \circ g' = g \circ \sigma_M^L = \sigma \circ f.$$

Отсюда $(f - f')(M) \leq \text{Ker}(\sigma) = L/A \ll M/A$. Поскольку M – мало квазипроективный, существует эндоморфизм g'' модуля M такой, что $\sigma_M^A \circ g'' = f - f'$. Таким образом,

$$\sigma_M^A \circ (g' + g'') = f' + (f - f') = f.$$

Следовательно, M является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем. □

Теорема 25. Для правого R -модуля M следующие условия эквивалентны:

- 1) M является сильно эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем;
- 2) M является одновременно мало квазипроективным[#] и эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Доказательство. Проверка аналогична доказательству теоремы 24. □

Теорема 26. Пусть правый R -модуль M обладает проективным накрытием $\alpha : P \rightarrow M$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) M является сильно эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем;
- 2) для любого эндоморфизма f модуля P , для которого существует такой малый подмодуль C модуля P , что $\text{Ker } \alpha \leq C$ и $f(C) \leq C$, выполнено условие $f(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Ker } \alpha$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть f – эндоморфизм модуля P , для которого существует такой малый подмодуль C модуля P , что $\text{Ker } \alpha \leq C$ и $f(C) \leq C$. Положим $N = f(\text{Ker } \alpha) + \text{Ker } \alpha$ и $A = \alpha(N)$. Ясно, что $N \ll P$ и $A \ll M$. Так как $\sigma_M^A \circ \alpha \circ f(\text{Ker } \alpha) = 0$, то $\text{Ker } \alpha \leq \text{Ker}(\sigma_M^A \circ \alpha \circ f)$. Тогда существует гомоморфизм $g : M \rightarrow M/A$ такой, что $g \circ \alpha = \sigma_M^A \circ \alpha \circ f$. Имеем $g \circ \alpha(C) = \sigma_M^A \circ \alpha \circ f(C) \leq \sigma_M^A \circ \alpha(C)$, где $\alpha(C) \ll M$. Поскольку M является сильно эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем, существует эндоморфизм g' модуля M такой, что $\sigma_M^A \circ g' = g$. Так как P – проективный модуль, то существует эндоморфизм f' модуля P такой, что $\alpha \circ f' = g' \circ \alpha$. Таким образом, имеем

$$\sigma_M^A \circ \alpha \circ (f - f') = \sigma_M^A \circ \alpha \circ f - \sigma_M^A \circ g' \circ \alpha = \sigma_M^A \circ \alpha \circ f - g \circ \alpha = 0.$$

Тогда $(f - f')(P) \leq \text{Ker}(\sigma_M^A \circ \alpha) = N$. Для любого $p \in P$ существуют такие $p_1, p_2 \in \text{Ker } \alpha$, что $(f - f')(p) = f(p_1) + p_2$. Тогда $(f - f')(p - p_1) = f'(p_1) + p_2 \in \text{Ker } \alpha$. Следовательно, $\alpha \circ (f - f')(p - p_1) = \alpha \circ f'(p_1) + \alpha(p_2) = 0$ и $p - p_1 \in \text{Ker}(\alpha \circ (f - f'))$. Поскольку $p \in \text{Ker}(\alpha \circ (f - f')) + \text{Ker } \alpha$, то $\text{Ker}(\alpha \circ (f - f')) + \text{Ker } \alpha = P$. Так как $\text{Ker } \alpha \ll P$, имеем $\text{Ker}(\alpha \circ (f - f')) = P$. Таким образом, $(f - f')(P) \leq \text{Ker } \alpha$. Следовательно,

$$f(\text{Ker } \alpha) \leq (f - f')(\text{Ker } \alpha) + f'(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Ker } \alpha.$$

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть A – малый подмодуль модуля M и f – эндоморфизм модуля M/A . Поскольку P – проективный модуль, существует эндоморфизм g модуля P такой, что $\sigma_M^A \circ \alpha \circ g = f \circ \sigma_M^A \circ \alpha$. Пусть $C = \alpha^{-1}(A)$, тогда $g(C) \leq C$ и $C \ll P$. Согласно п. 2) $g(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Ker } \alpha$. Тогда существует эндоморфизм f' модуля M такой, что $f' \circ \alpha = \alpha \circ g$. Следовательно, $\sigma_M^A \circ f' \circ \alpha = f \circ \sigma_M^A \circ \alpha$. Так как α – эпиморфизм, то $\sigma_M^A \circ f' = f \circ \sigma_M^A$ и, следовательно, M является эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Пусть A – малый подмодуль модуля M и $f : M \rightarrow M/A$ – гомоморфизм, у которого $\text{Im } f \ll M/A$. Так как P – проективный модуль, то существует эндоморфизм g модуля P такой, что $\sigma_M^A \circ \alpha \circ g = f \circ \alpha$. Пусть $C = (\sigma_M^A \circ \alpha)^{-1}(\text{Im } f)$. Тогда $C \ll P$ и $g(C) \leq C$. Согласно условию п. 2) $g(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Ker } \alpha$. Таким образом, существует эндоморфизм f' модуля M такой, что $f' \circ \alpha = \alpha \circ g$. Тогда $\sigma_M^A \circ f' \circ \alpha = \sigma_M^A \circ \alpha \circ g = f \circ \alpha$. Так как α – эпиморфизм, то $\sigma_M^A \circ f' = f$. Таким образом, M является одновременно мало квазипроективным[#] модулем и эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем. Согласно теореме 25 M является сильно эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем. $\square$

Первый пункт следующего утверждения следует из п. 1) теоремы 5. Его доказатель-

ство ниже приведено ради полноты изложения.

Предложение 27. Пусть правый R -модуль M является слабо дополняемым модулем. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) модуль M является квазипроективным в точности тогда, когда M является квазипроективным[#] модулем;
- 2) модуль M является эндоморфизм-поднимаемым в точности тогда, когда M является эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Доказательство. 1) Пусть M – квазипроективный[#] модуль, A – немалый подмодуль M и $f \in \text{Hom}_R(M, M/A)$. Согласно условию существует такой подмодуль B модуля M , что $A+B = M$ и $A \cap B \ll M$. Рассмотрим естественные гомоморфизмы $\pi : M \rightarrow M/A$, $\pi' : M \rightarrow M/(A \cap B)$ и $\pi'' : M/(A \cap B) \rightarrow M/A$. Так как $M/(A \cap B) = A/(A \cap B) \oplus B/(A \cap B)$, то для некоторого гомоморфизма $\iota \in \text{Hom}_R(M/A, M/(A \cap B))$ имеет место равенство $\pi'' \circ \iota = \text{id}_{M/A}$. Поскольку M – квазипроективный[#] модуль, то для некоторого $g \in \text{End}_R(M)$ имеет место равенство $\pi' \circ g = \iota \circ f$. Тогда $f = \pi'' \circ \iota \circ f = \pi'' \circ \pi' \circ g = \pi \circ g$.

2) Пусть M является эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем и $A \leq M$, причем A не является малым подмодулем модуля M . Пусть f – эндоморфизм модуля M/A . Поскольку M является слабо дополняемым модулем, существует $B \leq M$ такой, что $A+B = M$ и $A \cap B \ll M$. Имеет место изоморфизм $\varphi : M/A \rightarrow B/(A \cap B)$, действующий по правилу $\varphi(b+A) = b + (A \cap B)$ для любого $b \in B$. Ясно, что

$$M/(A \cap B) = A/(A \cap B) \oplus B/(A \cap B).$$

Через $i : B/(A \cap B) \rightarrow M/(A \cap B)$ обозначим естественное вложение. Тогда существует эндоморфизм g модуля $M/(A \cap B)$, действующий по правилу $g(a+b+A \cap B) = i \circ \varphi \circ f(b+A)$ для любого $a \in A$ и $b \in B$. Тогда $g \circ i \circ \varphi = i \circ \varphi \circ f$. Через $\sigma : M/(A \cap B) \rightarrow M/A$ обозначим естественный гомоморфизм. Заметим, что $\sigma \circ i \circ \varphi = 1_{M/A}$ и $g \circ i \circ \varphi \circ \sigma = g$. Тогда

$$\sigma \circ g = \sigma \circ g \circ i \circ \varphi \circ \sigma = \sigma \circ i \circ \varphi \circ f \circ \sigma = f \circ \sigma.$$

Так как M является эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем, существует эндоморфизм f' модуля M такой, что $\sigma_M^{A \cap B} \circ f' = g \circ \sigma_M^{A \cap B}$. Таким образом, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f'} & M \\ \downarrow \sigma_M^{A \cap B} & & \downarrow \sigma_M^{A \cap B} \\ M/(A \cap B) & \xrightarrow{g} & M/(A \cap B) \\ \begin{array}{c} \nearrow i \circ \varphi \\ \downarrow \sigma \end{array} & & \begin{array}{c} \nearrow i \circ \varphi \\ \downarrow \sigma \end{array} \\ M/A & \xrightarrow{f} & M/A. \end{array}$$

Следовательно,

$$\sigma_M^A \circ f' = \sigma \circ \sigma_M^{A \cap B} \circ f' = \sigma \circ g \circ \sigma_M^{A \cap B} = f \circ \sigma \circ \sigma_M^{A \cap B} = f \circ \sigma_M^A.$$

Таким образом, M является эндоморфизм-поднимаемым модулем. $\square$

Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 16, теоремы 24, теоремы 25 и предложения 27.

Следствие 28. Пусть R – совершенное справа кольцо и M – правый R -модуль. Тогда M является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем в точности тогда, когда M является сильно эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Лемма 29. Пусть правый R -модуль M , у которого $J(M) \ll M$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) M является квазипроективным[#] модулем;
- 2) M является сильно эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть $A \ll M$ и $f : M \rightarrow M/A$ – гомоморфизм. Тогда, согласно [11, предложение 9.1.5], $J(M)/A = J(M/A)$. Поскольку $J(M) \ll M$, имеем $f(J(M)) \ll M/A$, следовательно, $f(J(M)) \leq J(M/A) = J(M)/A$. Так как M является сильно эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем, f может быть поднят до некоторого эндоморфизма f' модуля M . Тогда M – квазипроективный[#] модуль. $\square$

В заключительной части этого параграфа приведем ряд несложных, но полезных утверждений, показывающие, что рассмотренные ранее классы модулей замкнуты относительно взятия прямых слагаемых и вполне инвариантных подмодулей.

Лемма 30. Пусть N – прямое слагаемое модуля M . Тогда

- 1) если M является эндоморфизм-поднимаемым, то N также является эндоморфизм-поднимаемым модулем;
- 2) если M является эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем, то N также является эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Доказательство. 1) Предположим, что M является эндоморфизм-поднимаемым модулем. Пусть $M = N \oplus T$, где $T \leq M$, A – подмодуль модуля N и f – эндоморфизм модуля N/A . Рассмотрим эндоморфизм g модуля M/A , действующий по правилу $g(t + n) = f(n)$ для любого $t \in (T \oplus A)/A$ и $n \in N/A$. Тогда $g|_{N/A} = f$. Поскольку M является эндоморфизм-поднимаемым, существует эндоморфизм g' модуля M такой, что $\sigma_M^A \circ g' = g \circ \sigma_M^A$. Так как $\text{Im}(g \circ \sigma_M^A|_N) \leq N/A$, то $\text{Im}(g'|_N) \leq N$. Пусть $f' = g'|_N$. Тогда $f' \in \text{End}(N)$ и

$$\sigma_N^A \circ f' = \sigma_M^A \circ g'|_N = g \circ \sigma_M^A|_N = f \circ \sigma_N^A.$$

- 2) Доказательство аналогично доказательству п. 1). $\square$

Следующее утверждение непосредственно вытекает из теорем 20, 24, 25 и 30.

Следствие 31. Пусть N – прямое слагаемое модуля M . Тогда

- 1) если M является сильно эндоморфизм-поднимаемым, то N также является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем;
- 2) если M является сильно эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем, то N также является сильно эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Лемма 32. Пусть A – вполне инвариантный подмодуль правого R -модуля M . Тогда

- 1) если M является эндоморфизм-поднимаемым модулем, то M/A также является эндоморфизм-поднимаемым модулем;
- 2) если M является эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем и $A \ll M$, то M/A также является эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Доказательство. 1) Пусть M является эндоморфизм-поднимаемым модулем и L – подмодуль модуля M , причем $A \leq L$. Рассмотрим эндоморфизм f модуля M/L . Поскольку M является эндоморфизм-поднимаемым модулем, существует эндоморфизм g модуля M такой, что $\sigma_M^L \circ g = f \circ \sigma_M^L$. Поскольку $g(A) \leq A$, то существует эндоморфизм f' модуля M/A такой, что $f' \circ \sigma_M^A = \sigma_M^A \circ g$. Таким образом,

$$\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f' \circ \sigma_M^A = \sigma_{M/A}^{L/A} \circ \sigma_M^A \circ g = \sigma_M^L \circ g = f \circ \sigma_M^L = f \circ \sigma_{M/A}^{L/A} \circ \sigma_M^A.$$

Так как σ_M^A – эпиморфизм, то $\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f' = f \circ \sigma_{M/A}^{L/A}$.

- 2) Доказательство аналогично доказательству п. 1). □

Следующее утверждение непосредственно вытекает из теорем 21, 24, 25 и леммы 32.

Следствие 33. Пусть A – вполне инвариантный подмодуль правого R -модуля M . Тогда

- 1) если M является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем, то M/A также является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем;
- 2) если M является сильно эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем и $A \ll M$, то M/A также является сильно эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

3. Мало эндоморфизм-поднимаемые модули

Определение 34. Правый R -модуль M называется *мало эндоморфизм-поднимаемым* (соответственно, *мало эндоморфизм-поднимаемым[#]*), если для любого подмодуля (соответственно, малого подмодуля) A модуля M всякий эндоморфизм f модуля M/A , для которого $\text{Im } f \ll M/A$, может быть поднят до некоторого эндоморфизма f' модуля M .

Легко видеть, что примерами мало эндоморфизм-поднимаемых модулей являются эндоморфизм-поднимаемые модули и мало квазипроективные модули. Каждый модуль с нулевым радикалом Джекобсона является мало эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Лемма 35. Пусть N – прямое слагаемое правого R -модуля M . Тогда

- 1) если M – мало эндоморфизм-поднимаемый модуль, то N также является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем;
- 2) если M – мало эндоморфизм-поднимаемый[#] модуль, то N также является мало эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Доказательство. 1) Пусть $M = N \oplus T$ – мало эндоморфизм-поднимаемый модуль, A – подмодуль модуля N и f – эндоморфизм модуля N/A , у которого $\text{Im } f \ll N/A$. Рассмотрим эндоморфизм g модуля M/A , действующий по правилу $g(t + n) = f(n)$ для любого $t \in (T \oplus A)/A$ и $n \in N/A$. Тогда $\text{Im } g \ll M/A$ и $g|_{N/A} = f$. Поскольку M является мало эндоморфизм-поднимаемым, существует эндоморфизм g' модуля M такой, что $\sigma_M^A \circ g' = g \circ \sigma_M^A$. Так как $\text{Im}(g \circ \sigma_M^A|_N) \leq N/A$, то $\text{Im}(g'|_N) \leq N$. Пусть $f' = g'|_N$. Тогда $f' \in \text{End}(N)$ и $\sigma_N^A \circ f' = \sigma_M^A \circ g'|_N = g \circ \sigma_M^A|_N = f \circ \sigma_N^A$.

- 2) Доказательство аналогично доказательству п. 1). □

Лемма 36. Пусть A – вполне инвариантный подмодуль правого R -модуля M . Тогда

- 1) если M является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем, то M/A также является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем;
- 2) если M является мало эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем и $A \ll M$, то M/A также является мало эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Доказательство. 1) Пусть M является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем и L – подмодуль модуля M , причем $A \leq L$. Пусть f – эндоморфизм модуля M/L , у которого $\text{Im } f \ll M/L$. Поскольку M является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем, существует эндоморфизм g модуля M такой, что $\sigma_M^L \circ g = f \circ \sigma_M^L$. Так как $g(A) \leq A$, то существует эндоморфизм f' модуля M/A такой, что $f' \circ \sigma_M^A = \sigma_M^A \circ g$. Таким образом,

$$\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f' \circ \sigma_M^A = \sigma_{M/A}^{L/A} \circ \sigma_M^A \circ g = \sigma_M^L \circ g = f \circ \sigma_M^L = f \circ \sigma_{M/A}^{L/A} \circ \sigma_M^A.$$

Так как σ_M^A – эпиморфизм, то $\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f' = f \circ \sigma_{M/A}^{L/A}$.

- 2) Доказательство аналогично доказательству п. 1). □

Согласно [13], правый R -модуль M называется *мало дуально ADS-модулем* (соответственно, *мало ADS[#]-модулем*), если для каждого его разложения $M = A \oplus B$, где A, B – подмодули модуля M , A и B взаимно мало проективны (соответственно, взаимно мало проективны[#]).

Теорема 37. Пусть M – правый R -модуль. Тогда

- 1) если M является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем, то M является мало дуально-ADS модулем;
- 2) если M является мало эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем, то M является мало ADS[#] модулем.

Доказательство. Пусть M – мало эндоморфизм-поднимаемый модуль и $M = N \oplus T$, где $N, T \leq M$. Покажем, что модуль T является мало N -проективным. Пусть $A \leq N$. Рассмотрим гомоморфизм $f_0 : T \rightarrow N/A$, у которого $\text{Im } f_0 \ll N/A$. Ясно, что $M = N/A \oplus (T+A)/A$ и $(T+A)/A \cong T$. Через $\varepsilon : T \rightarrow (T+A)/A$ обозначим изоморфизм, действующий по правилу $\varepsilon(t) = t + A$. Для однозначно определенного гомоморфизма $f : (T+A)/A \rightarrow N/A$ имеет место равенство $f \circ \varepsilon = f_0$. Пусть $\pi_1 : N \oplus T \rightarrow N$, $\pi_2 : N/A \oplus (T+A)/A \rightarrow N/A$, $\pi_3 : N/A \oplus (T+A)/A \rightarrow (T+A)/A$ – естественные проекции. Тогда $\pi_2 \circ \sigma_M^A = \sigma_N^A \circ \pi_1$.

Рассмотрим эндоморфизм g модуля M/A , действующий по правилу $g(n + t + A) = f(t + A)$ для любого $n \in N$ и $t \in T$. Тогда $\text{Im } g = \text{Im } f \ll M/A$ и $f \circ \pi_3 = \pi_2 \circ g$. Поскольку M – мало эндоморфизм-поднимаемый модуль, существует $g' : M \rightarrow M$ такой, что $\sigma_M^A \circ g' = g \circ \sigma_M^A$. Найдется такой гомоморфизм $f' : (T+A)/A \rightarrow N/A$, что $\pi_1 \circ g' |_T = f' \circ \pi_3 \circ \sigma_M^A |_T$. Таким образом, имеет место следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & M/A & \xrightarrow{\pi_3} & (T+A)/A & \\
 \sigma_M^A \nearrow & & \searrow g & & \downarrow f' \\
 M & & M/A & \xrightarrow{\pi_2} & N/A \\
 \searrow g' & \sigma_M^A \nearrow & & \downarrow \sigma_N^A & \\
 & M & \xrightarrow{\pi_1} & N &
 \end{array}$$

Тогда

$$\sigma_N^A \circ f' \circ \pi_3 \circ \sigma_M^A |_T = \sigma_N^A \circ \pi_1 \circ g' |_T = \pi_2 \circ \sigma_M^A \circ g' |_T = \pi_2 \circ g \circ \sigma_M^A |_T = f \circ \pi_3 \circ \sigma_M^A |_T.$$

Следовательно, $\sigma_N^A \circ f' = f$ и $\sigma_N^A \circ f' \circ \varepsilon = f \circ \varepsilon = f_0$.

2) Доказательство аналогично доказательству п. 1). □

Замечание 38. Каждый мало квазипроективный модуль является мало квазипроективным[#] модулем. Каждый мало эндоморфизм-поднимаемый модуль является мало эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем. Обратное утверждение неверно, например, для $\mathbb{Z}$ -модуля $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$. Так как имеет место равенство $J(M) = 0$, то M является мало квазипроективным[#] модулем и мало эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем. Поскольку M не является мало дуально-ADS модулем, то M не является мало квазипроективным модулем и также не является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из следствия 10, теоремы 37 и [13, следствие 2.16].

Следствие 39. Следующие утверждения эквивалентны для кольца R :

- 1) $R/\text{Soc}(R_R)$ – правое V -кольцо;
- 2) каждый правый R -модуль является мало проективным модулем;
- 3) каждый правый R -модуль является мало квазипроективным модулем;
- 4) каждый правый R -модуль является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем;

5) каждый правый R -модуль является мало дуально- ADS модулем.

Напомним, что правый R -модуль M называется *полунетеровым*, если для каждого его ненулевого подмодуля U выполнено условие $J(U) \neq U$ [11]. Назовем правый R -модуль M *мало полунетеровым*, если для каждого его ненулевого малого подмодуля U выполнено условие $J(U) \neq U$.

Теорема 40. Пусть M – мало полунетеров правый R -модуль. Если модуль M обладает проективным накрытием $\alpha : P \rightarrow M$, то следующие условия эквивалентны:

- 1) M является мало квазипроективным[#] модулем;
- 2) M является мало эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1) Без ограничения общности можно считать, что $M = P / \text{Ker}(\alpha)$. Пусть f – эндоморфизм модуля P , для которого выполнено условие $\text{Im } f \ll P$, и пусть $C := \text{Ker } \alpha + \sum_{i=1}^{\infty} f^i(\text{Ker } \alpha)$. Предположим, что $f(\text{Ker } \alpha) \not\leq \text{Ker } \alpha$. Тогда $C \neq \text{Ker } \alpha$ и C является наименьшим подмодулем модуля P таким, что выполнены условия $f(C) \leq C$ и $\text{Ker } \alpha \leq C$. Так как $\text{Ker } \alpha \ll P$ и $f(C) \leq \text{Im } f \ll P$, то $C = \text{Ker } \alpha + f(C) \ll P$. Обозначим через $\sigma : M \rightarrow P/C$ естественный гомоморфизм. Поскольку $f(C) \leq C$, то существует эндоморфизм g' модуля P/C такой, что $g' \circ \sigma \circ \alpha = \sigma \circ \alpha \circ f$. Тогда $\text{Im } g' = \sigma \circ \alpha(\text{Im } f) \ll P/C$. Так как M является мало эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем, существует эндоморфизм f' модуля M такой, что $\sigma \circ f' = g' \circ \sigma$. Из проективности модуля P следует, что существует эндоморфизм g модуля P такой, что $\alpha \circ g = f' \circ \alpha$. Таким образом, имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & P \\ & \searrow g & \downarrow \alpha \\ M & \xrightarrow{f'} & M \\ & \searrow \sigma & \downarrow \sigma \\ P/C & \xrightarrow{g'} & P/C \end{array}$$

Тогда $\sigma \circ \alpha \circ (f - g) = 0$ и, следовательно, $(f - g)(P) \leq C$. Поскольку $\alpha(C) \ll M$, M является мало полунетеровым модулем и $\alpha(C) \neq 0$, то $J(\alpha(C)) \neq \alpha(C)$. Предположим, что $J(C) + \text{Ker } \alpha = C$. Тогда $\alpha(J(C)) = \alpha(C)$. Так как $\alpha(J(C)) \leq J(\alpha(C))$, то $J(\alpha(C)) = \alpha(C)$. Получили противоречие. Таким образом, $J(C) + \text{Ker } \alpha < C$. Поскольку $(f - g)(P) \leq C$ и $\text{Ker } \alpha \leq J(P)$, имеем $(f - g)(\text{Ker } \alpha) \leq (f - g)(J(P)) \leq J(C)$. Так как $g(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Ker } \alpha$, то

$$f(\text{Ker } \alpha) \leq (f - g)(\text{Ker } \alpha) + g(\text{Ker } \alpha) \leq J(C) + \text{Ker } \alpha.$$

Поскольку $f(C) \leq C$, то $f(J(C)) \leq J(C)$. Следовательно, $f(\text{Ker } \alpha + J(C)) \leq \text{Ker } \alpha + J(C)$. Получили противоречие с тем, что C является наименьшим подмодулем модуля P , для которого выполнены условия $f(C) \leq C$ и $\text{Ker } \alpha \leq C$. Таким образом, $f(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Ker } \alpha$. Тогда согласно теореме 14 M является мало квазипроективным[#] модулем. $\square$

Аналогично доказывается

Теорема 41. Пусть M – мало полунетеров правый R -модуль. Если модуль M обладает проективным накрытием $\alpha : P \rightarrow M$, то следующие условия эквивалентны:

- 1) M является мало квазипроективным модулем;
- 2) M является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем.

Следующее утверждение вытекает из предыдущих двух теорем и теоремы 16.

Теорема 42. Пусть M – правый модуль над совершенным справа кольцом. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) M является мало квазипроективным модулем;
- 2) M является мало квазипроективным[#] модулем;
- 3) M является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем;
- 4) M является мало эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Эквивалентность п. п. 1) и 5) из следующего утверждения доказано в работе [3] (см. также [15, теорема 3.3.19]).

Теорема 43. Пусть M – правый модуль над совершенным справа кольцом. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) M является квазипроективным модулем;
- 2) M является квазипроективным[#] модулем;
- 3) M является сильно эндоморфизм-поднимаемым модулем;
- 4) M является сильно эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем;
- 5) M является эндоморфизм-поднимаемым модулем;
- 6) M является эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Доказательство. Импликация 3) $\Rightarrow$ 5) очевидна. Эквивалентности 1) $\Leftrightarrow$ 2), 3) $\Leftrightarrow$ 4) и 5) $\Leftrightarrow$ 6) следуют соответственно из предложения 27 (1), следствия 28 и предложения 27 (2). Эквивалентность 2) $\Leftrightarrow$ 4) вытекает из леммы 29. Импликация 5) $\Rightarrow$ 3) следует из теоремы 24 и теоремы 42. $\square$

Модуль M называется *автоморфизм-поднимаемым* [16], если для каждого подмодуля N модуля M каждый автоморфизм f модуля M/N может быть поднят до эндоморфизма f' модуля M . Если для каждого подмодуля N модуля M каждый автоморфизм f модуля M/N может быть поднят до автоморфизма f' модуля M , модуль M называется *строго автоморфизм-поднимаемым*. Автоморфизм-поднимаемые модули были изучены в [6] и [17].

Теорема 44. Если правый R -модуль M обладает проективным накрытием $\alpha : P \rightarrow M$, то следующие условия эквивалентны:

- 1) M является автоморфизм-поднимаемым[#] и мало квазипроективным[#] модулем;

- 2) M является строго автоморфизм-поднимаемым[#] и мало квазипроективным[#] модулем;
- 3) каждый автоморфизм f модуля P , для которого существует такой малый подмодуль L модуля P , что $\text{Ker } \alpha \leq L$ и $f(L) = L$, удовлетворяет условию $f(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Ker } \alpha$;
- 4) каждый автоморфизм f модуля P , для которого существует такой малый подмодуль L модуля P , что $\text{Ker } \alpha \leq L$ и $f(L) = L$, удовлетворяет условию $f(\text{Ker } \alpha) = \text{Ker } \alpha$.

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 1) Очевидно.

1) $\Rightarrow$ 3) Пусть M является автоморфизм-поднимаемым[#] и мало квазипроективным[#] модулем с проективным накрытием $\alpha : P \rightarrow M$. Пусть L – малый подмодуль модуля P и f – автоморфизм модуля P такой, что $\text{Ker } \alpha \leq L$ и $f(L) = L$. Без ограничения общности можно предположить, что $M = P/\text{Ker } \alpha$. Имеет место естественный гомоморфизм $\sigma : P/\text{Ker } \alpha \rightarrow P/L$. Так как $f(L) = L$, то существует автоморфизм g модуля P/L такой, что $g \circ \sigma \circ \alpha = \sigma \circ \alpha \circ f$. Поскольку модуль M является автоморфизм-поднимаемым[#], существует эндоморфизм g' модуля M такой, что $\sigma \circ g' = g \circ \sigma$. Так как P – проективный модуль, существует гомоморфизм f' модуля P такой, что $g' \circ \alpha = \alpha \circ f'$. Тогда

$$\sigma \circ \alpha \circ f = g \circ \sigma \circ \alpha = \sigma \circ g' \circ \alpha = \sigma \circ \alpha \circ f'.$$

Отсюда $\sigma \circ \alpha \circ (f - f') = 0$ и, следовательно, $(f - f')(P) \leq L$. Поскольку M является мало квазипроективным[#], согласно теореме 14, $(f - f')(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Ker } \alpha$. Так как $f'(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Ker } \alpha$, то $f(\text{Ker } \alpha) \leq (f - f')(\text{Ker } \alpha) + f'(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Ker } \alpha$.

3) $\Rightarrow$ 4) Так как f^{-1} также является автоморфизмом модуля P и $f^{-1}(L) = L$, то $f^{-1}(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Ker } \alpha$. Следовательно, $\text{Ker } \alpha \leq f(\text{Ker } \alpha)$. Поскольку $f(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Ker } \alpha$ и $\text{Ker } \alpha \leq f(\text{Ker } \alpha)$, имеем $f(\text{Ker } \alpha) = \text{Ker } \alpha$.

4) $\Rightarrow$ 2) Предположим, что модуль M удовлетворяет условию п. 4). Покажем, что M является строго автоморфизм-поднимаемым[#] модулем. Пусть A – малый подмодуль модуля M , f – автоморфизм модуля M/A и $\sigma : M \rightarrow M/A$ – естественная проекция. Тогда существует эндоморфизм g модуля P такой, что $\sigma \circ \alpha \circ g = f \circ \sigma \circ \alpha$. Пусть $L = \alpha^{-1}(A)$. Тогда $\text{Im } g + L = P$. Поскольку $L \ll P$, имеем $\text{Im } g = P$. Тогда $P \cong P/\text{Ker } g$, где $\text{Ker } g \leq L \ll P$. Так как P – проективный модуль, то $\text{Ker } g = 0$. Следовательно, g – автоморфизм модуля P . Поскольку $\text{Ker}(f \circ \sigma \circ \alpha) = \text{Ker}(\sigma \circ \alpha) = L$ и $\text{Ker}(\sigma \circ \alpha \circ g) = g^{-1}(L)$, то $g^{-1}(L) = L$. Тогда $g(L) = L$. Согласно п. 4), $g(\text{Ker } \alpha) = \text{Ker } \alpha$. Значит, существует автоморфизм f' модуля M такой, что $f' \circ \alpha = \alpha \circ g$. Следовательно, $f \circ \sigma \circ \alpha = \sigma \circ \alpha \circ g = \sigma \circ f' \circ \alpha$. Поскольку α – эпиморфизм, то $f \circ \sigma = \sigma \circ f'$. Таким образом, M является строго автоморфизм-поднимаемым[#].

Покажем, что M является мало квазипроективным[#] модулем. Пусть A – малый подмодуль модуля M и $v : M \rightarrow M/A$ – гомоморфизм, удовлетворяющий условию $\text{Im } v \ll M/A$. Пусть $\sigma : M \rightarrow M/A$ – естественная проекция. Тогда существует эндоморфизм u мо-

дуля P такой, что $\sigma \circ \alpha \circ u = v \circ \alpha$. Поскольку $\text{Im } v \ll M/A$, имеем $\text{Im } u \ll P$. Так как $\text{Im}(1_P + u) + \text{Im } u = P$ и $\text{Im } u \ll P$, то $\text{Im}(1_P + u) = P$. Для любого $x \in \text{Ker}(1_P + u)$ имеем $(1_P + u)(x) = 0$ и, следовательно, $x = -u(x) \in \text{Im } u$. Поскольку $\text{Im } u \ll P$, то $\text{Ker}(1_P + u) \ll P$. Тогда из проективности модуля P следует, что $\text{Ker}(1_P + u) = 0$. Следовательно, $(1_P + u)$ – автоморфизм. Так как $(1_P + u) \circ u(P) = u \circ (1_P + u)(P) = u(P)$, то $(1_P + u)(\text{Im } u) = \text{Im } u$. Пусть $L := \text{Im } u + \text{Ker } \alpha$. Тогда

$$(1_P + u)(L) \leq (1_P + u)(\text{Im } u) + (1_P + u)(\text{Ker } \alpha) \leq \text{Im } u + \text{Ker } \alpha = L.$$

Для любого $a \in L$ имеет место равенство $a = x + u(y)$, где $x \in \text{Ker } \alpha$ и $y \in P$. Тогда $a = x + u(x) + u(y - x) = (1_P + u)(x) + u(y - x)$. Так как $(1_P + u)(\text{Im } u) = \text{Im } u$, то существует элемент $z \in \text{Im } u$ такой, что $u(y - x) = (1_P + u)(z)$. Следовательно, $a = (1_P + u)(x + z)$. Таким образом, $(1_P + u)(L) = L$. Из условия п. 4) следует, что $(1_P + u)(\text{Ker } \alpha) = \text{Ker } \alpha$. Тогда существует эндоморфизм u' модуля M такой, что $u' \circ \alpha = \alpha \circ (1_P + u)$. Положим $v' = u' - 1_M$. Тогда

$$\sigma \circ v' \circ \alpha = \sigma \circ u' \circ \alpha - \sigma \circ \alpha = \sigma \circ \alpha \circ (1_P + u) - \sigma \circ \alpha = \sigma \circ \alpha \circ u = v \circ \alpha.$$

Поскольку α – эпиморфизм, то $\sigma \circ v' = v$. Таким образом, M – мало квазипроективный[#] модуль. $\square$

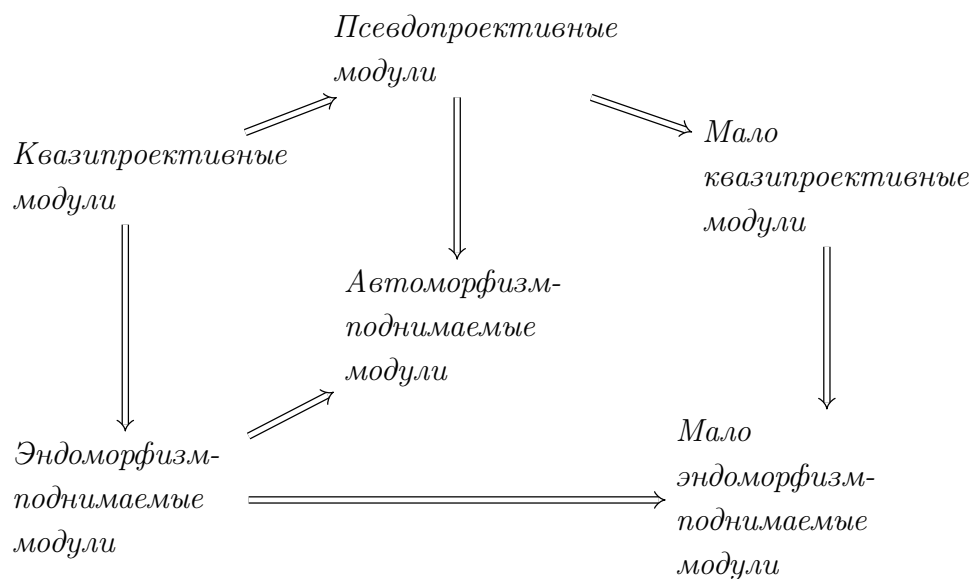
Следствие 45. Пусть M – правый модуль над совершенным справа кольцом. Следующие условия эквивалентны:

- 1) M является автоморфизм-поднимаемым и мало квазипроективным модулем;
- 2) M является строго автоморфизм-поднимаемым и мало квазипроективным модулем.

Из результатов нашей статьи и работ [3, 6] вытекает следующая схема зависимостей понятий в случае модулей над совершенными справа кольцами:

$$\begin{array}{llll}
 \text{Квазипроективные} & = & \text{Эндоморфизм-} & \\
 \text{модули} & & \text{поднимаемые модули} & \\
 & \Downarrow & & \\
 \text{Псевдопроективные} & = & \text{Автоморфизм-} & \Rightarrow \text{Автоморфизм-} \\
 \text{модули} & & \text{коинвариантные модули} & \text{поднимаемые модули} \\
 & \Downarrow & & \\
 \text{Мало квазипроективные} & = & \text{Мало эндоморфизм-} & \\
 \text{модули} & & \text{поднимаемые модули} &
 \end{array}$$

Из результатов, полученных в нашей работе, вытекает следующая схема зависимостей изученных понятий в общем случае:



Список литературы

- [1] R.E. Johnson, E.T. Wong, *Quasi-injective modules and irreducible rings*, J. London Math. Soc. **36**, 260–268 (1961).
DOI: <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-36.1.260>
- [2] A.A. Tuganbaev, *Semidistributive modules and rings*, Mathematics and its Applications **449**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-5086-6>
- [3] А.А. Туганбаев, *Характеризации колец, использующие малоинъективные и малопроективные модули*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика (3), 48–51 (1979).
- [4] S.E. Dickson, K.R. Fuller, *Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope*, Pac. J. Math. **31** (3), 655–658 (1969).
DOI: <https://doi.org/10.2140/pjm.1969.31.655>
- [5] S. Singh, A.K. Srivastava, *Dual automorphism-invariant modules*, J. Algebra **371**, 262–275 (2012).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.08.012>
- [6] A.N. Abyzov, T.C. Quynh, *Lifting of automorphisms of factor modules*, Comm. Algebra **46** (11), 5073–5082 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1461884>
- [7] A.N. Abyzov, T.C. Quynh, N.T.T. Ha, T. Yildirim, *Modules close to the automorphism invariant and coinvariant*, J. Algebra Appl. **18** (12), art. 1950235 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219498819502359>
- [8] А.Н. Абызов, Т.Д. Буй, *Существенно квазинъективные модули и их прямые суммы*, Изв. вузов. Матем. (7), 9–23 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2024-7-9-23>

- [9] А.А. Туганбаев, *Теория колец. Арифметические модули и кольца*, МЦНМО, М., 2009.
- [10] R. Wisbauer, *Foundations of module and ring theory. A handbook for study and research*, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, PA, 1991.
DOI: <https://doi.org/10.1201/9780203755532>
- [11] Ф. Каш, *Модули и кольца*, Мир, М., 1981.
- [12] J. Clark, C. Lomp, N. Vannaja, R. Wisbauer, *Lifting modules. Supplements and projectivity in module theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
DOI: <https://doi.org/10.1007/3-7643-7573-6>
- [13] A.N. Abyzov, B.T. Dat, T.C. Quynh, *Small dual-ADS modules, small $ADS^\#$ and small ADS^* modules*, Lobachevskii J. Math. **44** (12), 5097–5115 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223120028>
- [14] P.A. Guil Asensio, D. Keskin Tütüncü, B. Kaleboğaz, A.K. Srivastava, *Modules which are coinvariant under automorphisms of their projective covers*, J. Algebra **466**, 147–152 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.08.004>
- [15] А.А. Туганбаев, *Arithmetical rings and endomorphisms*, De Gruyter, Berlin, 2019.
DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110659825>
- [16] А.Н. Абызов, Ч.К. Куинь, А.А. Туганбаев, *Модули, инвариантные относительно автоморфизмов и идемпотентных эндоморфизмов своих оболочек и накрытий*, Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. **159**, 3–45 (2019).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/into414>
- [17] А.А. Туганбаев, *Automorphism-liftable modules*, J. Algebra Appl. **21** (6), art. 2250106 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219498822501067>

Адель Наилевич Абызов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: Adel.Abyzov@kpfu.ru

Буй Тиен Дат

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
Факультет информационных технологий,
Технологический университет Кантхо,
ул. Нгуен Ван Ку, д. 256, г. Кантхо, Вьетнам,
e-mail: btat@ctu.edu.vn

Small quasi-projective modules

A.N. Abyzov, T.D. Bui

Abstract. We study small quasi-projective modules and closely related classes of modules. The concept of a small quasi-projective module is dual to the concept of an essentially quasi-injective module, which has recently been studied in several works. It is shown that over right perfect rings, the class of small quasi-projective right modules coincides with a number of classes of right modules close to projective modules, which are studied in the article. As a consequence of the obtained results, the well-known A.A. Tuganbaev's theorem on the coincidence of the classes of quasi-projective right modules and endomorphism-lifting right modules over right perfect rings is presented. Also, characterizations are obtained for modules M , for which in the category $\sigma[M]$ every (finitely generated, cyclic, semisimple, simple) module is small projective in $\sigma[M]$.

Keywords: essentially injective modules, small projective modules, small endomorphism-liftable modules, perfect rings.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.4-28

References

- [1] R.E. Johnson, E.T. Wong, *Quasi-injective modules and irreducible rings*, J. London Math. Soc. **36**, 260–268 (1961).
DOI: <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-36.1.260>
- [2] A.A. Tuganbaev, *Semidistributive modules and rings*, Mathematics and its Applications **449**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-5086-6>
- [3] A.A. Tuganbaev, *Characterizations of rings using skew-injective and skew-projective modules*, Moscow Univ. Math. Bull. (3), 48–51 (1979) [in Russian].
- [4] S.E. Dickson, K.R. Fuller, *Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope*, Pac. J. Math. **31** (3), 655–658 (1969).
DOI: <https://doi.org/10.2140/pjm.1969.31.655>

Acknowledgements. The work is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 22-21-00267).

Received: 07 May 2024. Accepted: 10 August 2024. Published: 17 October 2024.

-
- [5] S. Singh, A.K. Srivastava, *Dual automorphism-invariant modules*, J. Algebra **371**, 262–275 (2012).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.08.012>
- [6] A.N. Abyzov, T.C. Quynh, *Lifting of automorphisms of factor modules*, Comm. Algebra **46** (11), 5073–5082 (2018).
DOI: <https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1461884>
- [7] A.N. Abyzov, T.C. Quynh, N.T.T. Ha, T. Yildirim, *Modules close to the automorphism invariant and coinvariant*, J. Algebra Appl. **18** (12), art. 1950235 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219498819502359>
- [8] A.N. Abyzov, T.D. Bui, *Essentially quasi-injective modules and their direct sums*, Russian Mathematics (Iz. VUZ) (7), 9–23 (2024) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2024-7-9-23>
- [9] A.A. Tuganbaev, *Ring theory. Arithmetic modules and rings*, MCCME, Moscow, 2009 [in Russian].
- [10] R. Wisbauer, *Foundations of module and ring theory. A handbook for study and research*, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, PA, 1991.
DOI: <https://doi.org/10.1201/9780203755532>
- [11] F. Kasch, *Modules and rings*, London Mathematical Society Monographs **17**, Academic Press, Inc., London–New York, 1982.
- [12] J. Clark, C. Lomp, N. Vanaja, R. Wisbauer, *Lifting modules. Supplements and projectivity in module theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
DOI: <https://doi.org/10.1007/3-7643-7573-6>
- [13] A.N. Abyzov, B.T. Dat, T.C. Quynh, *Small dual-ADS modules, small $ADS^\#$ and small ADS^* modules*, Lobachevskii J. Math. **44** (12), 5097–5115 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223120028>
- [14] P.A. Guil Asensio, D. Keskin Tütüncü, B. Kalebogaz, A.K. Srivastava, *Modules which are coinvariant under automorphisms of their projective covers*, J. Algebra **466**, 147–152 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.08.004>
- [15] A.A. Tuganbaev, *Arithmetical rings and endomorphisms*, De Gruyter, Berlin, 2019.
DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110659825>
- [16] A.N. Abyzov, T.C. Quynh, A.A. Tuganbaev, *Modules that are invariant with respect to automorphisms and idempotent endomorphisms of their hulls and covers*, J. Math. Sci. **256** (3), 235–277 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05427-x>
- [17] A.A. Tuganbaev, *Automorphism-liftable modules*, J. Algebra Appl. **21** (6), art. 2250106 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219498822501067>

Adel Nailevich Abyzov

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: Adel.Abyzov@kpfu.ru

Bui Tien Dat

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
Faculty of Information Technology,
Can Tho University of Technology,
256 Nguyen Van Cu str., Can Tho, Vietnam,
e-mail: btdat@ctuvt.edu.vn

Полугрупповая C^* -алгебра, порожденная свободным произведением абелевых полугрупп

С.А. Григорян, Т.А. Григорян

Аннотация. Исследуются полугрупповые C^* -алгебры, порожденные регулярным представлением свободных произведений абелевых полугрупп. Приведен критерий простоты таких алгебр, описаны характеры, градуировка и ряд других свойств.

Ключевые слова: свободная группа, свободная полугруппа, C^* -алгебра, спектр, идеал.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.29-45

Введение

Теория полугрупповых алгебр берет начало с работы Л.А. Кобурна [1], в которой было показано, что все C^* -алгебры, порожденные неунитарной изометрией, канонически изоморфны. С этой работой возник интерес к исследованию полугрупповых C^* -алгебр. Начальные статьи посвящались различным обобщениям теоремы Кобурна. В работах Р.Г. Дугласа [2], Ж. Мерфи [3] теорема Кобурна обобщена на положительные конусы упорядоченных абелевых групп.

Позже А. Ника [4] распространил теорему Кобурна на C^* -алгебры, порожденные ковариантными изометрическими представлениями квази-решетчатых упорядоченных полугрупп. Важным примером квази-решетчатых полугрупп является свободное произведение абелевых упорядоченных полугрупп, в частности, полугруппа $F_n^+ = \mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+ * \dots * \mathbb{Z}_+$, образованная свободным произведением неотрицательных целых чисел. В дальнейшем были изучены и другие задачи, возникающие в полугрупповых C^* -алгебрах (см. [5–10]).

В данной статье исследуются свойства C^* -алгебр, порожденных регулярными представлениями свободных произведений абелевых полугрупп. Простейшими примерами таких алгебр являются алгебра Теплица–Кунца $\mathcal{TO}_n$, порожденная регулярным представлением свободной полугруппы F_n^+ , а также C^* -алгебры, которые порождаются индуктивными пределами последовательности полугрупп F_n^+ (см. [11, 12]). В нашей работе основное внимание уделяется описанию свойств инверсной полугруппы мономов порожденной изометрическими регулярными представлениями свободной полугруппы. Вводится понятие двух типов индексов монома, что позволяет получить расслоение Фелла как по локальной группе, так и по абелевой группе. Приводится критерий простоты C^* -алгебр, порожденных регулярным представлением свободного произведения абелевых полугрупп.

1. Свободное произведение абелевых групп

В данном параграфе приведем ряд необходимых сведений из теории групп, на которые будем ссылаться в дальнейшем.

Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ ($n > 1$) – дискретные абелевы группы, не содержащие подгрупп конечного порядка. Через $\mathcal{T} = \Gamma_1 * \dots * \Gamma_n$ обозначим свободное произведение групп Γ_i , $1 \leq i \leq n$. По определению, $\mathcal{T}$ состоит из набора $a = a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * a_{i_m}$, $a_{i_k} \in \Gamma_{i_k}$, $i_k \neq i_{k+1}$. Каждый элемент $a_{i_k} \in \Gamma_{i_k}$ называется буквой, а произведение букв

$$\mathbf{a} = a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * a_{i_m}, \quad a_{i_k} \in \Gamma_{i_k}, \quad i_k \neq i_{k+1},$$

называется словом. Произведением слова $\mathbf{a}$ на слово $\mathbf{b} = b_{j_1} * b_{j_2} * \dots * b_{j_r}$ называется слово:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \begin{cases} a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * a_{i_m} * b_{j_1} * b_{j_2} * \dots * b_{j_r}, & \text{если } i_m \neq j_1; \\ a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * (a_{i_m} \cdot b_{j_1}) * b_{j_2} * \dots * b_{j_r}, & \text{если } i_m = j_1. \end{cases}$$

Обратное к слову $\mathbf{a} = a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * a_{i_m}$ есть слово $\mathbf{a}^{-1} = a_{i_m}^{-1} * a_{i_{m-1}}^{-1} * \dots * a_{i_1}^{-1}$. Единица e в группе $\mathcal{T}$ отождествляется с единицами e_i , $i = 1, \dots, n$, групп Γ_i .

Группа $\mathcal{T}$ является универсальным объектом в категории групп.

Пусть $l = (j_1, j_2, \dots, j_r)$ – подмножество множества $(1, 2, \dots, n)$.

Определим гомоморфизм $\omega_l : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$, где $\mathcal{T}' = \Gamma_{j_1} * \Gamma_{j_2} * \dots * \Gamma_{j_r}$, полагая для буквы $a_{i_k} \in \Gamma_{i_k}$

$$\omega_l(a_{i_k}) = \begin{cases} e, & \text{если } i_k \notin (j_1, j_2, \dots, j_r), \\ a_{i_k}, & \text{если } i_k \in (j_1, j_2, \dots, j_r). \end{cases}$$

Расширим отображение ω_l на $\mathcal{T}$:

$$\omega_l(\mathbf{a}) = \omega_l(a_{i_1}) * \omega_l(a_{i_2}) * \dots * \omega_l(a_{i_m}),$$

для $\mathbf{a} = a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * a_{i_m}$. Очевидно, $\omega_l : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ – гомоморфизм и $\mathcal{T} = \mathcal{T}' * \mathcal{T}''$, где $\mathcal{T}'' = \Gamma_{i_1} * \Gamma_{i_2} * \dots * \Gamma_{i_{n-r}}$ и $i_k \notin (j_1, j_2, \dots, j_r)$.

С помощью отображения $\omega_l : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ определим отображение $\tilde{\omega}_l : \mathcal{T} \rightarrow \Gamma'$, где Γ' есть абелева группа – декартово произведение групп Γ_{j_i} , $i = 1, 2, \dots, r$. Для $\mathbf{a} \in \mathcal{T}$, полагаем:

$$\tilde{\omega}_l(\mathbf{a}) = \omega_l(a_{i_1}) \cdot \omega_l(a_{i_2}) \cdot \dots \cdot \omega_l(a_{i_m}). \quad (1)$$

Таким образом определяется гомоморфизм $\nu : \mathcal{T} \rightarrow \Gamma$:

$$\nu(a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * a_{i_m}) = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

где b_i – произведение тех букв в слове $\mathbf{a}$, которые принадлежат Γ_i .

Наделим группу $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n$ дискретной топологией. Пусть G – группа характеров группы Γ , т.е. гомоморфизмов Γ в единичную окружность $\mathbb{T}$. По теореме Понтрягина, G – компактная абелева группа, группа ее характеров изоморфна Γ .

Группа G есть декартово произведение групп характеров $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$, где G_i есть группа характеров группы Γ_i . В дальнейшем через

$$\chi^{\mathbf{a}}(g) = \chi^{a_1}(g_1) \cdot \chi^{a_2}(g_2) \cdot \dots \cdot \chi^{a_n}(g_n), \quad (2)$$

$g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in G$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Gamma$, будем обозначать характер группы G , соответствующий элементу $\mathbf{a}$.

Наделив группу $\mathcal{T}$ дискретной топологией, можно показать, что G также является группой характеров группы $\mathcal{T}$ и, если $\mathbf{a} = a_{i_1} * \dots * a_{i_m}$, $m \in \mathbb{N}$, тогда

$$\chi^{\mathbf{a}}(g) = \chi^{a_{i_1}}(g_{i_1}) \cdot \chi^{a_{i_2}}(g_{i_2}) \cdot \dots \cdot \chi^{a_{i_m}}(g_{i_m})$$

есть характер группы G , соответствующий элементу $\mathbf{a} = a_{i_1} * \dots * a_{i_m} \in \mathcal{T}$.

Применяя теорему Понтрягина, получим следующее

Предложение 1. *Группа характеров дискретной группы $\mathcal{T}$ есть компактная группа G , а группа характеров группы G изоморфна группе Γ .*

Сравнивая (1) и (2), получим

$$\chi^{\mathbf{a}}(g) = \chi^{\nu(\mathbf{a})}(g), \quad \mathbf{a} \in \mathcal{T}.$$

Локальной группой называется набор $\mathbf{g} = (g, g^2, m, i)$, где g – дискретное множество, g^2 – подмножество в декартовом произведении $g \times g$, $m : g^2 \rightarrow g$ и $i : g \rightarrow g$ два отображения такие, что

- 1) если $(a, b), (b, c) \in g^2$ и $(m(a, b), c), (a, m(b, c)) \in g^2$, тогда $m(m(a, b), c) = m(a, m(b, c))$;
- 2) если $(a, b) \in g^2$, тогда $(i(a), i(b)) \in g^2$ и $m(i(a), i(b)) = i(m(a, b))$;
- 3) существует такой элемент $e \in g$, что $(e, a), (a, e) \in g^2$ и $m(a, e) = m(e, a) = a$;
- 4) $(a, i(a)), (i(a), a) \in g^2$ и $m(a, i(a)) = m(i(a), a) = e$.

Элемент e называется единицей $\mathbf{g}$, отображение $m : g^2 \rightarrow g$ – произведением, а $i : g \rightarrow g$ – взятием обратного.

Локальная группа называется глобализуемой, если она вкладывается в группу. Каждая симметричная окрестность группы является локальной группой.

Пусть $P = S_1 * S_2 * \dots * S_n$ – подполугруппа группы $\mathcal{T}$, порожденная свободным произведением подполугрупп S_i группы Γ_i . Предположим, что каждая подполугруппа S_i , $1 \leq i \leq n$, не содержит нетривиальную группу и порождает группу Γ_i , т.е. $\Gamma_i = S_i \cdot S_i^{-1}$, $S_i \cap S_i^{-1} = \{e_i\}$, где e_i – единица в Γ_i , $S_i^{-1} = \{a_i^{-1} \in \Gamma_i : a_i \in S_i\}$. Полагая

$$P^{-1} = S_1^{-1} * S_2^{-1} * \dots * S_n^{-1},$$

получим $\mathcal{T} = P * P^{-1}$.

Гомоморфизм полугруппы P в единичный диск $\mathcal{D}$ называется полухарактером. Полухарактер называется характером, если образ гомоморфизма есть единичная окружность $\mathbb{T}$. Группа характеров полугруппы P совпадает с $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$.

Каждая полугруппа S_i задает частичный порядок на Γ_i : $a_i \prec b_i$, если найдется $c_i \in S_i$ такой, что $c_i \cdot a_i = b_i$. Этот порядок распространяется и на $\mathcal{T}$: $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$, если найдется $\mathbf{c} \in P$ такой, что $\mathbf{a} * \mathbf{c} = \mathbf{b}$.

Полугруппа S_i называется конусом в Γ , если $\Gamma_i = S_i \cup S_i^{-1}$. В этом случае принято писать $S_i = \Gamma_i^+$. Свободную полугруппу P порожденную конусами Γ_i^+ , $i = 1, \dots, n$, будем обозначать $P^+ = \Gamma_1^+ * \dots * \Gamma_n^+$.

Свободная группа F_n порожденная множеством мощности n изоморфна группе $\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ – свободному произведению n экземпляров $\mathbb{Z}$. Группа характеров этой группы есть $\mathbb{T}^n$ – n -мерный тор. Полугруппа $F_n^+ = \mathbb{Z}_+ * \dots * \mathbb{Z}_+$ порождает группу F_n . Поэтому ее группа характеров есть $\mathbb{T}^n$, а полугруппа полухарактеров изоморфна произведению дисков $\mathcal{D}^n$.

2. Инверсные полугруппы

Пусть $l^2(P)$ – гильбертово пространство квадратично суммируемых функций на P со скалярным произведением

$$(f, g) = \sum_{\mathbf{a} \in P} f(\mathbf{a}) \overline{g(\mathbf{a})}, \quad f, g \in l^2(P).$$

Семейство функций $\{e_{\mathbf{a}}; \mathbf{a} \in P\}$, $e_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \sigma_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ – символ Кронекера, образуют ортонормированный базис на $l^2(P)$. Элемент базиса $\{e_{\mathbf{a}}; \mathbf{a} \in P\}$, соответствующий единице $e \in P$, будем обозначать e_0 и называть вакуумным, так как $T_{\mathbf{a}}e_0 = e_{\mathbf{a}}$, для любого $\mathbf{a} \in P$.

Регулярным представлением полугруппы P на $l^2(P)$ называется отображение $\mathbf{a} \rightarrow T_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a} \in P$, где $T_{\mathbf{a}}$ изометрически линейный оператор на $l^2(P)$ такой, что $T_{\mathbf{a}}e_{\mathbf{b}} = e_{\mathbf{a} * \mathbf{b}}$. Если $\mathbf{a} = a_{i_1} * a_{i_2} * \dots * a_{i_m}$, тогда $T_{\mathbf{a}} = T_{a_{i_1}} \cdot T_{a_{i_2}} \cdot \dots \cdot T_{a_{i_m}}$.

Конечное произведение операторов $T_{\mathbf{a}}$ и $T_{\mathbf{b}}^*$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P$, где $T_{\mathbf{b}}^*$ – оператор сопряженный к $T_{\mathbf{b}}$, называется мономом. Заметим, что сопряженным к $T_{\mathbf{a}} = T_{a_{i_1}} \cdot T_{a_{i_2}} \cdot \dots \cdot T_{a_{i_m}}$ является оператор $T_{\mathbf{a}}^* = T_{a_{i_m}}^* \cdot \dots \cdot T_{a_{i_2}}^* \cdot T_{a_{i_1}}^*$. Пусть $M(P)$ множество ненулевых мономов. Это множество есть частичная инверсная полугруппа с единицей $T_e = E$. Это означает, что если $W_1, W_2 \in M(P)$ и $W_1 \cdot W_2 \neq 0$, тогда $W_1 \cdot W_2 \in M(P)$.

Инверсность $M(P)$ означает, что

$$W^* W W^* = W^* \quad \text{и} \quad W W^* W = W.$$

Множество $E(P) = \{W \in M(P) : W = W^*\}$ есть коммутативная подполугруппа в $M(P)$ (см. [9, с. 21]).

Пусть $M(S_i)$ – полугруппа мономов из $M(P)$, которые порождаются операторами $T_{a_i}, T_{b_i}^*, a_i, b_i \in S_i, i = 1, 2, \dots, n$. Мономы в $M(P)$ принадлежащие $M(S_i), 1 \leq i \leq n$, будем называть элементарными мономами.

Предложение 2. *Каждый моном $W \in M(P)$ однозначно раскладывается в произведения элементарных мономов:*

$$W = W_{i_1} \cdot W_{i_2} \cdot \dots \cdot W_{i_n}, \quad W_{i_k} \in M(S_{i_k}).$$

Число r будем называть длиной монома $W = W_{i_1} \cdot W_{i_2} \cdot \dots \cdot W_{i_r}$ и обозначать $d(W) = r$.

Отметим, если $S_i = \Gamma_i^+$ – конус в Γ_i , тогда каждый элементарный моном в $M(S_i)$ представим в виде $T_{a_i} T_{b_i}^*, a_i, b_i \in S_i$. Если S_i задает частичный порядок на Γ_i , тогда существуют a_i и $b_i \in \Gamma_i$ такие, что мономы $T_{a_i}^* T_{b_i}$ и $T_{b_i}^* T_{a_i}$ не являются изометриями.

Предложение 3.

- 1) Предположим, для монома $W_i \in M(S_i)$ справедливо $W_i e_0 = e_{a_i}, a_i \in S_i$, где e_0 – вакуумный элемент. Тогда $W_i = T_{a_i}$. В частности, если $W_i T_{a_i} = E, W_i \in M(S_i)$, тогда $W_i = T_{a_i}^*$.
- 2) Пусть в мономе $W \in M(P), W = W_{i_1} \cdot W_{i_2} \cdot \dots \cdot W_{i_m}, i_k$ -й элемент W_{i_k} равен $T_{a_{i_k}}, a_{i_k} \in S_{i_k}$. Тогда $W_{i_{k-1}} = T_{a_{i_{k-1}}}, a_{i_{k-1}} \in S_{i_{k-1}}$.
- 3) Пусть элементарный моном $W_{i_k} \in M(S_{i_k})$ не принадлежит полугруппе $\{T_{a_{i_k}}\}, a_{i_k} \in S_{i_k}$. Тогда $W_{i_{k+1}} = T_{a_{i_{k+1}}}^*, a_{i_{k+1}} \in S_{i_{k+1}}$.
- 4) Пусть в представлении $W = W_{i_1} \cdot W_{i_2} \cdot \dots \cdot W_{i_m}$ элементарный моном $W_{i_k} \in M(S_{i_k})$ не принадлежит полугруппам $\{T_{a_{i_k}}\}$ и $\{T_{a_{i_k}}^*\}, a_{i_k} \in S_{i_k}, 1 \leq k \leq m$. Тогда $W = T_{\mathbf{a}} W_{i_k} T_{\mathbf{b}}^*$, где $\mathbf{a} \in S_{i_1} * \dots * S_{i_{k-1}}, \mathbf{b} \in S_{i_{k+1}} * \dots * S_{i_m}$.
Верно и обратное: для любых $\mathbf{a} \in S_{i_1} * \dots * S_{i_{k-1}}, \mathbf{b} \in S_{i_{k+1}} * \dots * S_{i_m}$ и $W_{i_k} \in M(S_{i_k})$ моном $W = T_{\mathbf{a}} W_{i_k} T_{\mathbf{b}}^*$ принадлежит $M(P)$.

Доказательство. 1) Для простоты, предположим $W_i = T_{a_1} T_{b_1}^* T_{a_2} T_{b_2}^*, a_1, a_2, b_1, b_2 \in S_i$. Из равенства $T_{b_2}^* e_0 = 0$, когда b_2 не равно единице полугруппы S_i , следует $e_2 = b$ и $W_i = T_{a_1} T_{b_1}^* T_{a_2}$. Поэтому, $T_{b_1}^* T_{a_2} e_0 \neq 0$, т. е. $b_1 \prec a_2$. Следовательно, $W_i = T_{a_1} T_c$, где $cb_1 = a_2, a_1 c = a_0$.

2) Пусть $W_{i_{k-1}} = V T_{b_{i_{k-1}}}^* T_{a_{i_{k-1}}}, b_{i_{k-1}}$ и $a_{i_{k-1}}$ несравнимы, $V \in M(S_{i_{k-1}})$. Покажем, что $W_{i_{k-1}} T_{a_{i_k}} = 0$. Допустим противное, тогда найдется $e_b \in \{e_a\}_{a \in P}$ такое, что $W_{i_{k-1}} T_{a_{i_k}} e_b \neq 0$, т. е. $(b_{i_{k-1}}^{-1} a_{i_{k-1}}^{-1}) * a_{i_k} * b \in P$ или, что то же, $b_{i_{k-1}}^{-1} a_{i_{k-1}}^{-1} \in S_{i_{k-1}}$. Следовательно, $b_{i_{k-1}} \prec a_{i_{k-1}}$. Пришли к противоречию.

3) и 4) следуют из 2). □

Отметим, что если $S_i = \Gamma_i^+$ – конус в Γ_i , для всех i , то $W = T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{b}}^*, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in P, W \in M(P)$.

Пусть $P_k = S_1 * S_2 * \dots * S_k$ подполугруппа полугруппы P . Обозначим через $M(P_k)$ частичную инверсную подполугруппу полугруппы $M(P)$ порожденную элементарными мономами $W_i, 1 \leq i \leq k$.

Предложение 4. *Существует гомоморфизм $\gamma_k : M(P) \rightarrow M(P_k)$.*

Доказательство. Определим операцию сокращения элементарных мономов. Пусть задан моном

$$W = T_{\mathbf{a}} W_{i_k} T_{\mathbf{b}}^* = T_{a_{i_1}} T_{a_{i_2}} \dots T_{a_{i_{l-1}}} W_{i_l} T_{b_{i_{l+1}}}^* \dots T_{b_r}^*.$$

Операция сокращения заключается в следующем: в произведении элементарных мономов заменим на E те, которые не принадлежат $M(P_k)$. Получим ненулевой моном $W' = T_{\mathbf{a}'} W_{i_l}' T_{\mathbf{b}'}^*$, где $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \in P_k$, $W_{i_l}' = W_{i_l}$, если $1 \leq i_l \leq k$.

Учитывая, что каждый моном $W \in M(P)$ имеет вид $W = T_{\mathbf{a}} W_{i_l} T_{\mathbf{b}}^*$, можно показать, что отображение $W \rightarrow W'$ из $M(P)$ в $M(P_k)$ есть гомоморфизм. $\square$

В дальнейшем этот гомоморфизм будем называть операцией сокращения и обозначать $\gamma_k : M(P) \rightarrow M(P_k)$.

Определим отображение $\tau_i : M(S_i) \rightarrow \Gamma_i$, полагая

$$\tau_i(T_{a_1} \cdot T_{b_1}^* \cdot T_{a_2} \cdot T_{b_2}^* \cdot \dots \cdot T_{a_k} \cdot T_{b_k}^*) = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k)(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_k)^{-1}.$$

Это отображение есть гомоморфизм инверсной полугруппы на группу. Ядро этого гомоморфизма состоит из идемпотентов полугруппы $M(S_i)$.

Предложение 5. *Отображение $\tau : M(P) \rightarrow \mathcal{T}$:*

$$\tau(W_{i_1} \cdot \dots \cdot W_{i_m}) = \tau_{i_1}(W_{i_1}) * \dots * \tau_{i_m}(W_{i_m}), \quad W_{i_k} \in M(S_{i_k})$$

есть гомоморфизм частичной инверсной полугруппы на локальную группу в $\mathcal{T}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что слова $b^{-1} * a$, $b \in S_i$, $a \in S_j$, $i \neq j$, не принадлежат $\tau(M(P))$. $\square$

Следствие 6. *Ядро $\text{Ker } \tau$ гомоморфизма $\tau : M(P) \rightarrow \mathcal{T}$ состоит из идемпотентов.*

Отметим, что если $S_i = \Gamma_i^+$, тогда ядро состоит из операторов $T_{\mathbf{a}} \cdot T_{\mathbf{a}}^*$, $\mathbf{a} \in P$. В противном случае, из несравнимости a и b , $a, b \in S_i$, следует, что $T_b^* T_a T_a^* T_b$ – идемпотент в $M(S_i)$.

Суперпозиция

$$\nu \circ \tau : M(P) \rightarrow \Gamma,$$

где ν – гомоморфизм (1), определяет гомоморфизм из $M(P)$ на Γ .

Для монома $W \in M(P)$ можно определить два индекса. Слово $\tau(W)$ будем называть $\mathcal{T}$ -индексом монома W , а элемент $\nu \circ \tau(W)$ – Γ -индексом.

Наделим $M(P)$ дискретной топологией. Характером полугруппы $M(P)$ назовем частичный гомоморфизм из $M(P)$ на единичную окружность $\mathbb{T}$. Сужение характера на полугруппу $M(S_i)$ является характером этой полугруппы. Группа характеров $M(S_i)$ есть

G_i – группа характеров Γ_i и $G = G_1 \times \dots \times G_n$ – группа характеров полугруппы $M(P)$. Полагая для характеров

$$\chi^W(g) = \chi^{\nu \circ \tau(W)}(g), \quad W \in M(P), \quad g \in G, \quad (3)$$

в дальнейшем будем писать

$$g(W) = \chi^W(g) = \chi^{\tau(W)}(g).$$

Пусть $\text{Aut } M(P)$ – группа автоморфизмов полугруппы $M(P)$. Определим представление $\sigma : G \rightarrow \text{Aut } M(P)$, полагая $\sigma_g(W) = \chi^W(g)W$.

Предложение 7. *Отображение $\sigma : G \rightarrow \text{Aut } M(P)$ есть представление группы G в группу автоморфизмов $M(P)$.*

Доказательство. Пусть $W_1, W_2 \in M(P)$ такие, что $W_1 \cdot W_2 \in M(P)$. Тогда

$$\sigma_g(W_1 \cdot W_2) = \chi^{W_1 \cdot W_2}(g)W_1 \cdot W_2 = \chi^{W_1}(g)W_1 \cdot \chi^{W_2}(g)W_2 = \sigma_g(W_1) \cdot \sigma_g(W_2).$$

□

Пространство $M_0(P)$ неподвижных мономов для представления σ_g , $g \in G$, есть частичная инволютивная полугруппа, состоящая из тех мономов W , для которых $\chi^W \equiv 1$.

Замечание. Частично инверсная полугруппа $M(P)$ называется инверсной оболочкой полугруппы P ([9, с. 54]).

3. Алгебра $C_r^*(P)$

Пространство $\mathcal{L}(P)$ всех конечных линейных комбинаций мономов из $M(P)$ образует инволютивную подалгебру алгебры $B(l^2(P))$ всех ограниченных линейных операторов на $l^2(P)$. Замыкание $\mathcal{L}(P)$ в операторной норме есть приведенная полугрупповая C^* -алгебра $C_r^*(P)$ порожденная регулярным представлением полугруппы P .

Теорема 8. *Существует точное представление $\sigma : G \rightarrow \text{Aut } C_r^*(P)$ компактной абелевой группы $G = G_1 \times \dots \times G_n$ в группу автоморфизмов $\text{Aut } C_r^*(P)$.*

Доказательство. Пусть $U(P)$ – группа унитарных операторов на $l^2(P)$. Определим представление $U : G \rightarrow U(P)$, полагая, на базисе $\{e_a\}_{a \in P}$:

$$U_g e_a = \chi^a(g) e_a.$$

Покажем, что алгебра $C_r^*(P)$ инвариантна для внутреннего автоморфизма $\text{Ad } U_g$ алгебры $B(l^2(P))$. Для этого достаточно показать, что операторы T_a , $a \in P$, собственные

векторы автоморфизма $\text{Ad } U_g$. Пусть $e_{\mathbf{b}} \in \{e_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in P}$. Тогда

$$\text{Ad } U_g(T_{\mathbf{a}})(e_{\mathbf{b}}) = U_g T_{\mathbf{a}} U_{g^{-1}}(e_{\mathbf{b}}) = \chi^{\mathbf{b}}(g^{-1}) T U_g T_{\mathbf{a}} e_{\mathbf{b}} = \chi^{\mathbf{b}}(g^{-1}) \chi^{\mathbf{a} * \mathbf{b}}(g) e_{\mathbf{a} * \mathbf{b}} = \chi^{\mathbf{a}}(g) T_{\mathbf{a}} e_{\mathbf{b}}.$$

Таким образом,

$$U_g T_{\mathbf{a}} U_{g^{-1}} = \chi^{\mathbf{a}}(g) T_{\mathbf{a}}.$$

Поэтому, см. (3),

$$U_g W U_{g^{-1}} = \chi^W(g) W, \quad W \in M(P)$$

и отображение $g \rightarrow \text{Ad } U_g$ есть представление группы G в группу $\text{Aut } C_r^*(P)$.

Для доказательства непрерывности достаточно показать, что $C_r^*(P)$ -значная функция $A(g) = U_g A U_g^*$, $A \in C_r^*(P)$, равномерно непрерывна на G . Функция

$$W(g) = U_g W U_g^* = \chi^W(g) W, \quad W \in M(P),$$

равномерно непрерывна на G . Поэтому и функции $B(g) = U_g B U_g^*$, $B \in \mathcal{L}(P)$, равномерно непрерывны. Следовательно, $A(g)$, $A \in \overline{\mathcal{L}(P)} = C_r^*(P)$, равномерно непрерывна на G . $\square$

Пусть $C(G; C_r^*(P))$ – алгебра всех равномерно непрерывных функций на G со значениями в $C_r^*(P)$. Из теоремы 8 следует, что отображение $A \rightarrow A(g) = U_g A U_g^*$ есть изоморфизм между алгеброй $C_r^*(P)$ и алгеброй $\mathcal{A} = \{A(g) \in C(G; C_r^*(P)) : A \in C_r^*(P)\}$. Каждая функция $A(g) \in \mathcal{A}$ раскладывается в ряд Фурье

$$A(g) \simeq \sum_{b \in \Gamma} A_b(g),$$

где $A_b(g) = \chi^b(g) A_b$, $A_b = \int_G A(g) \bar{\chi}^b(g) d\mu$.

Пусть $\mathcal{B}_b$ – замкнутое подпространство в $C_r^*(P)$ порожденное линейными комбинациями элементов A_b , $b \in \Gamma$. Заметим, $U_g A_b U_g^* = \chi^b(g) A_b$. По аналогии с классической теорией рядов Фурье:

- 1) $\mathcal{B}_a \cdot \mathcal{B}_b \subset \mathcal{B}_{a \cdot b}$;
- 2) $\mathcal{B}_b^* = \mathcal{B}_{b^{-1}}$;
- 3) $C_r^*(P) = \overline{\bigoplus \mathcal{B}_b}$;
- 4) для каждого $b \in \Gamma$ существует сжимающее отображение

$$F_b : C_r^*(P) \rightarrow \mathcal{B}_b;$$

- 5) $F_e : C_r^*(P) \rightarrow \mathcal{B}_e$ – условное ожидание.

Семейство $\{\mathcal{B}_b\}_{b \in \Gamma}$ называется расслоением Фелла над группой Γ , а представление $C_r^*(P) = \overline{\bigoplus \mathcal{B}_b}$ – градуировкой $C_r^*(P)$ по Γ . Из 1) следует, что $\mathcal{B}_b$, $b \in \Gamma$, есть $\mathcal{B}_e$ -бимодуль. В работе [12] была построена градуировка алгебры $C_r^*(P)$ по локальной группе $\mathbf{g} = \tau(M(P))$.

Пусть $W_{\mathbf{a}} = \{W \in M(P) : \tau(W) = \mathbf{a}\}$, $\mathbf{a} \in \mathcal{T}$. Множество тех $\mathbf{a} \in \mathcal{T}$, для которых

$W_{\mathbf{a}} \neq \{\emptyset\}$, образует локальную группу $\mathbf{g} = \tau(M(P))$. Пусть $B_{\mathbf{a}}$ – замкнутое линейное подпространство в $C_r^*(S)$ порожденное мономами из $W_{\mathbf{a}}$.

Предложение 9 ([12]). Семейство $\{B_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \mathbf{g}}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $B_{\mathbf{a}} \cdot B_{\mathbf{b}} = 0$, если $\mathbf{a} * \mathbf{b} \notin \mathbf{g}$ и $B_{\mathbf{a}} \cdot B_{\mathbf{b}} \subset B_{\mathbf{a} * \mathbf{b}}$ в противном случае;
- 2) $B_{\mathbf{a}}^* = B_{\mathbf{a}^{-1}}$;
- 3) B_e – коммутативная C^* -алгебра порожденная линейными комбинациями идемпотентов;
- 4) $C_r^*(P) = \overline{\bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbf{g}} B_{\mathbf{a}}}$;
- 5) для каждого $\mathbf{a} \in \mathcal{T}$ существует сжимающее отображение $\Phi_{\mathbf{a}} : C_r^*(P) \rightarrow B_{\mathbf{a}}$;
- 6) $\Phi_e : C_r^*(P) \rightarrow B_e$, $e \in \mathcal{T}$, является условным ожиданием.

Установим связь между градуировками по Γ и локальной группой $\mathbf{g}$. Покажем, что среди приведенных расслоений расслоение по локальной группе более “мелкое”.

Предложение 10. Пусть $\{B_b\}_{b \in \Gamma}$ и $\{B_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \mathbf{g}}$ два расслоения над коммутативной группой Γ и свободной группой $\mathcal{T}$ порожденные алгеброй $C_r^*(P)$. Тогда

- 1) $B_b = \overline{\bigoplus_{\mathbf{a} \in \tau_b} B_{\mathbf{a}}}$, где $\tau_b = \{\mathbf{a} \in \mathcal{T} : \nu(\tau(\mathbf{a})) = b\}$;
- 2) $B_b \cdot B_c = \overline{\bigoplus_{\mathbf{a} \in \tau_b * \tau_c} B_{\mathbf{a}}}$;
- 3) $B_b^* = \overline{\bigoplus_{\mathbf{a} \in \tau_b} B_{\mathbf{a}}^*}$;
- 4) для каждого $\mathbf{a} \in \tau_b$ существует сжимающее отображение $\Phi_{\mathbf{a}}^b : B_b \rightarrow B_{\mathbf{a}}$;
- 5) $\Phi : B_e \rightarrow B_e$ – условное ожидание.

Доказательство. Для доказательства достаточно определить $\Phi_{\mathbf{a}}^b = F_b \circ \Phi_{\mathbf{a}}$. □

Пусть $C_b(P)$ – алгебра всех ограниченных функций на полугруппе P . Так как B_e – коммутативная алгебра диагональная относительно базиса $\{e_b\}_{b \in \mathbb{R}}$, алгебра B_e есть подалгебра $C_b(P)$.

Приведенные градуировки алгебры $C_r^*(P)$ порождают коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} C_r^*(P) & \xrightarrow{\Phi_e} & B_e \\ & \searrow F_e & \downarrow \Phi \\ & & B_e \end{array}$$

с отображениями – условными ожиданиями.

Определим два индекса монома $W \in M(P)$: $\text{ind}_{\mathcal{T}}(W) = \tau(W)$ и $\text{ind}_{\Gamma} W = \nu(W) \in \Gamma$.

Из предложения 10 следует, что градуировка по локальной группе $\mathbf{g}$ алгебры $C_r^*(P)$ более “мелкая”, чем по группе Γ . Отметим, если $W e_{\mathbf{b}} \neq 0$, тогда $W e_{\mathbf{b}} = e_{\mathbf{a} * \mathbf{b}}$, где $\mathbf{a} = \text{ind}_{\mathcal{T}} W$.

Пусть $C_r^*(P_k)$ – полугрупповая алгебра порожденная регулярным представлением полугруппы $P_k = S_{i_1} * S_{i_2} * \dots * S_{i_k}$, $k < n$, на $l^2(P_k)$.

Теорема 11. Существует вложение $h_k : C_r^*(P_k) \rightarrow C_r^*(P)$ и условное ожидание $j_k : C_r^*(P) \rightarrow C_r^*(P_k)$ такие, что $j_k \circ h_k = \text{id}$ – тождественное отображение.

Доказательство. Пусть Q – унитарная подполугруппа полугруппы P , состоящая из тех слов $\mathbf{a} = a_{i_1} * \dots * a_{i_m}$, $m \in \mathbb{N}$, первая буква которых a_{i_1} не принадлежит $P_k \setminus \{e\}$, e – единица полугруппы P . Очевидно, $P = P_k * Q$. Полагая $Q_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{a} * \mathbf{b} : \mathbf{a} \in P_k\}$, $\mathbf{b} \in Q_k$, представим $l^2(P)$ в виде прямой суммы гильбертовых пространств

$$l^2(P) = \bigoplus_{\mathbf{b} \in Q} l^2(Q_{\mathbf{b}}).$$

Заметим, что $l^2(Q_e) = l^2(P_k)$. Унитарный оператор $U_{\mathbf{r}}^{\mathbf{b}} : l^2(Q_{\mathbf{b}}) \rightarrow l^2(Q_{\mathbf{r}})$, $\mathbf{b}, \mathbf{r} \in Q$, $U_{\mathbf{r}}^{\mathbf{b}}(e_{\mathbf{a}*\mathbf{b}}) = e_{\mathbf{a}*\mathbf{r}}$ коммутирует с оператором $T_{\mathbf{d}}$, $\mathbf{d} \in P_k$, т. е. $T_{\mathbf{d}}U_{\mathbf{r}}^{\mathbf{b}} = U_{\mathbf{r}}^{\mathbf{b}}T_{\mathbf{d}}$. Поэтому оператор $T_{\mathbf{d}}$, $\mathbf{d} \in P_k$, есть сумма копий операторов $T_{\mathbf{d},\mathbf{b}} = T_{\mathbf{d}}|_{l^2(Q_{\mathbf{b}})}$, $T_{\mathbf{d}} = \bigoplus_{\mathbf{b} \in Q} T_{\mathbf{d},\mathbf{b}}$. Аналогично, $T_{\mathbf{d}}^* = \bigoplus_{\mathbf{b} \in Q} T_{\mathbf{d},\mathbf{b}}^*$. Следовательно, каждый моном $W \in M(P_k)$ можно представить в виде мономов

$$W = \bigoplus_{\mathbf{b} \in Q} W_{\mathbf{b}}, \quad W_{\mathbf{b}} = W|_{l^2(Q_{\mathbf{b}})}.$$

Таким образом, C^* -подалгебра алгебры $C_r^*(P)$ порожденная операторами $T_{\mathbf{d}}$, $\mathbf{d} \in P_k$, распадается на копии C^* -алгебр изоморфных алгебре $C_r^*(P_k)$ и отображение $h_k : C_r^*(P_k) \rightarrow C_r^*(P)$, $h_k(A) = \bigoplus_{\mathbf{b} \in Q} A_{\mathbf{b}}$, есть вложение, где $A_{\mathbf{b}} = A|_{l^2(Q_{\mathbf{b}})}$. Построим теперь условное ожидание. Для этого достаточно показать, что если моном W не принадлежит $M(P_k)$, тогда $j_k(W) = 0$. Действительно, из п. 4) предложения 3 следует, $W = T_{\mathbf{a}}W_{i_0}T_{\mathbf{b}}^*$. Поэтому

$$\text{ind}_{\mathcal{T}} W = \mathbf{a} * \tau_{i_0}(W_{i_0}) * \mathbf{b}^{-1}$$

и, если $\mathbf{r}, \mathbf{d} \in P_k$ такие, что $W e_{\mathbf{r}} = e_{\mathbf{d}}$, то

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} * \tau_{i_0}(W_{i_0}) * \mathbf{b}^{-1} * \mathbf{r}.$$

Отсюда $\mathbf{a} * \tau_{i_0}(W_{i_0}) * \mathbf{b}^{-1} \in P_k$ и $W \in M(P_k)$.

Таким образом, замкнутое подпространство в $C_r^*(P)$ порожденное мономами $W \notin M(P_k)$ образует $\text{Ker } j_k$ – ядро отображения $j_k : C_r^*(P) \rightarrow C_r^*(P_k)$ и $C_r^*(P) = C_r^*(P_k) \oplus \text{Ker } j_k$. Если $W_1 \in M(P_k)$, $W_2 \notin M(P_k)$, тогда $W_1 \cdot W_2 \notin M(P_k)$. Поэтому $\text{Ker } j_k$ есть $C_r^*(P_k)$ -бимодуль и j_k есть условное ожидание. Для завершения доказательства достаточно заметить, что $j_k \circ h_k = \text{id}$. $\square$

Пусть $\mathcal{T}_X$ – C^* -подалгебра $C_r^*(P)$ порожденная конечным множеством $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a_i \in S_i \setminus \{e\}$. Из равенства $T_{a_i}^* T_{a_j} = 0$, если $i \neq j$, следует $\sum T_{a_i} T_{a_j}^* < I$. Поэтому алгебра $\mathcal{T}_X$ изоморфна алгебре Теплица–Кунца $\mathcal{TO}_n$ (см. [5]). Фактор алгебра $\mathcal{TO}_n$ по коммутаторному идеалу $K \subset \mathcal{TO}_n$ изоморфна алгебре Кунца $\mathcal{O}_n$.

Теорема 12.

- 1) Существует вложение $\lambda : \mathcal{T}_X \rightarrow C_r^*(P)$ и условное ожидание $\beta : C_r^*(P) \rightarrow \mathcal{T}_X$ такие, что $\beta \circ \lambda = \text{id}$.
- 2) Существует вполне положительное отображение $\phi : C_r^*(P) \rightarrow \mathcal{O}_n$.

Доказательство. 1) проверяется также как и теорема 11. Для проверки 2) достаточно задать ϕ как композицию отображения β с фактор отображением $\mathcal{T}_X \simeq \mathcal{TO}_n$ по K . $\square$

4. Идеалы алгебры $C_r^*(P)$

В работе [13, с. 436] было показано, что если среди абелевых полугрупп $S_i, i = 1, \dots, n$, есть плотная в $\mathbb{R}_+$ полугруппа, то алгебра $C_r^*(P)$, $P = S_1 * \dots * S_n$, есть простая C^* -алгебра. Аналогичное утверждение верно и для индуктивного предела алгебры Теплица–Кунца $\mathcal{TO}_n$, хотя алгебра $\mathcal{TO}_n$ не проста [10]. В связи с этим возникает вопрос: описать те полугруппы $P = S_1 * \dots * S_n$, регулярные представления которых порождают простые C^* -алгебры. В данном разделе дается ответ на этот вопрос.

Семейство правых главных идеалов $\mathcal{J} = \{I_a\}_{a \in P}$, где $I_a = \{a * b : b \in P\}$, можно превратить в унитарную полугруппу, полагая $I_a \cdot I_b = I_{a*b}$, с единицей $I_e = P$. Если $a \prec b$, т.е. $b = a * c$, тогда $I_b \subset I_a$. Элемент $a \in P^0 = P \setminus \{e\}$ называется минимальным слева, если из условия $b \prec a$, $b \in P^0$, следует $b = a$. Множество минимальных элементов L полугруппы P называется базисом, если для любого $b \in P$ найдется $a \in L$ такое, что $a \prec b$. Будем говорить, что P имеет конечный базис, если L – конечное множество.

Предложение 13. Пусть L – базис в P . Тогда $L = \bigcup_{i=1}^n L_i$, где $L_i = L \cap S_i$ – базис в S_i , и обратно, если L_i – базис в S_i , тогда $L = \bigcup_{i=1}^n L_i$ – базис в P .

Доказательство. Пусть $a \in P$ минимальный элемент. Тогда a – буква и, следовательно, принадлежит некоторому S_i , и является минимальным в S_i . Поэтому $L = \bigcup_{i=1}^n L_i$. Верно и обратное: объединение минимальных элементов полугруппы $S_i, i = 1, \dots, n$, есть множество минимальных элементов в P . $\square$

Не каждая полугруппа имеет базис. Если $S_i = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, n$, то полугруппа P имеет конечный базис. В случае $S_i = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{(0, 0)\}, i = 1, \dots, n$, полугруппа P имеет счетный базис, а в случае $S_i = \mathbb{R}_+$ у полугруппы P нет базиса.

Лемма 14. Пусть a и b такие элементы в S_1 , что либо a и b несравнимы, либо $b \prec a$. Тогда, для любого $d \in S_j \setminus \{e\}, j \neq 1$, справедливо $T_d^* T_b^* T_a = 0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $b \prec a$. Пусть $c \in P$ такое слово, $c = c_{i_1} * c_{i_2} * \dots * c_{i_m}$, что $T_b^* T_a e_c \neq 0$. Это равносильно условию: $(b^{-1} \cdot a) * c \in P$. Так как $b^{-1} \cdot a \in S_1$, получим, что первая буква c_{i_1} в слове $(b^{-1} \cdot a) * c$ принадлежит S_1 . Буква d не принадлежит S_1 , поэтому $d^{-1} * b^{-1} \cdot a * c \notin P$, т.е. $T_d^* T_b^* T_a = 0$. $\square$

Отметим, что $T_a^* T_b T_d = (T_d^* T_b^* T_a)^* = 0$.

Обозначим через $I_W, W \in M(P)$, множество тех букв a_i, b_j, c_l , которые участвуют в представлении монома $W = T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_n} (T_{c_1} T_{c_2}^* \dots T_{c_l} T_{c_l}^*) T_{b_1}^* T_{b_2}^* \dots T_{b_r}^*$.

Лемма 15. Пусть $\{W_i\}_1^n$ такое семейство мономов, что для некоторого $d \in S_1 \setminus \{e\}$ каждая буква из I_{W_i} , $i = 1, \dots, n$, либо несовместима с d , либо больше d . Тогда, для любого $r \in S_j$, $j \neq 1$, справедливо $T_r^* T_d^* W_i T_d T_r = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Действительно, полагая $W_i = W$, имеем

$$\begin{aligned} T_r^* T_d^* (T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_n} (T_{c_1} T_{c_2}^* \dots T_{c_l} T_{c_{2l}}^*) T_{b_1}^* T_{b_2}^* \dots T_{b_n}^*) T_d T_r \\ = T_r^* T_d^* T_{a_1} (T_{a_2} \dots T_{a_n} (T_{c_1} T_{c_2}^* \dots T_{c_l} T_{c_{2l}}^*) T_{b_1}^* T_{b_2}^* \dots T_{b_{n-1}}^*) (T_{b_n}^* T_d T_r) = 0, \end{aligned}$$

так как $T_r^* T_d^* T_{a_1} = T_{b_n}^* T_d T_r = 0$. $\square$

Пусть K – алгебра компактных операторов на $l^2(S)$.

Теорема 16. Следующие условия эквивалентны:

- 1) полугруппа P имеет конечный базис;
- 2) K – подалгебра в $C_r^*(P)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть L – конечный базис полугруппы P , $L = (a_1, a_2, \dots, a_m)$. Тогда оператор $J = T_{a_1} T_{a_1}^* + T_{a_2} T_{a_2}^* + \dots + T_{a_m} T_{a_m}^*$ является диагональным относительно базиса $\{e_a\}_{a \in P}$ и обладает следующим свойством: $J e_0 = 0$, $J e_a = k_a e_a$, где $1 \leq k_a \leq m$.

По теореме о функциональном исчислении, C^* -подалгебра алгебры $C_r^*(P)$, порожденная единицей и оператором J , содержит проектор на e_0 .

Так как алгебра $C_r^*(P)$ неприводима на $l^2(P)$ и содержит проектор на e_0 , то $K \subset C_r^*(P)$, см. [14, теорема 2.4.5].

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть $K \subset C_r^*(P)$. Тогда проектор $Q_0 e_0 = e_0$, $Q_0 e_a = 0$, $a \neq e$, так как принадлежит $C_r^*(P)$. Поэтому существует конечная комбинация мономов $\sum_{i=1}^m \alpha_i W_i \in \mathcal{L}(P)$

такая, что $\left\| Q_0 - \sum_{i=1}^m \alpha_i W_i \right\| < \frac{1}{2}$.

Тогда $\left\| \left(Q_0 - \sum_{i=1}^m \alpha_i W_i \right) (e_0) \right\| < \frac{1}{2}$. Следовательно, найдется моном W_{i_0} , $1 \leq i_0 \leq m$, такой, что $W_{i_0}(e_0) = e_0$. Поэтому $W_{i_0} = E$, где E – единица алгебры $C_r^*(P)$ и

$$|I - \alpha_{i_0}| = \left| \left(\left(Q - \sum_{i=1}^m \alpha_i W_i \right) e_0, e_0 \right) \right| < \frac{1}{2}.$$

Допустим, у P нет конечного базиса. Тогда найдутся $a, b \in P$ такие, что $T_a^* T_b^* W_i T_a T_b = 0$, $i \neq i_0$, и

$$\left\| T_a^* T_b^* Q T_a T_b - \sum_{i=1}^m T_a^* T_b^* W_i T_a T_b \right\| = |\alpha_{i_0}| < \frac{1}{2}.$$

Пришли к противоречию. $\square$

Покажем, что других идеалов в $C_r^*(P)$ нет.

Теорема 17. Следующие условия эквивалентны:

- 1) P не имеет конечного базиса;
- 2) $C_r^*(P)$ – простая алгебра.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть $\mathcal{D} \neq 0$, принадлежит идеалу $J \subset C_r^*(P)$ и $(\mathcal{D}e_{\mathbf{c}}, e_{\mathbf{d}}) \neq 0$, для некоторых $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in P$. Полагая

$$A = \frac{1}{(\mathcal{D}'e_0, e_0)} \mathcal{D}',$$

где $\mathcal{D}' = T_{\mathbf{d}}^* \mathcal{D} T_{\mathbf{c}}$, получим $(Ae_0, e_0) = 1$. Пусть $\{W_i\}_1^m$ такое семейство мономов, что

$$\left\| A - \sum_{i=1}^m \alpha_i W_i \right\| < \epsilon < 1, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

Из условия $(Ae_0, e_0) = 1$ следует, что $W_{i_0}e_0 = e_0$, для некоторого i_0 , т. е. $W_{i_0} = E$. Поэтому

$$|1 - \alpha_{i_0}| = \left| \left(\left(A - \sum_{i=1}^m \alpha_i W_i \right) e_0, e_0 \right) \right| < \epsilon.$$

Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P$ такие буквы, что

$$T_{\mathbf{a}}^* T_{\mathbf{b}}^* W_i T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{b}} = 0, \quad i \neq i_0.$$

Тогда

$$\left\| T_{\mathbf{a}}^* T_{\mathbf{b}}^* \left(A - \sum_{i=1}^m \alpha_i W_i \right) T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{b}} \right\| = \| T_{\mathbf{a}}^* T_{\mathbf{b}}^* A T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{b}} - \alpha_{i_0} E \| < \epsilon.$$

Отсюда

$$\left\| \frac{1}{\alpha_{i_0}} (T_{\mathbf{a}}^* T_{\mathbf{b}}^* A T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{b}} - E) \right\| < \frac{\epsilon}{|\alpha_{i_0}|} < \frac{\epsilon}{1 - \epsilon},$$

и $\text{dist}(E, J) < \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}$, для произвольного $\epsilon > 0$, т. е. $E \in J$. Следовательно, $C_r^*(P)$ простая C^* -алгебра.

2) $\Rightarrow$ 1) Тривиально. □

Воспользовавшись теоремами 16 и 17, получим, что если у полугруппы P есть конечный базис, то существует короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\text{id}} C_r^*(P) \xrightarrow{\pi} \mathcal{A} \longrightarrow 0,$$

где id – вложение, а π – фактор-отображение.

Авторы благодарят рецензента за внимательное отношение к работе и ценные замечания.

Список литературы

- [1] L.A. Coburn, *The C^* -algebra generated by an isometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (5), 722–726 (1967).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11845-7>
- [2] R.G. Douglas, *On the C^* -algebra of a one-parameter semigroup of isometries*, Acta Math. **128** (3–4), 143–151 (1972).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02392163>
- [3] G.J. Murphy, *Ordered groups and Toeplitz algebras*, J. Operator Theory **18** (2), 303–326 (1987).
URL: <http://www.jstor.org/stable/24714789>
- [4] A. Nica, *C^* -algebras generated by isometries and Wiener-Hopf operators*, J. Operator Theory **27** (1), 17–52 (1992).
URL: <http://www.jstor.org/stable/24715075>
- [5] J. Cuntz, *Simple C^* -algebra generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (2), 173–185 (1977).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01625776>
- [6] J. Cuntz, *K -theory for certain C^* -algebras*, Ann. Math. **113** (1), 181–197 (1981).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1971137>
- [7] G.J. Murphy, *Crossed products of C^* -algebras by endomorphisms*, Integral Equations and Operator Theory **24** (3), 298–319 (1996).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01204603>
- [8] Е.В. Липачева, *О представлении полугрупповой C^* -алгебры в виде скрещенного произведения*, Изв. вузов. Матем. (8), 87–92 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-8-87-92>
- [9] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, Т. 1, Мир, М., 1972.
- [10] С.А. Григорян, Р.Н. Гумеров, Е.В. Липачева, *Пределы индуктивных последовательностей алгебр Теплица–Кунца*, Труды МИАН **313**, 67–77 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.4213/tm4170>
- [11] R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, *Automorphisms of the limits for the direct sequences of the Toeplitz–Cuntz algebras*, J. Math. Anal. Appl. **533** (2), art. 127991 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127991>
- [12] С.А. Григорян, А.Ш. Шарафутдинов, *Градуировка полугрупповой C^* -алгебры по локальной группе*, Изв. вузов. Матем. (7), 85–90 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-7-85-90>

- [13] M. Laca, I. Raeburn, *Semigroup crossed products and the Toeplitz algebras of nonabelian groups*, J. Funct. Anal. **139** (2), 415–440 (1996).
DOI: <https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0091>
- [14] Дж. Мерфи, *C^* -алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997.

Сурен Аршакович Григорян

Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
e-mail: gsuren@inbox.ru

Тамара Анатольевна Григорян

Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
e-mail: tkhorkova@gmail.com

Semigroup C^* -algebras generated by a free product of abelian semigroups

S.A. Grigoryan, T.A. Grigoryan

Abstract. The article deals with semigroup C^* -algebras generated by regular representations of free products of abelian semigroups. A criterion of the simplicity of this algebras is obtained, characters, grading and a number of other properties are described.

Keywords: free group, free semigroup, C^* -algebra, spectrum, ideal.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.29-45

References

- [1] L.A. Coburn, *The C^* -algebra generated by an isometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (5), 722–726 (1967).
DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11845-7>
- [2] R.G. Douglas, *On the C^* -algebra of a one-parameter semigroup of isometries*, Acta Math. **128** (3–4), 143–151 (1972).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02392163>
- [3] G.J. Murphy, *Ordered groups and Toeplitz algebras*, J. Operator Theory **18** (2), 303–326 (1987).
URL: <http://www.jstor.org/stable/24714789>
- [4] A. Nica, *C^* -algebras generated by isometries and Wiener-Hopf operators*, J. Operator Theory **27** (1), 17–52 (1992).
URL: <http://www.jstor.org/stable/24715075>
- [5] J. Cuntz, *Simple C^* -algebra generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (2), 173–185 (1977).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01625776>
- [6] J. Cuntz, *K -theory for certain C^* -algebras*, Ann. Math. **113** (1), 181–197 (1981).
DOI: <https://doi.org/10.2307/1971137>
- [7] G.J. Murphy, *Crossed products of C^* -algebras by endomorphisms*, Integral Equations and Operator Theory **24** (3), 298–319 (1996).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01204603>

- [8] E.V. Lipacheva, *On the representation of semigroup C^* -algebra as a crossed product*, Russian Math. (Iz. VUZ) **66** (8), 71–75 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X22080059>
- [9] A.H. Clifford, G.B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*. V. I. Math. Surveys Monogr. **7**, AMS, Providence, 1961.
- [10] S.A. Grigoryan, R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, *Limits of inductive sequences of Toeplitz–Cuntz algebras*, Proc. Steklov Inst. Math. **313**, 60–69 (2021).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543821020073>
- [11] R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva, *Automorphisms of the limits for the direct sequences of the Toeplitz–Cuntz algebras*, J. Math. Anal. Appl. **533** (2), art. 127991 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127991>
- [12] S.A. Grigoryan, A.Sh. Sharafutdinov, *Grading of a semigroup C^* -algebra by a local group*, Russian Math. (Iz. VUZ) **67** (7), 72–76 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X23070022>
- [13] M. Laca, I. Raeburn, *Semigroup crossed products and the Toeplitz algebras of nonabelian groups*, J. Funct. Anal. **139** (2), 415–440 (1996).
DOI: <https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0091>
- [14] G.J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, Boston, 1990.

Suren Arshakovich Grigoryan

Kazan State Power-Engineering University,
51 Krasnoselskaya str., Kazan 420066, Russia,
E-mail: gsuren@inbox.ru

Tamara Anatolievna Grigoryan

Kazan State Power-Engineering University,
51 Krasnoselskaya str., Kazan 420066, Russia,
E-mail: tkhorkova@gmail.com

Топология для дискретной математики

Ю.Л. Ершов

Аннотация. Представлен ряд результатов, касающихся проблемы существования и единственности продолжений непрерывных отображений топологических пространств.

Ключевые слова: T_0 -пространство, непрерывное отображение, собрификация, u -расширение.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.46-52

Введение

Данная работа является расширенной версией доклада автора на церемонии вручения премии Лобачевского (Казанский (Приволжский) федеральный университет, декабрь 2023 года). Здесь обсуждается ряд понятий и результатов, связанных с вопросом существования и единственности продолжений непрерывных отображений топологических пространств. Все приведенные здесь понятия и результаты (вместе с их доказательствами) можно найти в монографии автора “Топология для дискретной математики” [1], изданной Сибирским отделением Российской академии наук в 2020 году.

Монографии [2–4], посвященные близким вопросам, были изданы на английском языке. Стоит отметить выпуск журнала *Annals of Pure and Applied Logic* [5], который также содержит близкие по тематике результаты. На русском языке общая теория T_0 -пространств систематическим образом изложена впервые в указанной выше монографии [1].

Топологией на множестве X называется семейство множеств $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ такое, что

- 1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
- 2) если $U_0, U_1 \in \mathcal{T}$, то $U_0 \cap U_1 \in \mathcal{T}$;
- 3) если $V_i \in \mathcal{T}$ для любого $i \in I$, то $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}$.

В этом случае $\mathbb{X} = \langle X, \mathcal{T} \rangle$ называется *топологическим пространством*. Полагаем при этом $\mathcal{T}(\mathbb{X}) = \mathcal{T}$.

Очевидно, что топология $\mathcal{T}(\mathbb{X})$ образует полную решетку относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$, где для произвольного семейства открытых множеств

Благодарности. Работа выполнена в рамках госзадания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2022-0012.

© 2024 Ю.Л. Ершов

Поступила: 11.06.2024. Принята: 10.08.2024. Опубликовано: 17.10.2024.

$V_i \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$, $i \in I$, справедливо:

$$\bigwedge_{i \in I} V_i = \text{int} \bigcap_{i \in I} V_i, \quad \bigvee_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} V_i.$$

Топологическое пространство $\mathbb{X}$ называется T_0 -отделимым или просто T_0 -пространством, если оно удовлетворяет следующей аксиоме T_0 -отделимости:

для любых различных $x_0, x_1 \in X$ существует $U \in \mathcal{T}$ такое, что $x_i \in U$ и $x_{1-i} \notin U$ для некоторого $i < 2$.

Далее мы будем рассматривать только T_0 -пространства.

1. Проблема существования и единственности продолжений

Вопрос 1. Рассмотрим произвольные топологические пространства $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$. Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$, а отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ непрерывно. Существует ли непрерывное отображение $f': \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ такое, что $f'|_{\mathbb{X}} = f$? Когда такое отображение f' единственно?

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Y} \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

Топологическое пространство $\mathbb{Z}$ такое, что для любого расширения $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ и любого непрерывного отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ существует его непрерывное продолжение $f': \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$, называется *инъективным*. Если потребовать существование продолжений только для таких расширений $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$, для которых пространство $\mathbb{X}$ плотно в $\mathbb{Y}$ (т.е. $Y = \text{cl}_{\mathbb{Y}} X$), то мы получим определение *ограниченно инъективного* пространства.

Описание таких пространств представлено в теоремах 11–12 ниже. Кроме того, теорема 4 ниже связана с вопросом единственности продолжений, а теорема 7 ниже – с существованием продолжений для расширений специального вида (так называемых *и-расширений*).

Для произвольного непрерывного отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ рассмотрим отображение

$$f: \mathcal{T}(\mathbb{Y}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{X}), \quad f^*: U \mapsto f^{-1}(U).$$

Непосредственно можно проверить, что f^* является гомоморфизмом $(0, 1)$ -решеток, который сохраняет произвольные объединения.

Вопрос 2. Когда для гомоморфизма $(0, 1)$ -решеток $g: \mathcal{T}(\mathbb{Y}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{X})$, сохраняющего произвольные объединения, имеет место равенство $g = f^*$ для подходящего непрерывного отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$?

Частичный ответ на этот вопрос дает теорема 5 ниже.

2. α -пространства

Для топологического пространства $\mathbb{X}$ рассмотрим следующие понятия.

- *Отношение специализации* $\leq$. Для произвольных $x, y \in X$ полагаем $x \leq y$, если для любого открытого множества $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ включение $x \in U$ влечет включение $y \in U$.
- Для произвольного $x \in X$ полагаем

$$\downarrow x = \{y \in X \mid y \leq x\}, \quad \uparrow x = \{y \in X \mid x \leq y\}.$$

- *Отношение аппроксимации* $\prec$. Для произвольных $x, y \in X$ полагаем $x \prec y$, если $y \in \text{int } \uparrow x$.

Нетрудно проверить, что $\mathbb{X}$ является T_0 -пространством тогда и только тогда, когда отношение специализации $\leq$ является частичным порядком на $\mathbb{X}$.

Топологическое пространство $\mathbb{X}$ называется α -пространством, если для любых $x \in X$ и $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ включение $x \in U$ влечет существование такого $y \in U$, что $y \prec x$.

Следующая теорема характеризует α -пространства в терминах их решеток открытых множеств.

Теорема 3 (о характеристике α -пространств). *Топологическое пространство $\mathbb{X}$ является α -пространством тогда и только тогда, когда полная решетка $\mathcal{T}(\mathbb{X})$ является вполне дистрибутивной, т. е. для произвольных семейств открытых множеств $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{T}(\mathbb{X})$, $i \in I$, имеет место равенство*

$$\text{int}\left(\bigcap_{i \in I} \bigcup \mathcal{W}_i\right) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \text{int}\left(\bigcap_{i \in I} f(i)\right),$$

где $\mathcal{F} = \prod_{i \in I} \mathcal{W}_i$.

3. Сопредельные точки и u -расширения

Рассмотрим расширение топологических пространств $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$. Точка $y \in Y$ называется *сопредельной* для $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, если для любого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ из включения $y \in U$ следует, что $\downarrow y \cap U \cap X \neq \emptyset$.

Пусть $\text{sob}_{\mathbb{Y}} \mathbb{X}$ обозначает множество всех сопредельных точек для $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$. Следующее понятие связано с вопросом единственности продолжений, см. вопрос 1.

Расширение $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ называется *u -расширением*, если для любых непрерывных отображений $f, g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ равенство $f|_{\mathbb{X}} = g|_{\mathbb{X}}$ влечет равенство $f = g$.

Теорема 4 (о характеристике u -расширений). *Для расширения $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ следующие условия равносильны.*

- (i) Расширение $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является u -расширением.
- (ii) Для любого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ существует единственное $V \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ такое, что $U = V \cap X$.
- (iii) Справедливо равенство $Y = \text{sob}_{\mathbb{Y}} X$.

4. Собранные пространства и собрификации

Подмножество A пространства $\mathbb{X}$ называется *неприводимым*, если для произвольных замкнутых подмножеств F_0, F_1 в $\mathbb{X}$ включение $A \subseteq F_0 \cup F_1$ влечет включение $A \subseteq F_i$ для некоторого $i < 2$.

Очевидно, что множество $\downarrow x$ замкнуто и неприводимо в $\mathbb{X}$ для любого $x \in X$.

Топологическое пространство $\mathbb{X}$ называется *собранным*, если семейство $\{\downarrow x \mid x \in X\}$ исчерпывает семейство всех непустых замкнутых неприводимых подмножеств в $\mathbb{X}$.

Следующая теорема дает частичный ответ на вопрос 2.

Теорема 5. Если пространство $\mathbb{Y}$ является собранным, то для любого гомоморфизма $(0, 1)$ -решеток $g: \mathcal{T}(\mathbb{Y}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{X})$, сохраняющего произвольные объединения, существует непрерывное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ такое, что $g = f^*$.

В качестве следствия теоремы 5 получаем такой результат.

Теорема 6. Если пространства $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ являются собранными, а их решетки топологий $\mathcal{T}(\mathbb{X})$ и $\mathcal{T}(\mathbb{Y})$ изоморфны, то пространства $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ гомеоморфны.

Следующая теорема связана с вопросом существования и единственности продолжений, см. вопрос 1.

Теорема 7 (о характеристизации собранных пространств). Для топологического пространства $\mathbb{X}$ следующие условия равносильны.

- (i) Пространство $\mathbb{X}$ является собранным.
- (ii) Для любого расширения $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ справедливо $X = \text{sob}_{\mathbb{Y}} X$.
- (iii) Пространство $\mathbb{X}$ не имеет собственных u -расширений.
- (iv) Для любого u -расширения $\mathbb{Y}_0 \leq \mathbb{Y}$ и любого непрерывного отображения $f_0: \mathbb{Y}_0 \rightarrow \mathbb{X}$ существует [единственное] непрерывное отображение $f: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ такое, что $f|_{\mathbb{Y}_0} = f_0$.

Собранное пространство $\mathbb{Y}$ называется *собрификацией* пространства $\mathbb{X}$, если существует гомеоморфное вложение $\lambda: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ такое, что $Y = \text{sob}_{\mathbb{Y}} \lambda(X)$.

Теорема 8. Собрификация любого T_0 -пространства единственна с точностью до гомеоморфизма.

Следующая теорема характеризует собрификации T_0 -пространств.

Теорема 9 (о характеристизации собрификаций). Для расширения $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ следующие условия равносильны.

- (i) $\mathbb{Y}$ является собриффикацией пространства $\mathbb{X}$.
- (ii) $\mathbb{Y}$ является наибольшим u -расширением $\mathbb{X}$.
- (iii) $\mathbb{Y}$ является наименьшим собранным расширением $\mathbb{X}$.

Теорема 10. Если $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является u -расширением, то собриффикации пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ гомеоморфны.

5. Инъективные пространства

Напомним, что топологическое пространство $\mathbb{Z}$ называется (ограниченно) *инъективным*, если для любого расширения пространств $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ (такого что $\mathbb{X}$ плотно в $\mathbb{Y}$) и любого непрерывного отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ существует непрерывное отображение $f': \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ такое, что $f'|_{\mathbb{X}} = f$.

Следующие две теоремы характеризуют (ограниченно) инъективные пространства, см. вопрос 1.

Теорема 11 (о характеристике инъективных пространств). *Топологическое пространство $\mathbb{X}$ является инъективным, если и только если выполнены следующие условия:*

- (i) ч. у. множество $\langle X; \leq \rangle$ является полной решеткой;
- (ii) $\mathbb{X}$ является α -пространством (равносильно, полная решетка $\mathcal{T}(\mathbb{X})$ вполне дистрибутивна);
- (iii) $\mathbb{X}$ является собранным пространством.

Теорема 12 (о характеристике ограниченно инъективных пространств). *Топологическое пространство $\mathbb{X}$ является ограниченно инъективным, если и только если выполнены следующие условия:*

- (i) ч. у. множество $\langle X; \leq \rangle$ является bc -полным (т. е. любое ограниченное подмножество в $\langle X; \leq \rangle$ имеет точную верхнюю грань);
- (ii) $\mathbb{X}$ является α -пространством (равносильно, полная решетка $\mathcal{T}(\mathbb{X})$ вполне дистрибутивна);
- (iii) $\mathbb{X}$ является собранным пространством.

Список литературы

- [1] Ю.Л. Ершов, *Топология для дискретной математики*, Сибирское отделение РАН, Новосибирск, 2020.
- [2] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *A compendium of continuous lattices*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1980.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-67678-9>

-
- [3] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *Continuous lattices and domains*, Encyclopedia Math. Appl. **93**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511542725>
- [4] J. Goubault-Larrecq, *Non-Hausdorff topology and domain theory: selected topics in point-set topology*, New Math. Monogr. **22**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139524438>
- [5] *Joint workshop domains VIII – Computability over continuous data types, Novosibirsk, September 11–15, 2007*, Ann. Pure Appl. Logic **159** (3), 249–356 (2009).
URL: <https://www.sciencedirect.com/journal/annals-of-pure-and-applied-logic/vol/159/issue/3>

Юрий Леонидович Ершов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: ershov@math.nsc.ru

Topology for discrete mathematics

Yu.L. Ershov

Abstract. A series of results is presented on the problem of the existence and the uniqueness of extensions of continuous mappings on topological spaces.

Keywords: T_0 -space, continuous mapping, sobrification, u -extension.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.46-52

References

- [1] Yu.L. Ershov, *Topology for discrete mathematics*, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, 2020 [in Russian].
- [2] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *A compendium of continuous lattices*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1980.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-67678-9>
- [3] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W. Mislove, D.S. Scott, *Continuous lattices and domains*, Encyclopedia Math. Appl. **93**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511542725>
- [4] J. Goubault-Larrecq, *Non-Hausdorff topology and domain theory: selected topics in point-set topology*, New Math. Monogr. **22**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139524438>
- [5] *Joint workshop domains VIII – Computability over continuous data types, Novosibirsk, September 11–15, 2007*, Ann. Pure Appl. Logic **159** (3), 249–356 (2009).
URL: <https://www.sciencedirect.com/journal/annals-of-pure-and-applied-logic/vol/159/issue/3>

Yuri Leonidovich Ershov

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4 Acad. Koptug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: ershov@math.nsc.ru

Acknowledgements. This research was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics, project FWNF–2022–0012.

Received: 11 June 2024. Accepted: 10 August 2024. Published: 17 October 2024.

Квазимногообразие $\mathbf{SP}(M_3)$: базис тождеств

А.Е. Изъюрова, М.В. Швидефски

Аннотация. Мы показываем, что квазимногообразие $(0, 1)$ -решеток, порожденное диамантом M_3 , является многообразием и находим базис тождеств этого многообразия.

Ключевые слова: решетка, базис тождеств, многообразие, диамант.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.53-62

Введение

Настоящая статья является первой в серии работ, посвященных квазимногообразию $\mathbf{SP}(M_3)$ $(0, 1)$ -решеток, порожденному диамантом M_3 . Здесь мы показываем, что это квазимногообразие является многообразием и находим его базис квазитожеств, см. следствие 9. Отметим, что базис тождеств для многообразия $\mathbf{V}(M_3)$, порожденного M_3 , был найден ранее М. Шютценбергером [1], см. также работу С.Д. Комера и Д.С. Хонга [2]. Наш базис тождеств отличается от базиса тождеств, найденного в [2]. С использованием найденного нами базиса тождеств для $\mathbf{V}(M_3) = \mathbf{SP}(M_3)$ мы доказываем в последующих работах теоремы дуальности для решеток, принадлежащих $\mathbf{SP}(M_3)$. Отметим, что теоремы дуальности были установлены недавно для многообразия, порожденного пентагоном N_5 , в работах [3, 4], для многообразия, порожденного решеткой L_6 , в работе [5, 6], а также для многообразий, порожденных решетками подпорядков частичных порядков высоты не более 2, в работах [7, 8]. Все эти дуальности являются расширениями дуальности Биркгофа для дистрибутивных решеток.

За всеми понятиями и обозначениями, не определенными здесь, мы отсылаем читателя к [3, 9, 10].

1. Определения и обозначения

Для элемента a решетки L пусть $\mathfrak{M}(a)$ обозначает множество всех конечных минимальных нетривиальных покрытий a . Мы также полагаем $\downarrow a = \{x \in L \mid x \leq a\}$.

Пусть $J(L)$ обозначает множество всех $\vee$ -неразложимых элементов решетки L . Говорим, что L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$, если выполнены следующие два условия:

Благодарности. Работа была поддержана Российским научным фондом, проект 24-21-00075, <https://rscf.ru/project/24-21-00075/>.

- (i) для каждого элемента $a \in L$ найдется множество $J_a \subseteq J$ такое, что $a = \bigvee J_a$;
- (ii) для каждого элемента $a \in J$ и любого нетривиального покрытия $a \leq \bigvee F$, где множество F конечно, существует $G \in \mathfrak{M}(a)$, такое что $G \ll F$.

Пусть L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть $S \subseteq J$. Полагаем:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_0 &= S; \\ \langle S \rangle_{n+1} &= \bigcup_{a \in \langle S \rangle_n} \{X \subseteq J \mid X \in \mathfrak{M}(a)\} \cup \langle S \rangle_n \quad \text{для всех } n < \omega; \\ \langle S \rangle &= \bigcup_{n < \omega} \langle S \rangle_n. \end{aligned}$$

Множество $S \subseteq J$ называется *замкнутым*, если $S = \langle S \rangle$.

Для множества $S \subseteq J(L)$ пусть Γ_S обозначает бинарное отношение на L , определенное следующим образом:

$$(u, v) \in \Gamma_S, \quad \text{если и только если} \quad \downarrow u \cap S = \downarrow v \cap S.$$

Следующее утверждение было установлено М.Е. Адамсом и В. Джебяком; его также можно найти в [3, 4].

Предложение 1. Пусть L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть $S \subseteq J$ является замкнутым множеством. Тогда отношение Γ_S является конгруэнцией на L .

2. Три тождества

Рассмотрим следующие три тождества. Первое тождество — это тождество *2-дистрибутивности*, введенное А. Хуном [11], которое мы обозначаем через (D_2) :

$$x \wedge (y_0 \vee y_1 \vee y_2) = [x \wedge (y_0 \vee y_1)] \vee [x \wedge (y_0 \vee y_2)] \vee [x \wedge (y_1 \vee y_2)].$$

Второе тождество мы обозначаем через (C_1) ; оно было введено в работе [3]. Это тождество является частным случаем тождества (C_n) , $0 < n < \omega$, введенного в работе [7]:

$$\begin{aligned} x \wedge (y_0 \vee y_1) \wedge (z_0 \vee z_1) &= \bigvee_{i < 2} (x \wedge y_i \wedge (z_0 \vee z_1)) \vee \bigvee_{i < 2} (x \wedge z_i \wedge (y_0 \vee y_1)) \\ &\vee \bigvee_{i < 2} [x \wedge ((y_0 \wedge z_i) \vee (y_1 \wedge z_{1-i}))]. \end{aligned}$$

Третье тождество — это тождество *модулярности* (M) :

$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge ((y \wedge (x \vee z)) \vee z).$$

Мы полагаем $\Sigma = \{(C_1), (D_2), (M)\}$. Следующее хорошо известное утверждение может быть найдено, например, в работах [3, 10]. В настоящем виде оно сформулировано в работе [5].

Лемма 2 ([5, следствие 2]). Пусть L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$. Следующие условия равносильны.

- (i) Тожество (D_2) истинно на L .
- (ii) Если $a \leq b_0 \vee \dots \vee b_m$ является минимальным нетривиальным покрытием для некоторых элементов $a, b_0, \dots, b_m \in J$, то $m = 1$.

Лемма 3 ([5, следствие 2]). Пусть L является 2-дистрибутивной J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$. Следующие условия равносильны.

- (i) Тожество (C_1) истинно на L .
- (ii) Каждый элемент $a \in J$ имеет не более одного минимального нетривиального покрытия.

Предложение 4. Пусть L — решетка и пусть множество $J \subseteq J(L)$ таково, что каждый элемент решетки L является объединением некоторого множества элементов из J . Следующие условия равносильны.

- (i) Если $a \leq b \vee c$ для некоторых $a \in J$, то $a \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$.
- (ii) Тожество (M) истинно на L .

Доказательство. Покажем, что (i) влечет (ii). Ясно, что $a \wedge [(b \wedge (a \vee c)) \vee c] \leq a \wedge (b \vee c)$ для всех $a, b, c \in L$. Для проверки обратного неравенства достаточно установить, что $u \leq a \wedge [(b \wedge (a \vee c)) \vee c]$, как только $u \in J$ и $u \leq a \wedge (b \vee c)$. Действительно, если элемент $u \in J$ таков, что $u \leq a \wedge (b \vee c)$, то $u \leq a$ и $u \leq b \vee c$. Применяя утверждение (i) к последнему неравенству и принимая во внимание, что $u \leq a$, мы получаем, что $u \leq (b \wedge (u \vee c)) \vee c \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$. Следовательно, $u \leq a \wedge [(b \wedge (a \vee c)) \vee c]$, поэтому условие (ii) выполнено.

Обратно, если выполнено условие (ii) и $a \leq b \vee c$ для некоторых $a, b, c \in L$, то $a = a \wedge (b \vee c) = a \wedge [(b \wedge (a \vee c)) \vee c] \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$ в силу тождества модулярности. Таким образом, (ii) влечет (i). $\square$

Предложение 5. Пусть L является 2-дистрибутивной J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$. Следующие условия равносильны.

- (i) Если $a \leq b \vee c$ является минимальным нетривиальным покрытием для некоторых элементов $a, b, c \in J$, то $b \leq a \vee c$.
- (ii) (M) истинно на L .

Доказательство. Предположим, что условие (i) выполнено, и покажем, что утверждение (i) предложения 4 также выполняется. Действительно, пусть $a \leq b \vee c$ для некоторого элемента $a \in J$ и некоторых элементов $b, c \in L$. Если $a \leq b$, то $a \leq b \wedge (a \vee c) \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$. Если $a \leq c$, то $a \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$. Если же покрытие $a \leq b$ нетривиально, то существует

конечное множество $F \subseteq J$, такое что $F \ll \{b, c\}$ и $F \in \mathfrak{M}(a)$. По лемме 2 $F = \{d, e\}$ для некоторых $d, e \in J$. Без ограничения общности можем полагать, что $d \leq b$ и $e \leq c$. Применяя (i), получаем, что $d \leq a \vee e \leq a \vee c$, поэтому $a \leq d \vee e = (d \wedge (a \vee c)) \vee e \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$. Таким образом, утверждение (i) предложения 4 выполнено. Следовательно, тождество (M) истинно на L по предложению 4, и (i) влечет (ii).

Докажем, что (ii) влечет (i). Действительно, если тождество (M) истинно на L , а $a \leq b \vee c$ является минимальным нетривиальным покрытием для некоторых элементов $a, b, c \in J$, то $a \leq (b \wedge (a \vee c)) \vee c$ по утверждению (i) предложения 4. Так как $b' = b \wedge (a \vee c) \leq b$, делаем вывод, что $\{b', c\} \ll \{b, c\}$. В силу минимальности покрытия $\{b, c\}$ получаем, что $b \in \{b, c\} \subseteq \{b', c\}$, поэтому $b = b' \leq a \vee c$. $\square$

Предложение 6. Пусть L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть $L \models \Sigma$. Если $\{b, c\} \in \mathfrak{M}(a)$ для некоторых $a, b, c \in J$, то $\{\{a, c\}\} = \mathfrak{M}(b)$.

Доказательство. Так как $L \models (M)$, получаем по предложению 5 (i), что $b \leq a \vee c$. Покажем сначала, что это покрытие нетривиально. Действительно, если $b \leq c$, то $a \leq b \vee c = c$, что противоречит нашему предположению о том, что $\{b, c\} \in \mathfrak{M}(a)$. Далее, по предложению 5 (i) имеем неравенство $c \leq a \vee b$. Таким образом, если $b \leq a$, то $c \leq a \vee b = a$, и поэтому $b \vee c \leq a \leq b \vee c$ и $a = b \vee c$. Поскольку элемент a $\vee$ -неразложим, заключаем, что $a \in \{b, c\}$, что также противоречит нашему предположению о том, что $\{b, c\} \in \mathfrak{M}(a)$. Следовательно, мы установили, что покрытие $b \leq a \vee c$ нетривиально.

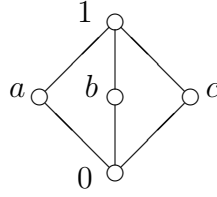
Так как L является 2-дистрибутивной J -решеткой, $b \leq a' \vee c'$ является минимальным нетривиальным покрытием для некоторых элементов $a' \leq a$ и $c' \leq c$ по лемме 2. Покажем, что $a' = a$ и $c' = c$. Действительно, имеем $b \leq a' \vee c' \leq a' \vee c$. Следовательно, $a \leq b \vee c \leq a' \vee c \vee c = a' \vee c$. Если $a \leq a' \vee c$ является нетривиальным покрытием, то $\{b, c\} \ll \{a', c\}$, поскольку покрытие $\{b, c\}$ является единственным минимальным нетривиальным покрытием элемента a по лемме 3, а L является J -решеткой. Таким образом, $b \leq a'$, что невозможно, так как покрытие $b \leq a' \vee c'$ минимально. Это противоречие означает, что покрытие $a \leq a' \vee c$ тривиально. Неравенство $a \leq c$ противоречило бы нашему предположению о том, что $\{b, c\} \in \mathfrak{M}(a)$. Следовательно, $a \leq a'$, поэтому $a = a'$.

Таким образом, покрытие $b \leq a \vee c'$ минимально. По предложению 5 (i) имеем $a \leq b \vee c'$. Так как $c' \leq c$, получаем, что $\{b, c'\} \ll \{b, c\}$. Поскольку $\{b, c\} \in \mathfrak{M}(a)$, это дает включение $c \in \{b, c\} \subseteq \{b, c'\}$, т.е. $c = c'$. Поэтому покрытие $b \leq a \vee c$ является минимальным; к тому же оно единственно по лемме 3. $\square$

Следствие 7. Решетка M_3 удовлетворяет всем тождествам из Σ .

Доказательство. Минимальными нетривиальными покрытиями в решетке M_3 являются в точности следующие покрытия (см. рис. 1):

$$a \leq b \vee c, \quad b \leq a \vee c, \quad c \leq a \vee b.$$

Рис. 1. Решетка M_3

Следовательно, решетка M_3 удовлетворяет условию (ii) леммы 2. По лемме 2 решетка M_3 2-дистрибутивна. Более того, M_3 удовлетворяет также условию (ii) леммы 3 и условию (ii) предложения 5. Таким образом, M_3 удовлетворяет тождествам (C_1) и (M) по лемме 3 и предложению 5 соответственно. $\square$

3. Основной результат

Предложение 8. Пусть L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть $L \models \Sigma$. Тогда $L \in \mathbf{SP}(M_3)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $a \in J$. Если a является простым элементом, то множество $S = \{a\}$, очевидно, замкнуто. Если элемент a не прост, то по определению J -решетки и лемме 2 существуют $b, c \in J$ такие, что покрытие $a \leq b \vee c$ минимально. В этом случае, принимая во внимание лемму 3 и предложение 6, а также тот факт, что L является J -решеткой, получаем, что множество $S = \{a, b, c\}$ замкнуто. Таким образом, множество J является раздельным объединением замкнутых множеств S_i , $i \in I$ таких, что для каждого $i \in I$ множество S_i либо одноэлементно, либо $S_i = \{a, b, c\}$, причем $a \leq b \vee c$, $b \leq a \vee c$, $c \leq a \vee b$ являются минимальными нетривиальными покрытиями.

Для каждого замкнутого множества $S \subseteq J$ пусть L_S обозначает для краткости фактор-решетку L/Γ_S и пусть

$$\tau_S: L \rightarrow L_S; \quad \tau_S: x \mapsto x/\Gamma_S$$

является каноническим гомоморфизмом.

Утверждение 1. Если множество $S = \langle S \rangle \subseteq J$ одноэлементно, то L_S является двухэлементной решеткой.

Доказательство утверждения. Пусть $S = \{a\}$ для некоторого $a \in J$. Так как элемент a $\vee$ -неразложим, то a не является наименьшим элементом в L . Поэтому существует $a' \in L$ такой, что $a' < a$. Для элемента $u \in L$ возможны следующие два случая.

Случай 1: $\downarrow u \cap S = \emptyset$. В этом случае $\downarrow u \cap S = \downarrow a' \cap S$, поскольку $a \not\leq a'$. Следовательно, $\tau_S(u) = u/\Gamma_S = a'/\Gamma_S = \tau_S(a')$.

Случай 2: $\downarrow u \cap S = \{a\}$. В этом случае $\downarrow u \cap S = \downarrow a \cap S$. Таким образом, $\tau_S(u) = u/\Gamma_S = a/\Gamma_S = \tau_S(a)$.

Следовательно, $L_S = \{\tau_S(a'), \tau_S(a)\}$ действительно является двухэлементной решеткой. $\square$

Утверждение 2. Если $S = \{a, b, c\} = \langle S \rangle \subseteq J$, то $L_S \cong M_3$.

Доказательство утверждения. Так как множество $S = \{a, b, c\}$ замкнуто, неравенства $a \leq b \vee c$, $b \leq a \vee c$ и $c \leq a \vee b$ являются минимальными нетривиальными покрытиями. В частности, множество S является антицепью. Полагаем $o = a \wedge b \wedge c$ и $i = a \vee b \vee c$; тогда $o < a, b, c < i$ в L . Принимая во внимания три минимальных нетривиальных покрытия, приведенных выше, следующие случаи возможны для элемента $u \in L$.

Случай 1: $\downarrow u \cap S = \emptyset$. В этом случае $\downarrow u \cap S = \downarrow o \cap S$, так как $o < a, b, c$. Следовательно, $\tau_S(u) = u/\Gamma_S = o/\Gamma_S = \tau_S(o)$.

Случай 2: $\downarrow u \cap S$ является одноэлементным множеством. Тогда $\downarrow u \cap S = \{d\}$ для некоторого элемента $d \in \{a, b, c\}$. В этом случае $\downarrow u \cap S = \downarrow d \cap S$ и $\tau_S(u) = u/\Gamma_S = d/\Gamma_S = \tau_S(d)$.

Случай 3: $\downarrow u \cap S = \{a, b, c\}$. В этом случае $\downarrow u \cap S = \downarrow i \cap S$, поскольку $a, b, c < i$ и $\tau_S(u) = u/\Gamma_S = i/\Gamma_S = \tau_S(i)$.

Таким образом, заключаем, что $L_S = \{\tau_S(o), \tau_S(a), \tau_S(b), \tau_S(c), \tau_S(i)\} \cong M_3$, поскольку множество $\{\tau_S(a), \tau_S(b), \tau_S(c)\}$ образует антицепь. $\square$

Утверждение 3. Отображение

$$\tau: L \rightarrow \prod_{S=\langle S \rangle \subseteq J} L_S; \quad \tau: x \mapsto (\tau_S(x) \mid S = \langle S \rangle \subseteq J)$$

является изоморфным вложением.

Доказательство утверждения. Ясно, что отображение τ является гомоморфизмом. Покажем, что τ взаимно однозначно. Действительно, пусть $a \not\leq b$ в L . Так как a является точной верхней гранью некоторого множества элементов из J , существует $x \in J$ такой, что $x \leq a$ и $x \not\leq b$. Таким образом, $x \in \downarrow a \cap \langle x \rangle \setminus \downarrow b \cap \langle x \rangle$ и $\tau_{\langle x \rangle}(a) = a/\Gamma_{\langle x \rangle} \not\leq b/\Gamma_{\langle x \rangle} = \tau_{\langle x \rangle}(b)$, поэтому $\tau(a) \not\leq \tau(b)$. $\square$

Требуемое утверждение вытекает из утверждений 1–3. Доказательство предложения 8 завершено. $\square$

Следствие 9. Квазимногообразие $(0, 1)$ -решеток $\mathbf{SP}(M_3)$ является многообразием, а Σ образует базис тождеств этого многообразия.

Доказательство. Так как $M_3 \models \Sigma$ по следствию 7, получаем, что $\mathbf{SP}(M_3) \models \Sigma$. Обратно, пусть $L \models \Sigma$; покажем, что $L \in \mathbf{SP}(M_3)$. Действительно, если M обозначает решетку, двойственную решетке фильтров решетки L , то $M \models \Sigma$. В частности, решетка M 2-дистрибутивна. В силу [10, теоремы 3.1–3.2] M является $J(M)$ -решеткой. По предложению 8 имеем $M \in \mathbf{SP}(M_3)$. Поскольку L изоморфна $(0, 1)$ -подрешетке решетки M , заключаем, что $L \in \mathbf{SP}(M_3)$. $\square$

Список литературы

- [1] M. Schützenberger, *Sur certains axiomes de la théorie des structures*, C. R. Acad. Sci. Paris **221**, 218–220 (1945).
- [2] S.D. Comer, D.X. Hong, *Some remarks concerning the varieties generated by the diamond and the pentagon*, Trans. Amer. Math. Soc. **174**, 45–54 (1972).
- [3] W. Dziobiak, M.V. Schwidefsky, *Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract*, Bull. Sec. Logic **51** (3), 329–344 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.18778/0138-0680.2022.14>
- [4] W. Dziobiak, M.V. Schwidefsky, *Duality for bi-algebraic lattices belonging to the variety of $(0, 1)$ -lattices generated by the pentagon*, Algebra and Logic (принята к печати).
- [5] A.O. Basheyeva, M.V. Schwidefsky, K.D. Sultankulov, *The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. I. An equational basis*, Сиб. электрон. матем. изв. **19** (2), 902–911 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.076>
- [6] А.О. Башеева, М.В. Швидефски, *Квазимногообразие $\mathbf{SP}(L_6)$. II. Результат о дуальности*, Сиб. матем. журн. **65** (3), 446–454 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446624030029>
- [7] O.A. Kadyrova, M.V. Schwidefsky, *Quasivarieties generated by small suborder lattices. I. Equational bases*, Сиб. электрон. матем. изв. **20** (1), 62–71 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.006>
- [8] O.A. Kadyrova, M.V. Schwidefsky, *Quasivarieties generated by small suborder lattices. II. A duality theorem* (препринт).
- [9] R. Freese, J. Ježek, and J.B. Nation, *Free lattices*, Math. Surveys Monogr. **42**, AMS, Providence, New York, 1995.
- [10] J.B. Nation, *An approach to lattice varieties of finite height*, Algebra Universalis **27** (4), 521–543 (1990).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01188998>
- [11] A.P. Huhn, *Schwach distributive Verbände I*, Acta Sci. Math. (Szeged) **33** (3–4), 297–305 (1972).

Александра Евгеньевна Изьюрова

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: a.izyurova@g.nsu.ru

Марина Владимировна Швидефски

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: m.schwidefsky@g.nsu.ru

The quasivariety $\mathbf{SP}(M_3)$: An equational basis

A.E. Izyurova, M.V. Schwidefsky

Abstract. We prove that the quasivariety of $(0,1)$ -lattices generated by the diamant M_3 is a variety and find an equational basis of this variety.

Keywords: lattice, equational basis, variety, diamant.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.53-62

References

- [1] M. Schützenberger, *Sur certains axiomes de la théorie des structures*, C. R. Acad. Sci. Paris **221**, 218–220 (1945).
- [2] S.D. Comer, D.X. Hong, *Some remarks concerning the varieties generated by the diamond and the pentagon*, Trans. Amer. Math. Soc. **174**, 45–54 (1972).
- [3] W. Dziobiak and M.V. Schwidefsky, *Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract*, Bull. Sec. Logic **51** (3), 329–344 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.18778/0138-0680.2022.14>
- [4] W. Dziobiak and M.V. Schwidefsky, *Duality for bi-algebraic lattices belonging to the variety of $(0,1)$ -lattices generated by the pentagon*, Algebra and Logic (to appear).
- [5] A.O. Basheyeva, M.V. Schwidefsky, K.D. Sultankulov, *The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. I. An equational basis*, Siberian Electronic Mathematical Reports **19** (2), 902–911 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.076>
- [6] A.O. Basheyeva, M.V. Schwidefsky, *The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. II. A duality result*, Siberian Math. J. **65** (3), 514–521 (2024).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446624030029>
- [7] O.A. Kadyrova, M.V. Schwidefsky, *Quasivarieties generated by small suborder lattices. I. Equational bases*, Sib. Electron. Math. Rep. **20** (1), 62–71 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.006>
- [8] O.A. Kadyrova, M.V. Schwidefsky, *Quasivarieties generated by small suborder lattices. II. A duality theorem* (preprint).
- [9] R. Freese, J. Ježek, and J.B. Nation, *Free lattices*, Math. Surveys Monogr. **42**, AMS, Providence, New York, 1995.

Acknowledgements. The work is supported by the Russian Science Foundation, project no. 24-21-00075.

Received: 30 May 2024. Accepted: 10 August 2024. Published: 17 October 2024.

- [10] J.B. Nation, *An approach to lattice varieties of finite height*, Algebra Universalis **27** (4), 521–543 (1990).
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01188998>
- [11] A.P. Huhn, *Schwach distributive Verbände I*, Acta Sci. Math. (Szeged) **33** (3–4), 297–305 (1972).

Aleksandra Evgenyevna Izyurova

Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: a.izyurova@g.nsu.ru

Marina Vladimirovna Schwidefsky

Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4 Acad. Koptug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: m.schwidefsky@g.nsu.ru

О мономорфизмах универсальных гиперграфических автоматов

Е.В. Хворостухина

Аннотация. Гиперграфическими автоматами называются автоматы, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены структурами гиперграфов, сохраняющимися функциями переходов и выходными функциями. Универсальные притягивающие объекты в категории таких автоматов называются универсальными гиперграфическими автоматами. Для таких автоматов полугруппы входных сигналов являются производными алгебрами отображений, свойства которых взаимосвязаны со свойствами алгебраической структуры исходного автомата. В работе описывается строение мономорфизмов таких автоматов и их полугрупп входных сигналов.

Ключевые слова: гиперграфический автомат, мономорфизм, изоморфизм, полугруппа.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.63-75

Введение

Как известно [1], в алгебраической теории автоматов главный объект исследования – автомат – рассматривается как многосортная алгебраическая система $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ с тремя базисными множествами: множеством состояний автомата X , множеством входных символов S , множеством выходных символов Y , с двумя сигнатурными операциями: функцией переходов $\delta : X \times S \rightarrow X$ и выходной функцией $\lambda : X \times S \rightarrow Y$. При этом в зависимости от рассматриваемых задач автоматы могут структуризоваться в подходящих алгебраических категориях, т. е. компоненты автоматов могут быть объектами некоторых специальных категорий. Так, множества состояний автомата и его выходных символов могут наделаться некоторой алгебраической структурой и являться объектами категории $\mathbf{K}$ соответствующих алгебраических систем. Важными примерами таких алгебраических систем являются графы, упорядоченные множества, линейные пространства, вероятностные пространства, топологические пространства и другие. Исследованию структуризованных в таких категориях автоматов посвящены многочисленные работы известных алгебраистов (см., например, обзор в [1]). Как следует из [1], универсальные притягивающие объекты в категории автоматов, структуризованных в любой категории $\mathbf{K}$, представляются

универсальными автоматами $\text{Atm}(A, B)$ с алгебраической системой состояний $A \in \mathbf{K}$, алгебраической системой выходных символов $B \in \mathbf{K}$ и полугруппой входных символов $S = \text{End}A \times \text{Hom}(A, B)$. В нашей работе рассматриваются гиперграфические автоматы, а именно, автоматы, структуризованные в категории гиперграфов особого вида – эффективных гиперграфов с p -определимыми ребрами **Hgr**. Универсальные притягивающие объекты в категории таких автоматов представляются универсальными гиперграфическими автоматами $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ с гиперграфом состояний H_X , гиперграфом выходных символов H_Y и полугруппой входных символов $S = \text{End}H_X \times \text{Hom}(H_X, H_Y)$, $H_X, H_Y \in \mathbf{Hgr}$. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как он содержит, в частности, не только автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются плоскостями, но и автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются разбиениями на классы эквивалентностей, содержащие более p элементов, и многие другие.

Для таких автоматов в работе [2] доказано, что они (с точностью до изоморфизма) определяются своими полугруппами входных сигналов, в работах [3–5] получены конкретная характеристика, абстрактная характеристика таких автоматов и полугрупп их входных сигналов. В нашей работе продолжаются исследования таких автоматов: здесь изучается структура мономорфизмов рассматриваемых автоматов.

Результаты работы докладывались на Международной конференции “Алгебра и математическая логика: теория и приложения”, посвященной 130-летию со дня рождения основателя кафедры алгебры Казанского университета, члена-корреспондента АН СССР Николая Григорьевича Чеботарева (1894–1947) и 80-летию со дня рождения заведующего кафедрой, академика АН РТ Марата Мирзаевича Арсланова (Казань, 2024) [6].

1. Предварительные сведения

В работе используется общепринятая терминология и основные понятия теории автоматов [1], теории полугрупп [7, 8], алгебры отношений [9] и теории гиперграфов [10].

Пусть X, Y – непустые множества. Всюду определенное однозначное бинарное отношение $\varphi \subset X \times Y$ называется отображением множества X в множество Y и обозначается символом $\varphi : X \rightarrow Y$. Постоянное отображение множества X в элемент $a \in Y$ обозначается символом C_a . Тожественное отображение множества X в себя обозначается символом Δ_X .

Согласно [10] гиперграфом называется система вида $H = (X, L)$, где X – это непустое множество вершин гиперграфа и L – семейство некоторых подмножеств множества X , называемых ребрами гиперграфа. Множество вершин гиперграфа называется ограниченным, если оно содержится в некотором его ребре, и неограниченным в противном случае. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются смежными.

Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа.

Пусть p – некоторое натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом

с p -определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p + 1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа содержатся не более, чем в одном ребре.

Например, всякое разбиение множества вершин без одноэлементных классов является эффективным гиперграфом с 1-определимыми ребрами. Кроме того, существует множество других эффективных гиперграфов с p -определимыми ребрами. На рис. 1 представлен эффективный гиперграф с 2-определимыми ребрами $H_1 = (X, L_X)$, где $X = \{1, 2, \dots, 9\}$, $L_X = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{1, 6, 9\}, \{7, 8, 9\}\}$.

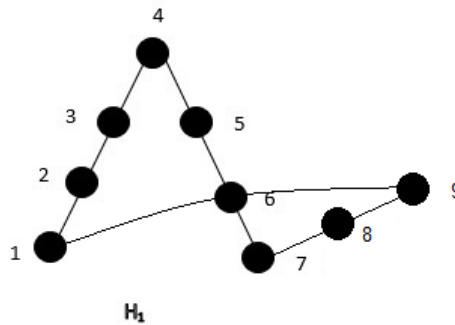


Рис. 1. Эффективный гиперграф с 2-определимыми ребрами

Частным случаем эффективных гиперграфов с p -определимыми ребрами являются p -гиперграфы.

Для фиксированного натурального числа p гиперграф $H = (X, L)$ называется p -гиперграфом, если выполняются следующие аксиомы:

- (A₁) любые p вершин содержатся в одном и только одном ребре;
- (A₂) каждое ребро содержит по крайней мере $p + 1$ вершину;
- (A₃) в множестве X есть $(p+1)$ -элементное множество, не принадлежащее ни одному ребру.

Если рассматривать плоскости [11] как гиперграфы, вершинами которых являются точки, а ребрами – прямые этих плоскостей, то любая проективная плоскость и любая аффинная плоскость с числом точек более четырех являются 2-гиперграфами. Помимо этих известных примеров, существуют и другие p -гиперграфы.

Например, 3-гиперграфом является гиперграф $H = (X, L)$ с множеством вершин $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и множеством ребер $L = \{l_1, l_2, \dots, l_{14}\}$, где

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \{1, 2, 3, 4\}, & l_2 &= \{1, 2, 5, 6\}, & l_3 &= \{1, 2, 7, 8\}, & l_4 &= \{1, 3, 5, 7\}, \\
 l_5 &= \{1, 3, 6, 8\}, & l_6 &= \{1, 4, 5, 8\}, & l_7 &= \{1, 4, 6, 7\}, & l_8 &= \{2, 3, 5, 8\}, \\
 l_9 &= \{2, 3, 6, 7\}, & l_{10} &= \{2, 4, 5, 7\}, & l_{11} &= \{2, 4, 6, 8\}, & l_{12} &= \{3, 4, 5, 6\}, \\
 l_{13} &= \{3, 4, 7, 8\}, & l_{14} &= \{5, 6, 7, 8\}.
 \end{aligned}$$

Для гиперграфов $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ называется

гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y , если оно ограниченные множества вершин гиперграфа H_X отображает в ограниченные множества вершин гиперграфа H_Y , т. е. выполняется свойство:

$$\forall l \in L_X \exists l' \in L_Y (\varphi(l) \subset l').$$

Множество всех гомоморфизмов H_X в H_Y обозначается $\text{Hom}(H_X, H_Y)$.

При этом гомоморфизм $\varphi : H_X \rightarrow H_Y$ называется:

- мономорфизмом, если отображение f взаимно однозначное, т. е. для любых $x, y \in X$ из условия $\varphi(x) = \varphi(y)$ следует $x = y$;
- изоморфизмом гиперграфа H_X на гиперграф H_Y , если φ – взаимно однозначное отображение множества X на множество Y , сохраняющее ребра этих гиперграфов, т. е. выполняется

$$\forall l \subset X (l \in L_X \iff \varphi(l) \in L_Y);$$

- эндоморфизмом гиперграфа H_X , если $H_X = H_Y$.

Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H_X с операцией композиции образует полугруппу $\text{End}(H_X)$. Как известно [1], множество $S(H_X, H_Y) = \text{End}(H_X) \times \text{Hom}(H_X, H_Y)$ образует полугруппу с ассоциативной бинарной операцией “ $\cdot$ ”, определяемой по правилу: $(\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$ для пар $(\varphi, \psi), (\varphi_1, \psi_1) \in \text{End}(H_X) \times \text{Hom}(H_X, H_Y)$.

Следуя [1], под автоматом будем понимать алгебраическую систему $\mathbf{A} = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний X , множества выходных сигналов Y , полугруппы входных сигналов S , функции переходов $\delta : X \times S \rightarrow X$ и выходной функции $\lambda : X \times S \rightarrow Y$ таких, что для любых $x \in X$ и $a, b, c \in S$ выполняются равенства:

$$(ab)c = a(bc), \quad \delta(x, ab) = \delta(\delta(x, a), b), \quad \lambda(x, ab) = \lambda(\delta(x, a), b).$$

Для каждого $s \in S$ определим отображения $\delta_s : X \rightarrow X$ и $\lambda_s : X \rightarrow Y$ по формулам: $\delta_s(x) = \delta(x, s)$, $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$, где $x \in X$.

Автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ будем называть гиперграфическим автоматом, если множество состояний X и множество выходных символов Y наделены такими структурами гиперграфов $H_X = (X, L_X)$ и $H_Y = (Y, L_Y)$, что при каждом фиксированном входном сигнале $s \in S$ преобразование $\delta_s : X \rightarrow X$ является эндоморфизмом гиперграфа H_X и отображение $\lambda_s : X \rightarrow Y$ – гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y . Такие автоматы будем также обозначать $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$.

Гомоморфизмом гиперграфического автомата $\mathbf{A} = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$ в гиперграфический автомат $\mathbf{A}' = (H'_X, S', H'_Y, \delta', \lambda')$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ гомоморфизмов $f : H_X \rightarrow H'_X$, $\pi : S \rightarrow S'$ и $g : H_Y \rightarrow H'_Y$, сохраняющих алгебраические операции таких автоматов, т. е. для любой вершины x гиперграфа H_X и любого входного сигнала $s \in S$ выполняются условия: $f(\delta(x, s)) = \delta'(f(x), \pi(s))$, $g(\lambda(x, s)) = \lambda'(f(x), \pi(s))$.

Гомоморфизм $\gamma = (f, \pi, g)$ называется изоморфизмом (мономорфизмом) автомата $\mathbf{A}$ на (в) автомат $\mathbf{A}'$, если все гомоморфизмы f, π, g являются изоморфизмами (мономорфизмами) соответствующих алгебраических систем.

Важный пример гиперграфического автомата дает алгебраическая система $\text{Atm}(H_X, H_Y) = (H_X, S(H_X, H_Y), H_Y, \delta', \lambda')$, где $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ – некоторые гиперграфы, и для любых $x \in X$, $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ определены значения:

$$\delta'(x, (\varphi, \psi)) = \varphi(x), \quad \lambda'(x, (\varphi, \psi)) = \psi(x).$$

Легко проверить, что автомат $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого гиперграфического автомата $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$ существует такой гомоморфизм $\pi : S \rightarrow S(H_X, H_Y)$, что упорядоченная тройка $\gamma = (\Delta_X, \pi, \Delta_Y)$ является гомоморфизмом A в $\text{Atm}(H_X, H_Y)$. По этой причине такой гиперграфический автомат $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ называется [1] универсальным гиперграфическим автоматом над гиперграфами H_X, H_Y .

2. Основные результаты

Обозначим через $Z(H_X, H_Y)$ множество правых нулей полугруппы $S(H_X, H_Y)$, а через $U(H_X, H_Y)$ – множество всех левых единиц полугруппы $S(H_X, H_Y)$. Эти множества в полугруппе $S(H_X, H_Y)$ соответственно определяются по следующим формулам теории полугрупп: $\Phi(x) = \forall y (yx = x)$ и $\Psi(x) = \forall y (xy = y)$.

В работе [2] был получен следующий результат.

Лемма 1. Пусть $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ – эффективные гиперграфы с p -определимыми ребрами. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) элемент $z \in S(H_X, H_Y)$ является правым нулем полугруппы $S(H_X, H_Y)$ тогда и только тогда, когда найдутся $a \in X$, $b \in Y$ такие, что $z = (C_a, C_b)$, где C_a и C_b – постоянные отображения множества X соответственно в a и b ;
- 2) элемент $i \in S(H_X, H_Y)$ является левой единицей полугруппы $S(H_X, H_Y)$ тогда и только тогда, когда $i = (\Delta_X, \psi)$ для некоторого $\psi \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$.

Лемма 2. Пусть $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ и $H_{X_1} = (X_1, L_{X_1})$, $H_{Y_1} = (Y_1, L_{Y_1})$ – эффективные гиперграфы с p -определимыми ребрами, $f : H_X \rightarrow H_{X_1}$ – изоморфизм, отображение $g : H_Y \rightarrow H_{Y_1}$ – мономорфизм. Пусть $\pi : S(H_X, H_Y) \rightarrow S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ – отображение, определяемое по формуле: $\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), f \times g(\psi))$ для произвольной пары $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) π – мономорфизм полугруппы $S(H_X, H_Y)$ в полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$;
- 2) упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ является мономорфизмом автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ в автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$.

Доказательство. Пусть отображение $\pi : S(H_X, H_Y) \rightarrow S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ определяется по формуле $\pi = (f^2, f \times g)$, где $f : H_X \rightarrow H_{X_1}$ – изоморфизм, $g : H_Y \rightarrow H_{Y_1}$ – мономорфизм. Для произвольной пары $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ отображение φ – эндоморфизм гиперграфа H_X , отображение ψ – гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y . Убедимся, что

$\pi(\varphi, \psi) \in S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Очевидно, что образ $f^2(\varphi) = f^{-1}\varphi f$ – эндоморфизм гиперграфа H_{X_1} . Рассмотрим $\pi_2(\psi) = f \times g(\psi) = f^{-1}\psi g$. Ясно, что $\pi_2(\psi) : H_{X_1} \rightarrow H_{Y_1}$. Пусть e – произвольное ребро гиперграфа H_{X_1} . По определению гиперграфа с p -определимыми ребрами найдутся различные вершины $x_1, \dots, x_{p+1}$, принадлежащие e . По определению изоморфизма в гиперграфе H_X найдутся такие различные вершины $t_1 = f^{-1}(x_1), \dots, t_{p+1} = f^{-1}(x_{p+1})$, что множество $\{t_1, \dots, t_{p+1}\}$ ограничено в H_X . Тогда

$$\pi_2(\psi)(x_i) = f^{-1}\psi g(x_i) = g(\psi(f^{-1}(x_i))) = g(\psi(t_i)), \quad i = \overline{1, p+1}.$$

Поскольку ψ и g являются гомоморфизмами, то множества $\{\psi(t_1), \dots, \psi(t_{p+1})\}$ и $\{g(\psi(t_1)), \dots, g(\psi(t_{p+1}))\}$ – ограниченные множества в гиперграфах H_Y и H_{Y_1} , соответственно. Аналогичным образом, для любого подмножества $e' \subseteq e$ можно показать, что $f \times g(\psi)(e')$ – ограниченное множество в H_{Y_1} . Это означает, что найдется ребро $r \in L_{Y_1}$ такое, что в силу p -определимости гиперграфов выполняется $f \times g(\psi)(e) = f^{-1}\psi g(e) \subseteq r$. Следовательно, $\pi_2(\psi) = f \times g(\psi)$ – гомоморфизм гиперграфа H_{X_1} в гиперграф H_{Y_1} . Это означает, что $\pi(\varphi, \psi) \in S(H_{X_1}, H_{Y_1})$.

Ясно, что π является инъекцией. Действительно, пусть $\pi(\varphi, \psi) = \pi(\varphi_1, \psi_1)$ для некоторых пар $(\varphi, \psi), (\varphi_1, \psi_1) \in S(H_X, H_Y)$. Это означает, что $(f^2(\varphi), f \times g(\psi)) = (f^2(\varphi_1), f \times g(\psi_1))$, $f^2(\varphi) = f^2(\varphi_1)$, $f \times g(\psi) = f \times g(\psi_1)$. В силу инъективности отображений f и g получаем, что $\varphi = \varphi_1$, $\psi = \psi_1$, значит, $(\varphi, \psi) = (\varphi_1, \psi_1)$. Следовательно, π – инъекция.

Возьмем произвольные элементы $s = (\varphi, \psi)$, $s_1 = (\varphi_1, \psi_1)$ полугруппы $S(H_X, H_Y)$. Так как $ss_1 = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$, то выполняются равенства

$$\begin{aligned} \pi(s) \cdot \pi(s_1) &= \pi(\varphi, \psi) \cdot \pi(\varphi_1, \psi_1) = (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi)) \cdot (f^2(\varphi_1), (f \times g)(\psi_1)) \\ &= (f^2(\varphi)f^2(\varphi_1), f^2(\varphi)(f \times g)(\psi_1)) = (f^{-1}\varphi f f^{-1}\varphi_1 f, f^{-1}\varphi f f^{-1}\psi_1 g) \\ &= (f^{-1}\varphi\varphi_1 f, f^{-1}\varphi\psi_1 g) = (f^2(\varphi\varphi_1), (f \times g)(\varphi\psi_1)) = \pi(ss_1). \end{aligned}$$

Таким образом, π – мономорфизм полугруппы $S(H_X, H_Y)$ в полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$, т. е. справедливо утверждение 1).

Более того, для произвольных $x \in X$, $s = (\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned} f(\delta(x, s)) &= f(\varphi(x)) = f(\varphi(f^{-1}(f(x)))) = f^{-1}\varphi f(f(x)) = f^2(\varphi)(f(x)) \\ &= \delta_1(f(x), (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi))) = \delta_1(f(x), \pi(s)), \\ g(\lambda(x, s)) &= g(\psi(x)) = g(\psi(f^{-1}(f(x)))) = f^{-1}\psi g(f(x)) = (f \times g)(f(x)) \\ &= \lambda_1(f(x), (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi))) = \lambda_1(f(x), \pi(s)). \end{aligned}$$

Это означает, что $\gamma = (f, \pi, g)$ является мономорфизмом автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ в автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$, т. е. справедливо утверждение п. 2). $\square$

В работе [2] доказано, что универсальные гиперграфические автоматы (с точностью до изоморфизма) определяются своими полугруппами входных сигналов, и описано стро-

ение изоморфизмов таких автоматов. Основной результат нашей работы – теорема 3, в которой описывается строение мономорфизмов универсальных гиперграфических автоматов и их полугрупп входных сигналов.

Теорема 3. Пусть $\text{Atm}(H_X, H_Y)$, $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ – универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ и $H_{X_1} = (X_1, L_{X_1})$, $H_{Y_1} = (Y_1, L_{Y_1})$, соответственно. Пусть f – такая сюръекция X на X_1 , что в гиперграфе H_X существует множество $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{p+1}\}$, в котором все p -элементные подмножества ограничены в H_X , образ $f(V) = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_{p+1})\}$ – неограниченное множество в H_{X_1} , имеется отображение $g : Y \rightarrow Y_1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\pi = (f^2, f \times g)$ – мономорфизм полугруппы $S(H_X, H_Y)$ в полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$;
- 2) f – изоморфизм гиперграфа H_X на гиперграф H_{X_1} , g – мономорфизм гиперграфа H_Y в гиперграф H_{Y_1} ;
- 3) $\gamma = (f, (f^2, f \times g), g) : \text{Atm}(H_X, H_Y) \rightarrow \text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ – мономорфизм автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ в автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$.

Доказательство. Очевидно, из условия 3) следует условие 1). А согласно лемме 2 из условия 2) следуют условия 1) и 3).

Остается показать, что из 1) следует 2). Пусть выполняется условие 1).

Докажем, что f – гомоморфизм. Рассмотрим произвольное ребро $l \in L_X$. Тогда любое отображение φ на l является эндоморфизмом гиперграфа H_X , и для произвольного $\psi \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$ пара $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$. Значит, $\pi(\varphi, \psi) \in S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Согласно условию, $\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), f \times g(\psi))$. Это означает, что $\chi = f^2(\varphi)$ является эндоморфизмом гиперграфа H_{X_1} . При этом для любого $x \in X_1$ выполняется $\chi(x) = f(\varphi(f^{-1}(x))) \in f(l)$. В силу произвольности выбора x получаем, что $f(l)$ является ограниченным множеством гиперграфа H_{X_1} , т.е. найдется ребро $r \in L_{X_1}$ такое, что $f(l) \subseteq r$. Следовательно, f – гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_{X_1} . Поскольку f – сюръекция, то $f(X) = X_1$, f – гомоморфизм гиперграфа H_X на гиперграф H_{X_1} .

Аналогичным образом можно показать, что g является гомоморфизмом гиперграфа H_Y в гиперграф H_{Y_1} .

Покажем, что f и g являются инъекциями. Пусть $f(a) = f(b)$ для некоторых $a, b \in X$. Обозначим $C_a : X \rightarrow a$, $C_b : X \rightarrow b$. В силу эффективности гиперграфа H_X константы C_a, C_b являются эндоморфизмами гиперграфа H_X . Согласно лемме 1, для некоторой константы $C_d : X \rightarrow d$ ($d \in Y$) пары (C_a, C_d) , (C_b, C_d) являются правыми нулями полугруппы $S(H_X, H_Y)$, т.е. $(C_a, C_d) \in Z(H_X, H_Y)$, $(C_b, C_d) \in Z(H_X, H_Y)$.

Рассмотрим

$$\pi(C_a, C_d) = (f^2(C_a), f \times g(C_d)) = (C_{f(a)}, f \times g(C_d)), \quad \pi(C_b, C_d) = (C_{f(b)}, f \times g(C_d)).$$

Поскольку $f(a) = f(b)$, то

$$C_{f(a)} = C_{f(b)} \implies \pi(C_a, C_d) = \pi(C_b, C_d) \implies C_a = C_b \implies a = b.$$

Следовательно, отображение $f : X \rightarrow X_1$ взаимно однозначное, т.е. f является биекцией X на X_1 .

Аналогичным образом можно показать, что отображение $g : Y \rightarrow Y_1$ взаимно однозначное и, значит, является мономорфизмом гиперграфа H_Y в гиперграф H_{Y_1} .

Покажем, что f – изоморфизм. Достаточно доказать, что $f^{-1} : H_{X_1} \rightarrow H_X$ – это гомоморфизм, т.е. остается показать, что

$$\forall l \in L_{X_1} \exists r \in L_X (f^{-1}(l) \subseteq r).$$

Предположим противное: пусть среди ребер гиперграфа H_{X_1} найдется ребро l такое, что не существует ребра $r \in L_X$, для которого $f^{-1}(l) \subseteq r$. Согласно определению гиперграфа с p -определимыми ребрами ребро l имеет по меньшей мере $p + 1$ различную вершину: $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$, где $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ для всех $i, j = \overline{1, p+1}$. Поскольку f – биекция, то в гиперграфе H_X найдутся различные вершины $y_i = f^{-1}(x_i) \in f^{-1}(l)$, $i = \overline{1, p+1}$.

Возможны два случая.

Случай 1. Все p -элементные подмножества множества $f^{-1}(l)$ неограниченны в H_X .

Рассмотрим отображение

$$\varphi(x) = \begin{cases} v_1, & \text{если } x = y_1; \\ v_2, & \text{если } x = y_2; \\ \dots & \\ v_p, & \text{если } x = y_p; \\ v_{p+1}, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $x \in X$.

Согласно нашему предположению все p -элементные подмножества множества $f^{-1}(l)$ неограниченны в H_X . Следовательно, для любого ребра r гиперграфа H_X вершины $y_1, y_2, \dots, y_p$ не могут одновременно лежать в этом ребре. Тогда по определению отображения φ образ всякого такого ребра r включается в p -элементное подмножество множества $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{p+1}\}$. Из условия теоремы имеем, что все p -элементные подмножества множества V ограничены в H_X . Это означает, что образ $\varphi(r)$ – ограниченное множество в H_X . Следовательно, отображение φ является эндоморфизмом гиперграфа H_X , т.е. для произвольного $\psi \in \text{Ном}(H_X, H_Y)$ имеем $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$.

Тогда выполняется, что $\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), f \times g(\psi)) \in S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Но для ребра l множество $f^2(\varphi)(l) = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_{p+1})\}$ является неограниченным в H_{X_1} . Следовательно, отображение $f^2(\varphi)$ не является эндоморфизмом гиперграфа H_{X_1} , т.е. π не является мономорфизмом полугруппы $S(H_X, H_Y)$ в полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Пришли к противоречию.

Случай 2. Хотя бы одно p -элементное подмножество множества $f^{-1}(l)$ ограничено в H_X . Это означает, что найдется ребро $r \in L_X$, включающее это подмножество.

Не нарушая общности, будем считать, что $\{y_1, y_2, \dots, y_p\} \subseteq r$, $y_{p+1} \notin r$. Поскольку f – гомоморфизм гиперграфа H_X на H_{X_1} , то по определению гиперграфа с p -определимыми ребрами получаем, что все вершины множества $f(r)$ содержатся в l : $f(r) \subset l$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi(x) = \begin{cases} v_1, & \text{если } x = y_1; \\ v_2, & \text{если } x = y_2; \\ \dots & \\ v_p, & \text{если } x \in r \text{ и } x \neq y_i, i = \overline{1, p-1}; \\ v_{p+1}, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $x \in X$.

Тогда $\varphi(r) = \{v_1, \dots, v_p\}$ – ограниченное множество в гиперграфе H_X . С другой стороны, по определению гиперграфа с p -определимыми ребрами любое ребро $r' \neq r$ гиперграфа H_X может содержать не больше $p-1$ вершин ребра r . Значит, по определению отображения φ образ такого ребра r' гиперграфа H_X включается в p -элементное подмножество множества V . Из условия теоремы имеем, что все p -элементные подмножества множества V ограничены в H_X . Это означает, что образ $\varphi(r')$ – ограниченное множество в H_X . Следовательно, отображение φ является эндоморфизмом гиперграфа H_X , т. е. для произвольного $\psi \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$ пара $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$.

Тогда выполняется $\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), f \times g(\psi)) \in S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Но для ребра l множество $f^2(\varphi)(l) = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_{p+1})\}$ является неограниченным в H_{X_1} . Следовательно, отображение $f^2(\varphi)$ не является эндоморфизмом гиперграфа H_{X_1} , а π не является мономорфизмом полугруппы $S(H_X, H_Y)$ в полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Пришли к противоречию.

Таким образом, получаем, что f – изоморфизм. Следовательно, выполняется условие 2). $\square$

Следствие 4. Пусть $\text{Atm}(H_X, H_Y)$, $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ – универсальные гиперграфические автоматы над p -гиперграфами $H_X = (X, L_X)$, $H_{X_1} = (X_1, L_{X_1})$ и над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами $H_Y = (Y, L_Y)$, $H_{Y_1} = (Y_1, L_{Y_1})$, соответственно. Пусть имеются сюръекция $f : X \rightarrow X_1$ и отображение $g : Y \rightarrow Y_1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\pi = (f^2, f \times g)$ – мономорфизм полугруппы $S(H_X, H_Y)$ в полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$;
- 2) f – изоморфизм гиперграфа H_X на гиперграф H_{X_1} , g – мономорфизм гиперграфа H_Y в гиперграф H_{Y_1} ;
- 3) $\gamma = (f, (f^2, f \times g), g) : \text{Atm}(H_X, H_Y) \rightarrow \text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ – мономорфизм автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ в автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$.

Доказательство. Согласно аксиоме (А3) в гиперграфе H_{X_1} существует неограниченное множество $\{z_1, z_2, \dots, z_{p+1}\}$, состоящее из $p+1$ различной вершины гиперграфа H_{X_1} .

В силу того, что f – сюръекция, в гиперграфе H_X найдется $(p + 1)$ -элементное множество $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{p+1}\}$ такое, что $f(V) = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_{p+1})\} = \{z_1, z_2, \dots, z_{p+1}\}$. При этом согласно аксиоме (A1) все p -элементные подмножества множества V ограничены в H_X . Таким образом, выполняются все условия теоремы 3, а значит, условия 1)–3) равносильны. $\square$

Заключение

Полученный результат описывает строение мономорфизмов универсальных гиперграфических автоматов над гиперграфами исследуемого класса и их полугрупп входных сигналов. Этот результат можно использовать для дальнейшего изучения морфизмов данных алгебраических систем и взаимосвязи свойств рассматриваемых автоматов и их полугрупп входных сигналов.

Список литературы

- [1] Б.И. Плоткин, Л.Я. Гринглаз, А.А. Гварамия, *Элементы алгебраической теории автоматов*, Высшая школа, М., 1994.
- [2] В.А. Молчанов, Е.В. Хворостухина, *Об абстрактной определяемой универсальности гиперграфических автоматов полугруппами входных сигналов*, Чебышевский сб. **20** (2), 259–272 (2019).
DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-259-272>
- [3] E.V. Khvorostukhina, V.A. Molchanov, *On problem of concrete characterization of universal automata*, Lobachevskii J. Math. **38** (4), 664–669 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080217040114>
- [4] E.V. Khvorostukhina, V.A. Molchanov, *Abstract characterization of input symbol semigroups of universal hypergraphic automata*, Lobachevskii J. Math. **41** (2), 214–226 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220020109>
- [5] В.А. Молчанов, Е.В. Хворостухина, *О задаче абстрактной характеристики универсальных гиперграфических автоматов*, Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика **17** (2), 148–159 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-148-159>
- [6] Е.В. Хворостухина, *О мономорфизмах гиперграфических автоматов*, Материалы международной конференции “Алгебра и математическая логика: теория и приложения”, посвящ. 130-летию со дня рождения основателя кафедры алгебры Казанского ун-та члена-корреспондента АН СССР Н.Г. Чеботарева и 80-летию со дня рождения заведующего каф. академика АН РТ М.М. Арсланова, 177–179 (2024).

- [7] А.И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, М., 1970.
- [8] G. Lallement, *Semigroups and combinatorial applications*, John Wiley & Sons, New York–Chichester–Brisbane, 1979.
- [9] В.В. Вагнер, *Теория отношений и алгебра частичных отображений*, в сб. *Теория полугрупп и ее прилож.* **1**, Изд. Саратовск. ун-та, 3–178 (1965).
- [10] A. Bretto, *Hypergraph theory. An introduction*, Springer, Cham, 2013.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00080-0>
- [11] Ф. Картези, *Введение в конечные геометрии*, Наука, М., 1980.

Екатерина Владимировна Хворостухина

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
ул. Политехническая, д. 77, г. Саратов, 410054, Россия,
e-mail: khvorostukhina85@gmail.com

On monomorphisms of hypergraphic automata

E.V. Khvorostukhina

Abstract. Hypergraphic automata are automata, state sets and output symbol sets of which are hypergraphs, being invariant under actions of transition and output functions. Universally attracting objects in the category of hypergraphic automata are called universal hypergraphic automata. The semigroups of input symbols of such automata are derivative algebras of mappings for such automata. So their properties are interconnected with properties of the algebraic structures of the automata. This paper describes the structure of monomorphisms of such automata and their semigroups of input signals.

Keywords: hypergraphic automaton, monomorphism, isomorphism, semigroup.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.63-75

References

- [1] B.I. Plotkin, L.Ja. Geenglaz, A.A. Gvaramija, *Algebraic structures in automata and databases theory*, World Scientific Publishing Co., River Edge, NJ, 1992.
DOI: <https://doi.org/10.1142/1631>
- [2] V.A. Molchanov, E.V. Khvorostukhina, *On problem of abstract definability of universal hypergraphic automata by input symbol semigroup*, Chebyshevskii Sb. **20** (2), 259–272 (2019) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-259-272>
- [3] E.V. Khvorostukhina, V.A. Molchanov, *On problem of concrete characterization of universal automata*, Lobachevskii J. Math. **38** (4), 664–669 (2017).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080217040114>
- [4] E.V. Khvorostukhina, V.A. Molchanov, *Abstract characterization of input symbol semigroups of universal hypergraphic automata*, Lobachevskii J. Math. **41** (2), 214–226 (2020).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220020109>
- [5] V.A. Molchanov, E.V. Khvorostukhina, *On problem of abstract characterization of universal hypergraphic automata*, Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform. **17** (2), 148–159 (2017) [in Russian].
DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-148-159>

-
- [6] E.V. Khvorostukhina, *On monomorphisms of hypergraphic automata*, The international conference “Algebra and mathematical logic: theory and applications” dedicated to the 130-th birthday of the founder of the department of algebra of Kazan university, professor N.G. Chebotarev, and the 80-th birthday of the chair of the department professor M.M. Arslanov, 177–179 (2024) [in Russian].
- [7] A.I. Mal’cev, *Algebraic Systems*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1973.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65374-2>
- [8] G. Lallement, *Semigroups and combinatorial applications*, John Wiley & Sons, New York–Chichester–Brisbane, 1979.
- [9] V.V. Vagner, *The theory of relations and the algebra of partial mappings*, in: “The theory of semigroups and their applications” **1**, 3–178, (1965) [in Russian].
- [10] A. Bretto, *Hypergraph theory. An introduction*, Springer, Cham, 2013.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00080-0>
- [11] F. Kártész, *Introduction to finite geometries*, North Holland, Hungary, 2014.

Ekaterina Vladimirovna Khvorostukhina

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
77 Politechnicheskaya str., Saratov 410054, Russia,
e-mail: khvorostukhina85@gmail.com

Плотность вниз в n -вычислимо перечислимых тьюринговых степенях и равномерные конструкции

М.М. Ямалеев

Аннотация. В 1993 Р. Доуни и М. Стоб показали, что плотность вниз вычислимо перечислимых (далее, в. п.) тьюринговых степеней в частичном порядке 2-в. п. тьюринговых степеней не может быть доказана при помощи равномерной конструкции. Мы обобщаем этот результат на случай произвольного натурального $n > 2$ и доказываем, что не существует равномерной конструкции для плотности вниз $(n - 1)$ -в. п. степеней в структуре n -в. п. степеней. Более того, нами показано, что не существует равномерной конструкции для плотности вниз в структуре n -в. п. степеней.

Ключевые слова: тьюринговая степень, равномерная конструкция, иерархия Ершова, плотность вниз.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.76-91

Введение

Краткое сообщение данной статьи с изложением результатов и основных идей доказательств было опубликовано в [1].

В локальной теории степеней неразрешимости при доказательстве структурных свойств зачастую удается провести равномерную конструкцию, другими словами по заданным индексам вычислимо перечислимых (далее, в. п.) множеств удастся эффективно найти индексы искомым в. п. множеств (см. также [2], с. 58). Однако, бывает и так, что некоторое структурное свойство верно, но соответствующую равномерную конструкцию провести не удастся. В этом случае доказательство требует разбора случаев и как правило усложняется с комбинаторной точки зрения, в конструкции это проявляется тем, что эффективно строится несколько кандидатов, один из которых будет удовлетворять соответствующему структурному свойству. В данной работе исследуется вопрос равномерности конструкций для плотности вниз в структуре n -вычислимо перечислимых (далее, n -в. п.) тьюринговых степеней. Все рассматриваемые нами степени являются тьюринговыми.

Благодарности. Работа поддержана грантом Российского научного фонда и Кабинета Министров Республики Татарстан (проект № 22-21-20024, <https://rscf.ru/project/22-21-20024/>) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение №. 075-02-2023-944). Также автор благодарен И.Ш. Калимуллину за ряд ценных советов и комментариев.

Напомним, что множество A называется n -в. п., если $A = \lim_s A_s$ и для любого x выполняется: $A_0(x) = 0$ и $|\{s | A_s(x) \neq A_{s+1}(x)\}| \leq n$, где последовательность конечных множеств $\{A_s\}_{s \in \omega}$ является вычислимым приближением к A . Соответственно, степень называется n -в. п., если она содержит n -в. п. множество. Известно, что n -в. п. степени образуют частичный порядок, и наименьшим элементом будет степень вычислимых множеств 0 . Под плотностью вниз понимаем следующее: для любого $\mathbf{a} > 0$ существует $\mathbf{b}$, что $0 < \mathbf{b} < \mathbf{a}$. Равномерность конструкции в данном случае означает, что по индексу некоторого n -в. п. множества из степени $\mathbf{a}$ эффективно получаем индекс некоторого множества из степени $\mathbf{b}$.

Хорошо известно, что согласно теореме Сакса о плотности структура в. п. степеней является плотной, и, в частности, плотной вниз. Также плотность вниз можно получить из теоремы Сакса о разложении, и в обоих случаях конструкция является равномерной. Плотность вниз в 2-в. п. степенях легко получается при помощи ассоциированных в. п. множеств, и зачастую это наблюдение приписывают А. Лахлану, в честь которого эти ассоциированные в. п. множества называют лахлановскими. Приведем следующее их определение. Пусть A является 2-в. п. множеством, причем на каждом шаге происходит изменение $A(x)$ не более, чем для одного x . Тогда лахлановское множество определяем как $L(A) = \{s | \exists x \ x \in A_s - A\}$. Нетрудно видеть, что это множество в. п. и сводится по Тьюрингу к A . Более того, если A имеет собственную 2-в. п. степень (т. е. не содержащую в. п. множеств), то $L(A)$ невычислимо и строго ниже A , и, напротив, если A имеет в. п. степень, то $L(A)$ может иметь как вычислимую степень, так и степень множества A .

Таким образом, упомянутая выше плотность вниз 2-в. п. степеней использует разбор случаев: для невычислимого 2-в. п. множества A собственной 2-в. п. степени искомым будет $L(A)$, для невычислимого 2-в. п. множества A в. п. степени искомым будет в. п. множество, построенное согласно теореме Сакса о плотности. Для n -в. п. множества A определение $L(A)$ будет аналогичным, более того, будут сохраняться соответствующие свойства. Тогда для плотности вниз при $n > 1$ достаточно рассмотреть следующие n альтернатив: $L(A)$, $L(L(A))$, $L(\dots L(L(A)))$ и случай в. п. степени множества A . В каждом из этих случаев устанавливается более сильное свойство плотности вниз, а именно: плотность вниз $(n-1)$ -в. п. степеней в n -в. п. степенях. Таким образом, возникают два естественных вопроса: можно ли обойтись без разбора случаев для более сильного варианта плотности вниз, а если это не удастся, то можно ли провести равномерную конструкцию для плотности вниз? Вопрос равномерности плотности первыми начали изучать в 1993 году Р. Доуни и М. Стоб [3] и дали отрицательный ответ на первый вопрос. Их решение было дано для случая $n = 2$, и оно обобщается без принципиальных трудностей. В данной работе приводится полное доказательство этого результата для произвольного $n \geq 2$ и дается отрицательный ответ на второй вопрос.

Для доказательства основных теорем понадобится следующее утверждение, которое является обобщением теоремы парной рекурсии Смальяна (см. [2], стр. 67) и доказательство которого предлагается в качестве упражнения. Здесь и далее, $\{\varphi_e\}_{e \in \omega}$ — эффективная нумерация всех частично вычислимых функций.

Предложение 1. Для любых вычислимых функций $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ существуют такие $x_1^0, \dots, x_n^0$, что

$$\varphi_{x_1^0} = \varphi_{f_1(x_1^0, \dots, x_n^0)},$$

...

$$\varphi_{x_n^0} = \varphi_{f_n(x_1^0, \dots, x_n^0)}.$$

Для удобства через $\bar{x}$ обозначим кортеж индексов $(x_1, \dots, x_n)$, а через $\bar{f}$ – кортеж функций $(f_1, \dots, f_n)$. Таким образом, для любого вычислимого набора функций $\bar{f}$ существует набор $\bar{x}_0$ такой, что $\varphi_{\bar{x}_0} = \varphi_{\bar{f}(\bar{x}_0)}$, где под записью $\bar{f}(\bar{x}_0)$ понимаем кортеж значений $(f_1(\bar{x}_0), \dots, f_n(\bar{x}_0))$. Далее, количество элементов в кортежах и количество аргументов не будем указывать явно, если они однозначно восстанавливаются из контекста.

Пусть $\{W_e\}_{e \in \omega}$ – эффективная нумерация всех в. п. множеств. Напомним, что произвольное n -в. п. множество можно представить в виде $D = U - V$, где U является в. п., а V является $(n-1)$ -в. п. Рассуждая по индукции, сопоставим множеству D следующий кортеж индексов. Пусть $U = W_e$, а V соответствует набору индексов $\bar{i} = (i_1, \dots, i_{n-1})$, тогда D соответствует $\bar{j} = (e, i_1, \dots, i_{n-1})$. Также будем обозначать $D = W_{\bar{j}}$, и под индексом n -в. п. множества D будет подразумевать кортеж индексов $\bar{j}$.

1. Обобщение результата Р. Доуни и М. Стоба

В этом и следующем разделах будем придерживаться стандартных понятий и обозначений для приоритетных конструкций в теории вычислимости, большую часть из которых можно найти в [2]. В частности, дальнейшие рассуждения проводим с использованием дерева стратегий, а некоторые индексы можем опустить, когда они ясны из контекста.

Для плотности вниз, кроме эффективности поиска индексов в. п. множеств, можно также задаться вопросом эффективности поиска сводящего функционала. В частности, Р. Доуни и М. Стоб [3] рассматривали следующий вопрос: существуют ли вычислимые функции $f(e, i)$ и $g(e, i)$ такие, что для любого невычислимого 2-в. п. множества $W_e - W_i$ множество $W_{g(e, i)}$ является невычислимым и выполняется $W_{g(e, i)} = \Phi_{f(e, i)}^{W_e - W_i}$? Оказалось, что вопрос можно решить и для случая, когда не требуется равномерность для индекса сводящего функционала.

Пусть $n > 1$. При $n = 2$ теорема 2 следует из теоремы 3: действительно, если бы существовала равномерная процедура из теоремы 2, то мы могли бы применить ее и теорему Сакса о плотности, что привело бы к существованию соответствующей равномерной процедуры для теоремы 3. В общем случае, подобное следствие получить не удастся, хотя доказательства имеют ряд схожих черт.

Теорема 2. Не существует равномерной процедуры поиска индекса невычислимого $(n-1)$ -в. п. множества W по индексу невычислимого n -в. п. множества A , при которой $W \leq_T A$.

Доказательство. Этот результат был получен в нашей совместной работе с А.И. Талиповой [1] и с полным доказательством был приведен в ее магистерской диссертации. Здесь мы ограничимся основными идеями доказательства и описанием взаимодействия требований.

Сперва рассмотрим вспомогательное утверждение, доказательство которого начинается с подраздела 1.1. Пусть дано $(n-1)$ -в. п. множество W , тогда существует равномерная конструкция для построения n -в. п. множества D такого, что D невычислимо и выполняется одно из условий: $W \not\leq_T D$ или $W \leq_T \emptyset$. Равномерность конструкции выполняется при помощи функций $g_1, \dots, g_n$, для краткости обозначим $\bar{g}$. Обозначим $W = W_{\bar{i}}$, где набор $\bar{i}$ является индексом соответствующего $(n-1)$ -в. п. множества. Таким образом, по $W = W_{\bar{i}}$ эффективно строим $D = W_{\bar{g}(\bar{i})}$.

Для доказательства основного факта теоремы рассуждаем от противного. Пусть равномерная конструкция для плотности вниз $(n-1)$ -в. п. степеней в n -в. п. степенях существует. Тогда существует кортеж из $n-1$ функций от n аргументов $\bar{f}$ такой, что $W = W_{\bar{f}(\bar{e})}$, где $A = W_{\bar{e}}$, и если выполняется $\emptyset <_T A$, то $\emptyset <_T W \leq_T A$. Далее, пусть A произвольное n -в. п. множество, тогда по A эффективно находим W , а по W эффективно находим D . Также отметим, что либо $W \not\leq_T D$, либо $W \leq_T \emptyset$, и, более того, D не вычислимо вне зависимости от W .

Рассмотрим кортеж вычислимых функции от n аргументов $\bar{h} = \bar{g}(\bar{f})$. По предложению 1 существует кортеж $\bar{e}_0$ такой, что $W_{\bar{h}(\bar{e}_0)} = W_{\bar{e}_0}$. Значит, для некоторого $\bar{e}_0$ выполняется $D = A$. Однако, D невычислимо по построению, следовательно, и A невычислимо. Тогда $W = W_{\bar{f}(\bar{e}_0)}$, и $\emptyset <_T W \leq_T A$. Это дает противоречие, так как $W \not\leq_T D$.

1.1. ТРЕБОВАНИЯ. Для доказательства упомянутого выше вспомогательного утверждения по данному $(n-1)$ -в. п. множеству W строим n -в. п. множество D , удовлетворяя для всех e следующим требованиям:

$$\mathcal{R}_e : W = \Phi_e^D \Rightarrow W \leq_T \emptyset,$$

$$\mathcal{P}_e : D \neq \Theta_e.$$

Здесь, $\{\Theta_e\}_{e \in \omega}$ – эффективная нумерация всех частично вычислимых функций, $\{\Phi_e\}_{e \in \omega}$ – эффективная нумерация всех частично вычислимых функционалов с оракулом.

Требование $\mathcal{P}_e$ удовлетворяем при помощи стандартной стратегии диагонализации против всех вычислимых функций. Другими словами, назначаем большого свидетеля x (в частности, к моменту выбора x ни разу не перечислялся в D), ожидаем шаг s такой, что $\Theta_e(x)[s] \downarrow = 0$, и перечисляем x в D . Также инициализируем все стратегии с меньшими приоритетами. Таким образом, для младших стратегий элемент x окажется под запретом.

Требование $\mathcal{R}_e$ удовлетворяем при помощи следующей стратегии. При виде равенства $W(y)[s] = \Phi_e^D(y)[s]$ на шаге s запрещаем D в ограничении на $\varphi_e(y)[s]$ (use-функции вычисления $\Phi_e^D(y)[s]$) и доопределяем вычислимую функцию Δ_e в точке y так, чтобы $\Delta_e(y) = W(y)[s]$. Таким образом, если $W = \Phi_e^D$, то $W = \Delta_e$ окажется вычислимым.

Рассмотрим наиболее принципиальный случай взаимодействия требований, когда стратегия $\mathcal{P}_i$ имеет приоритет меньше, чем стратегия $\mathcal{R}_e$. Итак, для каждого y ожидаем

шаг s такой, что $W(y)[s] = \Phi_e^D(y)[s]$ и определяем $\Delta_e(y) = W(y)[s]$. Если для некоторого y уже определено значение $\Delta_e(y)$, но на шаге $t > s$ выполняется $W(y)[t] \neq \Phi_e^D(y)[t]$, то это может произойти из-за того, что стратегия $\mathcal{P}_i$ перечислила некоторый элемент x в D . Фиксируем этот элемент x на шаге t , и дальнейшая стратегия $\mathcal{R}_e$ будет заключаться в диагонализации посредством x , при этом функция Δ_e аннулируется. Начиная с этого шага элемент x будет свидетелем диагонализации стратегии $\mathcal{R}_e$, и чтобы подчеркнуть это различие, элемент x будем называть Δ -свидетелем. Далее, x перечисляется в D и изымается из D в случае равенства в точке y . Поскольку аппроксимация $D(x)$ будет меняться не более, чем количество изменений в аппроксимации $W(y)$, то после $(n - 1)$ -изменения $W(y)$ у стратегии $\mathcal{R}_e$ всегда будет возможность поменять минимум еще один раз $D(x)$ (что позволит построить D как n -в. п. множество). Требование $\mathcal{R}_e$ в этом случае удовлетворится через конечное число шагов. Если же подобный элемент y никогда не найдется, то Δ_e будет всюду определена, и тогда нетрудно видеть, что Δ_e корректно вычисляет W (достаточно дождаться первого шага с равенством $W(y) = \Phi_e^D(y)$).

Далее, опишем лишь дерево стратегий. Для удовлетворения каждого требования будет работать несколько ассоциированных с ней стратегий. Стратегии расположим на некотором поддереве дерева $2^{<\omega}$, и будет достаточно, чтобы для каждого требования хотя бы одна стратегия оказалась удовлетворенной. Сперва зададим множество выходов как $L = \{\Delta, \text{fin}\}$. Соответственно, некоторая $\mathcal{P}$ -стратегия имеют один выход fin , а некоторая $\mathcal{R}$ -стратегия имеет выходы $\Delta <_L \text{fin}$ (в зависимости от успешности построения своей функции Δ). Упорядочим требования линейно следующим образом:

$$\text{ListReq} = \{\mathcal{R}_0 > \mathcal{P}_0 > \mathcal{R}_1 > \mathcal{P}_1 > \dots\},$$

начиная с требования с наибольшим приоритетом. Дерево стратегий T строим по индукции как поддерево бинарного дерева. Определяем $\text{ListReq}_\lambda = \text{ListReq}$ и ассоциируем с корнем дерева λ первое требование из списка ListReq_λ . Пусть ListReq_ξ – это список требований, для которых нужно задать стратегии на вершинах $\supseteq \xi$. Далее, пусть первым требованием в ListReq_ξ является $\mathcal{P}_e$, тогда ассоциируем с вершиной ξ стратегию для требования $\mathcal{P}_e$ и полагаем $\text{ListReq}_{\xi \sim \text{fin}} = \text{ListReq}_\xi - \{\mathcal{P}_e\}$, если же первым требованием является $\mathcal{R}_e$, то ассоциируем с вершиной ξ стратегию для требования $\mathcal{R}_e$ и полагаем $\text{ListReq}_{\xi \sim \Delta} = \text{ListReq}_\xi - \{\mathcal{R}_i | i \in \omega\}$ и $\text{ListReq}_{\xi \sim \text{fin}} = \text{ListReq}_\xi - \{\mathcal{R}_e\}$. Таким образом, в этом дереве стратегий отсутствуют $\mathcal{R}$ -стратегии под Δ -выходами. Приоритет на дереве стратегий задаем согласно лексикографическому упорядочению вершин, и для удобства будем отождествлять понятия “вершина” и “стратегия”.

Полная конструкция и верификация могут быть восстановлены из конструкции и верификации теоремы 5 (в частности, $\mathcal{R}$ -стратегии будут иметь лишь выходы Δ и fin). Приводить их не будем, чтобы избежать ряда повторений. Более того, доказательство может быть проведено при помощи несложного приоритетного рассуждения и без использования деревьев. $\square$

2. Неравномерность плотности вниз в n -в. п. степенях

Данный раздел посвящен следующей теореме, которая показывает что равномерности конструкции не удастся добиться и в случае некоторого ослабления условия на множество W . Далее предполагаем, что $n > 1$.

Теорема 3. *Не существует равномерной процедуры поиска индекса невычислимого n -в. п. множества W по индексу невычислимого n -в. п. множества A , при которой $W <_T A$.*

Отметим, что изменение последнего условия по сравнению с теоремой 2 необходимо. Нетрудно видеть, что теоремы 3 достаточно, чтобы не было равномерной разложимости в n -в. п. степенях, в частности, следующий результат Б. Купера и А. Ли может быть получен в качестве следствия теоремы 3.

Теорема 4 (Б. Купер и А. Ли [4]). *Не существует вычислимых функций $f_1(e, i)$, $f_2(e, i)$, $g_1(e, i)$, $g_2(e, i)$ таких, что*

- 1) $(W_{f_1(e, i)} - W_{f_2(e, i)}) \leq_T (W_e - W_i)$;
- 2) $(W_{g_1(e, i)} - W_{g_2(e, i)}) \leq_T (W_e - W_i)$;
- 3) $(W_e - W_i) \leq_T (W_{f_1(e, i)} - W_{f_2(e, i)}) \oplus (W_{g_1(e, i)} - W_{g_2(e, i)})$;
- 4) $(W_e - W_i) \not\leq_T (W_{f_1(e, i)} - W_{f_2(e, i)})$ или $(W_e - W_i) \leq_T \emptyset$;
- 5) $(W_e - W_i) \not\leq_T (W_{g_1(e, i)} - W_{g_2(e, i)})$ или $(W_e - W_i) \leq_T \emptyset$.

Доказательство теоремы 3 проведем в более сильном виде, в котором свидетелем неравномерности является 2-в. п. множество. Некоторые из идей доказательства наследуются из теоремы 4.

Теорема 5. *Не существует равномерной процедуры поиска индекса невычислимого n -в. п. множества W по индексу невычислимого 2-в. п. множества A , при которой $W <_T A$.*

Доказательство. Начальные рассуждения проводятся аналогично рассуждениям доказательства теоремы 2. Пусть такая равномерная процедура существует, тогда существует кортеж вычислимых функций $\bar{f}$ такой, что $W = W_{\bar{f}(\bar{e})}$, где $A = W_{\bar{e}}$. При этом, если выполняется $\emptyset <_T A$, то $\emptyset <_T W <_T A$. Далее, по $W = W_{\bar{f}(\bar{e})}$ эффективно строим 2-в. п. множество $D = W_{\bar{g}(\bar{i})}$, удовлетворяя следующим условиям:

- (1) D невычислимо;
- (2) либо $W \not\leq_T D$, либо W вычислимо, либо $D \leq_T W$.

Каждая из функций кортежа $\bar{h} = \bar{g}(\bar{f})$ является вычислимой и от двух аргументов. По предположению 1 существует кортеж $\bar{e}_0$ такой, что $W_{\bar{h}(\bar{e}_0)} = W_{\bar{e}_0}$. Как и ранее, для некоторого $\bar{e}_0$ верно $A = D$. Однако, D невычислимо по построению, следовательно, A невычислимо. Тогда $W = W_{\bar{f}(\bar{e}_0)}$ и $\emptyset <_T W <_T A$. Это дает противоречие, так как обязательно $W \not\leq_T D$.

2.1. ТРЕБОВАНИЯ. Перейдем к доказательству вспомогательного утверждения. Множество D строим как 2-в. п., удовлетворяя для всех e следующим требованиям:

$$\mathcal{R}_e : W = \Phi_e^D \Rightarrow W \leq_T \emptyset \vee D \leq_T W,$$

$$\mathcal{P}_e : D \neq \Theta_e.$$

Здесь, $\{\Theta_e\}_{e \in \omega}$ – эффективная нумерация всех частично вычислимых функций, $\{\Phi_e\}_{e \in \omega}$ – эффективная нумерация всех частично вычислимых функционалов с оракулом.

Так как базовые стратегии для $\mathcal{P}$ - и $\mathcal{R}$ -требований остаются как в теореме 2, то перейдем к рассмотрению трудностей, которые приводят к модификации соответствующих стратегий. Достаточно рассмотреть случай, когда несколько $\mathcal{P}$ -стратегий находятся под бесконечным выходом $\mathcal{R}$ -стратегии. Остальные случаи не вызывают трудностей благодаря приоритетному упорядочению на дереве стратегий. Ниже предполагаем, что каждый рассматриваемый шаг является расширяющим для $\mathcal{R}$ -стратегии.

Стратегия $\mathcal{P}_i$ под бесконечным выходом стратегии $\mathcal{R}_e$.

Стратегия $\mathcal{P}_i$ по прежнему удовлетворяется посредством диагонализации, однако, теперь требуется большее взаимодействие с соответствующей $\mathcal{R}$ -стратегией с бесконечным выходом. Стратегия $\mathcal{R}_e$, имея бесконечный выход, строит бесконечно много версий вычислимой функции $\Delta_e = W$, а также резервный функционал $\Gamma_e^W = D$. Итак, для диагонализации стратегия $\mathcal{P}_i$ выбирает большого свидетеля x и ожидает шага s такого, что $\Theta_i(x)[s] \downarrow = 0$. Далее, $\mathcal{P}_i$ перечисляет x в D , при этом могут возникнуть два следующих случая.

- (1) Перечисление x в D не изменяет $\Phi_e^D(y) = W(y)$ для всех y таких, что $\varphi_e(y) > x$. Тогда стратегия $\mathcal{P}_i$ удовлетворена, а вычислимая функция Δ_e продолжает верно вычислять $W(y)$.
- (2) Существует y , что $W(y)$ меняется из-за перечисления $x < \varphi_e(y)$ в D . Тогда появляется возможность изъять x из D и тем самым вынудить $W(y)$ стать равным $W(y)[s]$ (в противном случае $\mathcal{R}$ -стратегия будет бесконечно ожидать на выходе fin). Таким образом, при изменении $W(y)$ вычислимая функция Δ_e начинает неверно вычислять W в точке y , в этом случае текущую версию Δ_e отменяем и позднее начнем строить ее новую версию. Также на этом шаге достраиваем функционал Γ_e^W в точке x , соответственно, use-функцию определяем как $\gamma_e(x) = s > y$. Позднее, стратегия $\mathcal{P}_i$ выбирает нового большого свидетеля x' , определяет $\Gamma_e^W(x') = D(x')$ с $\gamma_e(x') = \gamma_e(x)$, более того, $x' > \varphi_e(y)[s]$. Таким образом, стратегия дожидается $\Theta_i(x')[t] \downarrow = 0$, изымает x из D и перечисляет x' в D . Очевидно, что стратегия $\mathcal{P}_i$ при этом удовлетворяется. Так как $x' > \varphi_e(y)[s]$, изъятие x из D возвращает use-функцию вычисления $\Phi_e^D(y)$ к шагу s , другими словами $x \notin D_{t+1}$ и $\Phi_e^D(y)[t+1] = \Phi_e^D(y)[s] = W(y)[s]$, что вынуждает измениться $W(y)$ к значению $W(y)[s]$, но тогда функционал Γ_e^W может быть поправлен и будет верно вычислять $D(x)$ и $D(x')$.

Однако, при таком подходе появляется следующая трудность, связанная с несколькими $\mathcal{P}$ -стратегиями. Предположим, что есть еще одна стратегия $\mathcal{P}_k$ под бесконечным

выходом $\mathcal{R}_e$, и $\mathcal{P}_k$ имеет приоритет выше, чем $\mathcal{P}_i$. Тогда возникает очевидный конфликт между этими тремя стратегиями. В частности, если u является свидетелем стратегии $\mathcal{P}_k$, то $\Gamma_e^W(u)$ необходимо определять не позднее определения $\Gamma_e^W(x)$ и $\Gamma_e^W(x')$, где $u < x < x'$. При этом изменение $D(u)$ может навсегда испортить функционал Γ_e^W , так как перечисление u в D не гарантирует изменения W на нужном интервале. Более того, функционал Γ_e^W должен был быть определен во всех рассматриваемых точках ввиду выбора второго свидетеля для x' .

Наиболее простым решением в этой ситуации будет добавление дополнительного бесконечного выхода стратегии $\mathcal{R}_e$, который будет означать строительство функционала Γ_e^W и под которым будем удовлетворять новые версии $\mathcal{P}$ -стратегий. Таким образом, выход Δ соответствует построению $\Delta_e = W$ и аналогичен выходу Δ из предыдущей теоремы, а выход Γ соответствует построению $\Gamma_e^W = D$, является резервным, и отменяет текущие версии Δ_e .

Заметим, что стратегия $\mathcal{P}_i$ могла рассматривать в качестве второго свидетеля не x' , а по-прежнему x . Более того, x может быть использован в качестве свидетеля и другой $\mathcal{P}$ -стратегией, что позволит удовлетворить эту $\mathcal{P}$ -стратегию, не испортив функционал Γ_e^W . Исходя из изложенного, для $\mathcal{P}$ -стратегий удобно будет рассматривать разные версии под Γ - и Δ -выходами. Под каждым Γ - и Δ -выходом будет список лишь из $\mathcal{P}$ -стратегий, поэтому стратегии под Δ -выходами будут работать как и ранее, дополнительно предоставляя свидетелей $\mathcal{P}$ -стратегиям под соответствующим Γ -выходом (метод известен как “поток”, который в полной мере проявил себя в работе М.М. Арсланова, И.Ш. Калимуллина и С. Лемппа [5]). Стратегии под Γ -выходами будут выбирать только из предоставленных свидетелей и вместо перечисления в D будут их при необходимости изымать, таких свидетелей будем называть Δ -свидетелями. Проиллюстрируем работу на следующем примере, из которого будет видно и преодоление оставшихся трудностей.

Стратегия $\mathcal{P}_k$ под Γ -выходом стратегии $\mathcal{R}_e$, стратегия $\mathcal{P}_i$ под Δ -выходом стратегии $\mathcal{R}_e$.

- (1) Стратегия $\mathcal{P}_i$ выбирает большого свидетеля x и начинает ожидание. Во время этого ожидания стратегия $\mathcal{R}_e$ в порядке возрастания определяет Δ_e .
- (2) На шаге s_0 выполнено $\Theta_i(x)[s_0] \downarrow = 0$, и стратегия $\mathcal{P}_i$ перечисляет x в D .
- (3) На шаге $s_1 > s_0$ стратегия $\mathcal{R}_e$ имеет $\Delta_e(y) \neq W(y)[s_1]$, но $\Phi_e^D(y)[s_1] = W(y)[s_1]$. Тогда инициализируем функцию Δ_e и посещаем выход Γ . При этом определяем $\Gamma_e^W(x)[s_1] = 1$ с $\gamma_e(x) = s_1$. Элемент x в качестве Δ -свидетеля передаем на выход Γ .
- (4) Стратегия $\mathcal{P}_k$, начав работать, назначает Δ -свидетеля $z = x$.
- (5) Во время ожидания стратегии $\mathcal{P}_k$ стратегия $\mathcal{R}_e$ строит новую функцию Δ_e , а $\mathcal{P}_i$ начинает работу с новым большим свидетелем.
- (6) На шаге $s_2 > s_1$ стратегия $\mathcal{R}_e$ вновь имеет выход Γ , а у стратегии $\mathcal{P}_k$ выполнено $\Theta_k(z)[s_2] \downarrow = 1$. Тогда $\mathcal{P}_k$ изымает z из D , завершив свою работу.
- (7) На шаге $s_3 > s_2$ стратегия $\mathcal{R}_e$ определяет $\Delta_e(y)$ (в частности, выполнено $\Phi_e^D(y)[s_3] = W(y)[s_3]$).

- (8) На шаге $s_4 > s_3$ стратегия $\mathcal{R}_e$ имеет выход Γ и переопределяет $\Gamma_e^W(z) = 0$. Это переопределение возможно, так как обязательно будет

$$\Phi_e^D(y)[s_4] = \Phi_e^D(y)[s_3] = W(y)[s_3] = W(y)[s_4],$$

а значит $W(y)[s_4] = W(y)[s_0]$. Более того $\Gamma_e^W(z)[s_1] = 1$ уже было определено с $\gamma_e(x) = s_1 > y$ на шаге s_1 .

Осталось заметить, что наличие двух $\mathcal{P}$ -стратегий под Γ -выходом $\mathcal{R}$ -стратегии не влияет существенным образом на работу этих стратегий. Действительно, пусть стратегии $\mathcal{P}_k$ и $\mathcal{P}_i$ находятся под Γ -выходом стратегии $\mathcal{R}_e$, и стратегия $\mathcal{P}_k$ имеет приоритет выше, чем приоритет у $\mathcal{P}_i$. Предположим, они имеют Δ -свидетелей $z_k < z_i$, соответственно. Тогда, если стратегия $\mathcal{P}_k$ первой изымает z_k из D , то z_i отменяется, а значит $\Gamma_e^W(z_i)$ не требует поправки. Если же стратегия $\mathcal{P}_i$ первой изымает z_i , то это никак не сказывается на вычислении $\Gamma_e^W(z_k)$, так как $\varphi_e(y(z_k)) < z_i$ (другими словами интервал в D для работы стратегии $\mathcal{P}_i$ находится вне интервала работы стратегии $\mathcal{P}_k$). Если после этого стратегия $\mathcal{P}_k$ также изымает z_k из k , то, очевидно, $\Gamma_e^W(z_k)$ может быть поправлено как и ранее, а вычисление $\Gamma_e^W(z_i)$ будет иметь свежий use ввиду элемента $y(z_k)$.

2.2. ДЕРЕВО СТРАТЕГИЙ. Дерево стратегий будем строить по аналогии с деревом стратегий в теореме 2. Множество выходов определяем как $L = \{\Gamma, \Delta, \text{fin}\}$. При этом $\mathcal{P}$ -стратегии имеют один выход fin , $\mathcal{R}$ -стратегии имеют выходы $\Gamma <_L \Delta <_L \text{fin}$, где выход Δ соответствует вычислимости W , а выход Γ соответствует сводимости $D \leq_T W$. Упорядочим требования линейно следующим образом: $\text{ListReq} = \{\mathcal{R}_0 > \mathcal{P}_0 > \mathcal{R}_1 > \mathcal{P}_1 > \dots\}$, где $\mathcal{R}_0$ имеет наивысший приоритет. Дерево стратегий T строим по индукции как поддерево тернарного дерева. Определяем $\text{ListReq}_\lambda = \text{ListReq}$ и ассоциируем с вершиной λ первое требование из списка ListReq_λ . Пусть ListReq_ξ – это список требований, для которых нужно задать стратегии на вершинах $\supseteq \xi$. Далее, пусть первым требованием в ListReq_ξ является $\mathcal{P}_e$, тогда ассоциируем с вершиной ξ стратегию для требования $\mathcal{P}_e$ и полагаем $\text{ListReq}_{\xi \sim \text{fin}} = \text{ListReq}_\xi - \{\mathcal{P}_e\}$, если же первым требованием является $\mathcal{R}_e$, то ассоциируем с вершиной ξ стратегию для требования $\mathcal{R}_e$ и полагаем $\text{ListReq}_{\xi \sim \Gamma} = \text{ListReq}_\xi - \{\mathcal{R}_i | i \in \omega\}$, $\text{ListReq}_{\xi \sim \Delta} = \text{ListReq}_\xi - \{\mathcal{R}_i | i \in \omega\}$ и $\text{ListReq}_{\xi \sim \text{fin}} = \text{ListReq}_\xi - \{\mathcal{R}_e\}$. Таким образом, в дереве стратегий под Γ - и Δ -выходами отсутствуют $\mathcal{R}$ -стратегии. Приоритет на дереве стратегий задаем согласно лексикографическому упорядочению вершин. Запись Φ_ρ^D будет обозначать Φ_e^D , где стратегия ρ соответствует требованию $\mathcal{R}_e$. Аналогично для других подобных записей, в частности, каждая вершина ρ , соответствующая требованию $\mathcal{R}_e$, будет строить свою версию вычислимой функции Δ_e , обозначаемую как Δ_ρ .

Для каждой $\mathcal{R}$ -стратегии ρ , определим *длину соглашения* на шаге s следующим образом:

$$l(\rho)[s] = \max\{x' \mid \forall x \leq x' \ W(x)[s] = \Phi_\rho^D(x)[s]\}.$$

Шаг s назовем ρ -*расширяющим*, если $l(\rho)[s] > l(\rho)[s^-]$, где $s^- < s$ – это предыдущий

ρ -расширяющий шаг, на котором ρ была посещена. Для удобства полагаем, что шаг 0 также является ρ -расширяющим.

Напомним, что каждая $\mathcal{P}$ -стратегия под Γ -выходом имеет в качестве Δ -свидетеля число x , которое являлось одним из прежних свидетелей $\mathcal{P}$ -стратегии под Δ -выходом; изъятие x из D вынуждает измениться $W(y)$ в некоторой точке y , связанной с x . Для обозначения Δ -свидетелей будем использовать z , обозначение $y(z)$, как и прежде, будем использовать для y , соответствующего z . Под назначением (отменой) свидетеля на шаге s подразумеваем, что соответствующий параметр становится на шаге s определенным (неопределенным). Ввиду того, что на каждом бесконечном пути может быть только один выход Γ , то для удобства будем отличать $\mathcal{P}$ -стратегии под Γ -выходом от стратегий под Δ - и fin -выходами.

2.3. КОНСТРУКЦИЯ. На каждом шаге определяем вычислимую аппроксимацию TP_s истинного пути TP . Также определяем аппроксимации всех множеств и функционалов на этих шагах (значения сохраняются, если явно не переопределяются). При инициализации стратегии отменяем все ее параметры.

Шаг $s = 0$. Определяем $D[s] = \emptyset$ и инициализируем все стратегии $\xi \in T$.

Шаг $s + 1$. Вычислимую аппроксимацию TP_{s+1} определяем по индукции, работая на подшагах $t \leq s + 1$. Сперва полагаем $TP_{s+1,0} = \lambda$, где λ – это корень дерева. На подшаге $t + 1$, имея $TP_{s+1,t}$, определяем $TP_{s+1,t+1}$. Далее, если $t < s$, то переходим к подшагу $t + 2$. Если $t = s$, то определяем $TP_{s+1} = TP_{s+1,t+1}$, переходим к следующему шагу $s + 2$ и инициализируем все вершины $\xi \not\leq TP_{s+1}$. На подшаге $t + 1$ построение зависит от стратегии $TP_{s+1,t}$.

Если $TP_{s+1,t} = \pi$ является $\mathcal{P}$ -стратегией, которая не находится под каким-нибудь Γ -выходом, то выполняем инструкции первого случая, который имеет место.

- ($\pi 1$) Если свидетель не определен, то назначаем большого свидетеля $x_\pi[s + 1]$. Инициализируем все вершины $\xi \not\leq \pi$ и определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \pi \hat{\sim} \text{fin}$.
- ($\pi 2$) Если свидетель $x = x_\pi[s]$ определен и $0 = D(x)[s] = \Theta_\pi(x)[s + 1]$, то определяем $D[s + 1] = D[s] \cup \{x\}$. Инициализируем все вершины $\xi \not\leq \pi$ и определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \pi \hat{\sim} \text{fin}$.
- ($\pi 3$) Иначе (тогда обязательно выполнено $D(x)[s] \neq \Theta_\pi(x)[s + 1]$), определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \pi \hat{\sim} \text{fin}$.

Если $TP_{s+1,t} = \pi$ является $\mathcal{P}$ -стратегией под Γ -выходом (предположим $\rho \hat{\sim} \Gamma \subseteq \pi$), то выполняем инструкции первого случая, который имеет место.

- ($\pi_\Gamma 1$) Если Δ -свидетель не определен, то назначаем Δ -свидетеля $z_\pi[s + 1] = z_\rho[s + 1]$. Инициализируем все вершины $\xi \not\leq \pi$ и определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \pi \hat{\sim} \text{fin}$.
- ($\pi_\Gamma 2$) Если Δ -свидетель $z = z_\pi[s]$ определен и $1 = D(z)[s] = \Theta_\pi(z)[s + 1]$, то определяем $D[s + 1] = D[s] - \{z\}$. Инициализируем все вершины $\xi \not\leq \pi$ и определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \pi \hat{\sim} \text{fin}$.
- ($\pi_\Gamma 3$) Иначе (тогда обязательно выполнено $D(z)[s] \neq \Theta_\pi(z)[s + 1]$), определяем выход

$$TP_{s+1,t+1} = \pi \wedge \text{fin.}$$

Если $TP_{s+1,t} = \rho$ является $\mathcal{R}$ -стратегией, то выполняем инструкции первого случая, который имеет место.

- ($\rho 1$) Если $s + 1$ является ρ -расширяющим шагом и существует наименьший y такой, что $W(y)[s + 1] \neq \Delta_\rho(y) \downarrow$, но не определен Δ -свидетель $z_\rho[s]$, то предположим, что $\Delta_\rho(y)$ было определено на шаге $s_0 < s + 1$. Тогда $\Phi_\rho^D(y)[s_0] = W(y)[s_0] \neq W(y)[s + 1]$, и между шагами s_0 и $s + 1$ изменение вычисления произошло из-за перечисления свидетеля $\mathcal{P}$ -стратегии. Пусть этим свидетелем является x , тогда назначаем $z_\rho[s + 1] = x$ в качестве Δ -свидетеля (для краткости через $y(x)$ будем обозначать y). Инициализируем функцию Δ_ρ и определяем $\Gamma_\rho^W(x)[s + 1] = 1$ с $\gamma_\rho(x)[s + 1] = s$. Для всех $x' < x$ таких, что $\Gamma_\rho^W(x')$ ни разу не было определено, полагаем тождественно $\Gamma_\rho^W(x') = 0$ с $\gamma_\rho(x')[s + 1] = s$. Для всех x'' таких, что $\Gamma_\rho^W(x'')$, что требует переопределения, полагаем $\Gamma_\rho^W(x'')[s + 1] = D(x'')[s + 1]$ с $\gamma_\rho(x'')[s + 1] = \gamma_\rho(x'')[s']$, где $s' < s$ является последним шагом, где было определено $\gamma_\rho(x'')[s']$. Определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \rho \wedge \Gamma$.
- ($\rho 2$) Если $s + 1$ является ρ -расширяющим шагом и существует наименьший y , для которого $\Delta_\rho(y)$ не определено и $W(y)[s + 1] = \Phi_\rho^D(y)[s]$, то определяем $\Delta_\rho(y) = W(y)[s + 1]$. Отменяем Δ -свидетеля $z_\rho[s + 1]$ и определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \rho \wedge \Delta$.
- ($\rho 3$) Иначе (шаг $s + 1$ не является ρ -расширяющим), отменяем Δ -свидетеля $z_\rho[s + 1]$ и определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \pi \wedge \text{fin.}$

2.4. ВЕРИФИКАЦИЯ. Покажем, что истинный путь $TP = \lim \inf_s TP_s$ существует и что каждое требование удовлетворяется соответствующей вершиной этого пути. Существование следует из того, что дерево конечно ветвящееся и $|TP_s| = s$ для любого s . Множество D является 2-в. п., так как перечисление элементов происходит из-за случая ($\pi 2$), а изыятие элементов из D происходит из-за случая ($\pi_\Gamma 2$), более того, ни один Δ -свидетель не становится обычным свидетелем.

Сперва докажем, что каждая вершина на истинном пути инициализируется конечное число раз и инициализирует конечное число раз другие вершины на истинном пути. Рассуждаем по индукции. Для базы индукции (корневая вершина) доказательство аналогично индукционному шагу.

Рассмотрим $\pi \subset TP$, где π – $\mathcal{P}$ -стратегия. По индукционному предположению зафиксируем шаг s_0 , после которого π не инициализируется. Докажем, что π инициализирует другие стратегии конечное число раз. Сперва рассмотрим случай, когда π не находится под Γ -выходом. Пусть x – окончательный свидетель после шага s_0 . Инициализация из-за π может происходить в двух случаях. Так как свидетель x назначен, то инициализация из-за случая ($\pi 1$) происходить не может. Если инициализация происходит из-за случая ($\pi 2$) на шаге $s > s_0$, тогда $D(x)[s - 1] = 0$ и $\Theta_\pi(x)[s] = 0$. Получаем $D[s](x) = 1$, следовательно $D(x) = 1$ (если $D(x)$ изменит значение с 1 на 0, то π инициализируется, что противоречит предположению). Таким образом, $\Theta_\pi(x) = \Theta_\pi(x)[s] = 0$, и получаем,

что $D(x) = 1 \neq 0 = \Theta_\pi(x)$. После этого шага из-за случая $(\pi 2)$ инициализация больше происходить не может, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим случай, когда π находится под Γ -выходом некоторой $\mathcal{R}$ -стратегии ρ . Пусть z – это окончательный Δ -свидетель после шага s_0 . Инициализация из-за π может происходить в двух случаях. Так как Δ -свидетель z назначен, то инициализация из-за случая $(\pi_\Gamma 1)$ происходить не может. Если инициализация происходит из-за случая $(\pi_\Gamma 2)$ на шаге $s > s_0$, тогда $D(z)[s-1] = 1$ и $\Theta_\pi(z)[s] = 1$. Получаем $D(z)[s] = 0$, следовательно $D(z) = 0$. Таким образом, $\Theta_\pi(z) = \Theta_\pi(z)[s] = 1$, и получаем $D(z) = 1 \neq 0 = \Theta_\pi(z)$. После этого шага из-за случая $(\pi_\Gamma 2)$ инициализация больше происходить не может, что и требовалось доказать. Более того, выше доказано, что вершина π после шага s_0 удовлетворяет соответствующую стратегию $\mathcal{P}_e$.

Теперь рассмотрим $\rho \subset TP$, где ρ является $\mathcal{R}$ -стратегией. По индукционному предположению зафиксируем шаг s_0 , после которого ρ не инициализируется. Сперва рассмотрим случай $W \neq \Phi_\rho^D$. Очевидно, что соответствующее требование удовлетворено. Также стратегия ρ не производит действий по инициализации (другими словами, любая инициализация из-за ρ исходит от $TP_s \supset \rho$), а значит инициализирует вершины на TP только конечное число раз.

Наконец, пусть $W = \Phi_\rho^D$. Рассмотрим случай, когда $(\rho 1)$ повторяется бесконечно часто. Тогда выход Γ будет истинным и ни одна стратегия из-за ρ на истинном пути не инициализируется после шага s_0 . Дополнительно покажем, что $D = \Gamma_\rho^W$. Рассмотрим Δ -свидетеля z и $y = y(z)$ и предположим, что все шаги будут ρ -расширяющими. Пусть на шаге $s_1 > s_0$ было определено $\Delta_\rho(y)$. Далее, пусть на шаге $s_2 > s_1$ было определено $\Gamma_\rho^W(z)[s_2] = D(z)[s_2]$, значит, $W(y)[s_2] \neq W(y)[s_1] = \Delta_\rho(y)$. Так как выходы Γ и Δ могут быть в точности на расширяющих шагах, то заметим, что $\varphi_\rho(y)[s_1] < x$ для всех последующих свидетелей x под Δ -выходом и $z > \varphi_\rho(y(z'))$ для всех Δ -свидетелей $z' < z$. Если на шаге $s_3 > s_2$ с выходом Γ элемент z будет изъят из D (а значит к этому моменту z не отменен и ни один Δ -свидетель $z' < z$ не был изъят из D после шага s_2), то на следующем шаге $s_4 > s_3$ с выходом Γ имеем $\Phi_\rho^D(y)[s_4] = \Phi_\rho^D(y)[s_1] = W(y)[s_1]$. Следовательно, $\Gamma_\rho^W(z)[s_4] = D(z)[s_4] = D(z)$. Осталось убедиться, что если $W(y) = W(y)[s_2]$, то существует $y' < y$, что $W(y') \neq W(y')[s_2]$. Действительно, таким элементом будет $y' = y(z')$ для наименьшего $z' < z$ (свидетеля $\mathcal{P}$ -стратегии под выходом Γ), который изъят на шаге $s_5 \geq s_4$.

Перейдем к случаю, когда $(\rho 1)$ выполняется конечное число раз, и зафиксируем шаг $s_1 > s_0$, после которого он не выполняется. Тогда выход Δ будет истинным и ни одна стратегия из-за ρ на истинном пути не инициализируется после шага s_1 . Продолжая рассуждения и не ограничивая общности, будем считать, что последняя версия Δ_ρ начинает строиться также с шага s_1 . Тогда для любого y существует шаг $s > s_1$, что определяем $\Delta_\rho(y) = W(y)[s]$. Каждый раз, определяя $\Delta_\rho(y)$, инициализируем все $\mathcal{P}$ -стратегии с меньшими приоритетами под выходом fin . Значит, никакая из этих стратегий после шага s не

изменяет $D \upharpoonright \varphi_\rho(y)[s]$. Получаем, что если выполняются равенства

$$W(y) = \Phi_\rho^D(y) = \Phi_\rho^D(y)[s] = W(y)[s] = \Delta_\rho(y),$$

то $W(y) = \Delta_\rho(y)$. Если равенства для всех y не будут нарушены, то W будет вычислимым. Рассмотрим случай, когда равенство между Δ_ρ и W может быть нарушено, и убедимся, что такого не произойдет. Тогда существовал бы наименьший y и шаг $t > s$, на котором посетили ρ , что $W(y)[t] \neq \Delta_\rho(y)$, значит у стратегии ρ должен был быть случай ($\rho 1$). Более того, этот y может быть привязан к конкретному свидетелю x , так как с равенствами работаем лишь на расширяющих шагах. Тогда у ρ появится Δ -свидетель, что означает появление выхода Γ после шага s и приводит к противоречию.

Заметим, что если какая-то $\mathcal{R}$ -стратегия на истинном пути имеет выход Γ или Δ , то все $\mathcal{R}$ -требования удовлетворяются автоматически. Таким образом, если на какой-то бесконечной ветви дерева стратегий все стратегии будут удовлетворены, то этого будет достаточно для удовлетворения всех требований. Такой ветвью, очевидно, является истинный путь TP . Зафиксируем вершину на истинном пути, которая соответствует некоторому требованию. По доказанному выше эта вершина не инициализируется после некоторого шага s_0 . Осталось повторить рассуждения, приведенные выше, для случаев $\mathcal{P}$ -стратегии и $\mathcal{R}$ -стратегии, соответственно. $\square$

В заключении приведем два замечания, основанные на этом доказательстве.

Замечание 6. В теореме 5 класс множеств для W вовсе не обязан быть n -в. п., так как имеет значение лишь существование эффективной нумерации и выполнение теоремы рекурсии.

Замечание 7. В классе всех в. п. множеств плотность вниз всегда может быть получена равномерной конструкцией, в то время как в классе всех ω -в. п. множеств существует множество минимальной тьюринговой степени. Таким образом, для 2-в. п. множеств реализуется промежуточный вариант: они не могут иметь минимальные тьюринговые степени, но при этом могут быть минимальными с точки зрения равномерной плотности вниз.

Список литературы

- [1] А.И. Талипова, М.М. Ямалеев, *Неравномерность плотности вниз в n -вычислимо перечислимых тьюринговых степенях*, Изв. вузов. Матем. (11), 124–131 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-11-124-131>
- [2] Р.И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Казан. матем. о-во, Казань, 2000.

- [3] R. Downey, M. Stob, *Splitting theorems in recursion theory*, Ann. Pure Appl. Log. **65** (1), 1–106 (1993).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0168-0072\(93\)90234-5](https://doi.org/10.1016/0168-0072(93)90234-5)
- [4] S.B. Cooper, A.S. Li, *Non-uniformity and generalised Sacks splitting*, Acta Math. Sinica **18** (2), 327–334 (2002).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s101140100150>
- [5] M.M. Arslanov, I.Sh. Kalimullin, S. Lempp, *On Downey's conjecture*, J. Symb. Log. **75** (2), 401–441 (2010).
DOI: <https://doi.org/10.2178/jsl/1268917488>

Марс Мансурович Ямалеев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru

Downwards density in the n -computably enumerable Turing degrees and the uniform constructions

M.M. Yamaleev

Abstract. In 1993, R. Downey and M. Stob showed that the downwards density of computably enumerable (c.e.) Turing degrees in the partial 2-c.e. Turing degrees cannot be obtained from a uniform construction. We generalize this result for any $n > 2$ and show that there is no a uniform construction for the downwards density of $(n - 1)$ -c.e. degrees in the structure of n -c.e. degrees. Moreover, we show that there is no a uniform construction for the downwards density in the n -c.e. degrees.

Keywords: Turing degree, uniform construction, Ershov's heirarchy, downwards density.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.3.76-91

References

- [1] A.I. Talipova, M.M. Yamaleev, *Nonuniformity of downwards density in the n -computably enumerable Turing degrees*, Russian Math. (Iz. VUZ) **66** (11), 110–115 (2022).
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X22110081>
- [2] R.I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987.
URL: <https://link.springer.com/book/9783540666813>
- [3] R. Downey, M. Stob, *Splitting theorems in recursion theory*, Ann. Pure Appl. Log. **65** (1), 1–106 (1993).
DOI: [https://doi.org/10.1016/0168-0072\(93\)90234-5](https://doi.org/10.1016/0168-0072(93)90234-5)
- [4] S.B. Cooper, A.S. Li, *Non-uniformity and generalised Sacks splitting*, Acta Math. Sinica **18** (2), 327–334 (2002).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s101140100150>

Acknowledgements. The work supported by the Russian Science Foundation and the Cabinet of Ministers of the Republic of Tatarstan (project No. 22-21-20024, <https://rscf.ru/project/22-21-20024/>) and performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (project No. 075-02-2023-944). Also the author thanks I.Sh. Kalimullin for a number of helpful suggestions and comments.

- [5] M.M. Arslanov, I.Sh. Kalimullin, S. Lempp, *On Downey's conjecture*, J. Symb. Log. **75** (2), 401–441 (2010).

DOI: <https://doi.org/10.2178/jsl/1268917488>

Mars Mansurovich Yamaleev

Kazan Federal University,

N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics,

Volga Region Mathematical Center,

18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,

e-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru

День математика

“Математики достойны своего профессионального праздника”

Из выступления ректора МГУ В.А. Садовниченко на
Всероссийском съезде учителей и преподавателей математики,
23 ноября 2023 г.

С 2024 г. в России появится новый профессиональный праздник – День математика. Соответствующий приказ Минпросвещения РФ был зарегистрирован 28 июня. В качестве даты празднования было выбрано **1 декабря** – день рождения выдающегося русского математика Николая Ивановича Лобачевского.

Как было отмечено в сообщении на сайте кабмина, с инициативой об установлении такого праздника в Правительство обратился ректор Московского государственного университета Виктор Садовничий. Это предложение впервые прозвучало в ходе Всероссийского съезда учителей и преподавателей математики, который прошёл в МГУ в ноябре 2023 года, и было поддержано его участниками. До этого неофициальным днем математика в России считалось 1 апреля. Также 14 марта отмечается всемирный день математика, утвержденный ЮНЕСКО. Этот же дата известна как день числа π .

В КФУ 1 декабря традиционно проводится Открытая Поволжская математическая олимпиада студентов. С положением об олимпиаде, а также с задачами прошлых лет, можно ознакомиться на сайте олимпиады по адресу <https://lobachevolymp.kpfu.ru>.

XXIII Всероссийская молодежная школа-конференция “Лобачевские чтения-2024”

В последнее время чрезвычайно актуальной является проблема привлечения талантливой молодежи к фундаментальным научным исследованиям. С этой целью Казанский университет регулярно проводит молодежные школы-конференции “Лобачевские чтения”.

Направления работы конференции:

- алгебра и математическая логика;
- анализ данных и машинное обучение;
- геометрия и топология;
- дифференциальные уравнения;
- теория функций и функциональный анализ;
- теория приближений и вычислительные методы;
- функциональный анализ и квантовая теория информации;
- компьютерное моделирование и информационные технологии;
- аэрогидромеханика;
- механика деформируемого твердого тела;
- математическое образование. История математики.

Работа конференции будет проходить в Казани на базе Казанского (Приволжского) федерального университета (КФУ). Программа школы-конференции включает в себя лекции ведущих российских ученых и доклады участников конференции.

Для участия в школе-конференции приглашаются молодые (до 35 лет) преподаватели, научные сотрудники, аспиранты, магистранты, студенты-старшекурсники. Форма докладов участников – устные сообщения до 15 минут (возможно онлайн). Материалы отобранных оргкомитетом докладов будут опубликованы к открытию школы-конференции в очередном томе “Трудов Математического центра имени Н.И. Лобачевского”.

Председатель оргкомитета – и.о. директора Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ Насрутдинов Марат Фаритович, ученый секретарь – Хакимов Джамолиддин Рахмонович.

Желающие сделать доклад должны зарегистрироваться на сайте конференции по адресу <https://kpfu.ru/math/conference/lobachevskii/xxiii-vserossiyskaya-molodezhnaya-shkola> и прислать оформленные согласно требованиям (см. информацию на сайте) материалы в TeX- и pdf-форматах. Срок регистрации и отправки тезисов – **до 30 октября 2024 г.** по электронному адресу: **2024.lobach@gmail.com**.

Телефоны для справок: **+7937 005 43 41** (ученый секретарь Хакимов Джамолиддин Рахмонович).

Мальцевские чтения 2024

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН и Математический центр в Академгородке организуют традиционную международную конференцию “Мальцевские чтения”. В этом году она посвящена 115-летию со дня рождения Анатолия Ивановича Мальцева и 300-летию Российской академии наук. Конференция пройдет в ИМ СО РАН (Новосибирск) **с 11 по 15 ноября 2024.**

В конференции примут участие специалисты по алгебраической комбинаторике, теории групп, теории колец, теории моделей, универсальной алгебре, математической логике, неклассическим логикам, теории вычислимости, алгебро-логическим методам в информационных технологиях, другим близким разделам математики.

Программа конференции будет включать 45-минутные пленарные доклады по приглашению и короткие (10-20 минут) сообщения в секциях

- алгебро-логических методов в информационных технологиях;
- неклассических логик и универсальной алгебры;
- теории вычислимости;
- теории групп и приложений;
- теории колец;
- теории моделей.

Дополнительную информацию можно найти на официальном сайте конференции:
<http://old.math.nsc.ru/conference/malmeet/24/Main.htm>.

Календарь конференций (ноябрь 2024 г. – январь 2025 г.)

Ноябрь 2024 г.

- **Международная конференция “XIV Белорусская математическая конференция”**
г. Минск, Белоруссия, 28 октября–1 ноября 2024 г.
Сайт: <https://mmf.bsu.by/ru/konferentsii/xiv-belorusskaya-matematicheskaya-konferentsiya>
Регистрация и прием тезисов завершены.
- **Дни динамики в Сириусе. К юбилею академика Д.В. Трецева**
Международный математический центр “Сириус”, г. Сочи, Россия, 28 октября–1 ноября 2024 г.
Сайт: https://siriusmathcenter.ru/program_051w
Участие в конференции с докладом – по приглашению организаторов.
- **Международный онлайн воркшоп “Singularities, Blow-up, and Non-Classical Problems in Nonlinear PDEs for youth”**
РУДН, г. Москва, Россия, 13–16 ноября 2024 г.
Сайт: <https://www.mathnet.ru/rus/conf2477>
Воркшоп проводится в форме мини-курсов из одной или двух 60-минутных лекций. Лекции будут проходить через MS Teams (или другую платформу видеоконференций) в формате трансляции.

Декабрь 2024 г.

- **Международная конференция, посвященная 90-летию академика А.Н. Ширяева “Стохастический анализ, статистика случайных процессов и оптимизация”**
Тбилиси–Бакуриани, Грузия, 9–14 декабря 2024 г.
Сайт: <https://www.mathnet.ru/rus/conf2430>
- **International scientific workshop OTHA Fall 2024 on operator theory and harmonic analysis and their applications**
Сириус, г. Сочи, Россия, 15–19 декабря 2024 г.
Сайт: <https://otha.sfedu.ru/workshop-otha-fall-2024>
Участие в конференции с докладом – по приглашению организаторов.

Январь 2025 г.

- **Воронежская зимняя математическая школа “Современные методы теории функций и смежные проблемы”**

г. Воронеж, Россия, 30 января–4 февраля 2025 г.

Сайт: <https://vzmsh.math-vsu.ru>

Срок регистрации и отправки тезисов– до 25 декабря 2024 г.